Estructura de la Materia 1 – Práctica 7

En esta guía trataremos con flujos compresibles unidimensionales, o mejor dicho, flujos compresibles para los cuales la dependencia espacial es en una única coordenada, la misma en la que se produce el movimiento. En todos los casos trabajaremos con la hipótesis de fluido ideal, en el sentido que ignoraremos efectos viscosos. Por lo que tendremos un campo de velocidades de la forma

$$\vec{u} = u(x)\hat{x} \quad ,$$

sujeto a la ecuación de Euler

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \quad ,$$

y a la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad .$$

Desde el punto de vista de la termodinámica siempre podemos expresar $p = p(\rho, s)$, siendo s la entropía. Si no existen fuentes de disipación de energía, es decir que no hay intercambio de calor con otro medio, $\frac{ds}{dt} = 0$, y $p = p(\rho)$ (flujo barotrópico). En ese caso estamos en condiciones de reescribir la ecuación de Euler como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} \quad ,$$

donde hemos usado que $\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s = c^2$, siendo c la velocidad de propagación de las ondas de sonido (ondas de compresión). Veamos que las ecuaciones de Euler y continuidad pueden expresarse en forma vectorial para el vector $(\rho, u)^T$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} + A\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad A = \begin{bmatrix} u & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & u \end{bmatrix} \quad .$$

Para caracterizar el sistema observemos que los autovalores de A son $u+c$ y $u-c$, por lo que tenemos un sistema hiperbólico de primer orden 1-D.

Con este tipo de sistemas de ecuaciones puede trabajarse usando el método de las curvas características, curvas en el plano $x - t$ sobre las cuales los datos se propagan. La información, o condiciones iniciales, debería estar dada a lo largo de una curva $\mathcal{C}$ transversa (no tangente) a las curvas características, para poder propagar los datos iniciales en forma apropiada. Para ver cómo funciona el método, consideremos un caso un poco más general, $\vec{u} \in \Re^n$ y $A \in \Re^{n\times n}$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A(x, t, \vec{u})\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = 0 \quad .$$

Supongamos que la curva característica en el plano $x - t$ está parametrizada por $\mathcal{Q}$

$$\begin{cases} t = t(\mathcal{Q}) \\ \vec{u} = \vec{u}(\mathcal{Q}) \end{cases} \quad .$$

Entonces podemos expresar la derivada de $\vec{u}$ respecto del parámetro usando regla de la cadena

$$\frac{d\vec{u}}{d\mathcal{Q}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\frac{dt}{d\mathcal{Q}} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}\frac{dx}{d\mathcal{Q}} = \left[-A(x,t,\vec{u})\frac{dt}{d\mathcal{Q}} + \frac{dx}{d\mathcal{Q}}\right]\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \quad .$$

Podemos definir una curva característica como la curva que tiene la siguiente propiedad: si los datos son dados sobre esta curva, la ecuación diferencial **no** determina la solución en cualquier punto fuera de la característica. Por lo que si la característica no es paralela al eje x, esto significa que no podemos determinar $\partial_x \vec{u}$ del conocimiento de $\vec{u}$ sobre la curva. De la última ecuación se infiere que

$$-A(x,t,\vec{u})\frac{dt}{d\mathcal{Q}} + \frac{dx}{d\mathcal{Q}}\mathbb{I}$$

debe ser una matriz singular. Podemos elegir entonces

$$\frac{dt}{d\mathcal{Q}} = 1 \quad , \quad \frac{dx}{d\mathcal{Q}} = \lambda(x,t,\vec{u}) \quad ,$$

siendo $\lambda(x,t,\vec{u})$ los autovalores de $A(x,t,\vec{u})$. Por lo tanto hay N características a través de cada punto en el plano $x - t$, y estas características dependen de $\vec{u}$. Si $\mathcal{C}$ es una curva transversa a todas las características, entonces $-A(x,t,\vec{u})\frac{dt}{d\mathcal{Q}} + \frac{dx}{d\mathcal{Q}}\mathbb{I}$ será inversible

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \left[-A(x,t,\vec{u})\frac{dt}{d\mathcal{Q}} + \frac{dx}{d\mathcal{Q}}\right]^{-1}\frac{d\vec{u}}{d\mathcal{Q}} \quad ,$$

y podremos propagar $\vec{u}$ fuera de $\mathcal{C}$.

En general no debería esperarse que $\vec{u}$ fuera constante a lo largo de las características, pero podríamos buscar funciones $f_1, f_2 \ldots, f_n$ constantes a lo largo de las características asociadas con los autovalores $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$. Supongamos que podemos encontrar una función f asociada con el autovalor λ con la propiedad

$$A^T \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} \quad ,$$

entonces $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$ será un autovector de A^T. Afirmamos (no demostramos) que f es constante a lo largo de la característica correspondiente, tales funciones son denominadas invariantes de Riemann de la ecuación.

De encontrarse N funciones f_i constantes a lo largo de las características, entonces puede invertirse el problema para expresar $\vec{u}$ en términos de $\vec{f}$ y confiar en que será posible expresar explícitamente las características en término sólo de los datos iniciales.

Volviendo a las ecuaciones de dinámica de gases

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ u\end{pmatrix}+A\,\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\rho\\ u\end{pmatrix}=0\quad,\quad A=\begin{bmatrix}u & \rho\\ \frac{c^2}{\rho} & u\end{bmatrix}\quad,\quad \vec{u}=(\rho,u)\quad.$$

Los autovalores de A son $u\pm c$ y las características son las curvas

$$\mathcal{C}_+ : \frac{dx}{dt}=u+c\quad,\quad \mathcal{C}_- : \frac{dx}{dt}=u-c\quad.$$

Para encontrar los invariantes de Riemann recordemos que buscamos autovectores de A^T con autovalores $u\pm c$

$$\begin{bmatrix}u & \frac{c^2}{\rho}\\ \rho & u\end{bmatrix}\begin{pmatrix}h_\pm\\ k_\pm\end{pmatrix}=(u\pm c)\begin{pmatrix}h_\pm\\ k_\pm\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}h_\pm\\ k_\pm\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm\frac{c}{\rho}\\ 1\end{pmatrix}\quad.$$

En definitiva, los invariantes de Riemann serán

$$\Gamma_\pm=u\pm\int\frac{c(\rho)}{\rho}d\rho\quad.$$

$\Gamma_\pm$ son constantes a lo largo de las curvas características $\mathcal{C}_\pm$. Si por medio de algún método pudieran encontrase las características $\mathcal{C}_\pm$, luego las ecuaciones se resolverían así: desde (x,t), siguiendo las características $\mathcal{C}_\pm$ hacia la curva sobre la que se han prescripto los datos iniciales, de forma de determinar $\Gamma_\pm$ a través de la última ecuación. A partir de estos valores $\Gamma_\pm$ se determinan u y ρ, y el resultado será el valor de (u,ρ) en (x,t).

Definiciones útiles

- Estado de un gas: es un par de valores (u,ρ).
- Estado constante: es una región del plano $x-t$ en la cual ρ y u son constantes.
- Onda simple: es una región en el plano $x-t$ en la cual Γ_+ o Γ_- es constante.

A partir de estas definiciones, en una onda simple Γ_+, Γ_+ y Γ_- son ambas constantes a lo largo de la característica $\mathcal{C}_-$, por definición de Γ_-. A partir de la forma de $\Gamma_\pm$, u y c deben ser constantes también, por lo que $\mathcal{C}_-$ es una línea recta. Similarmente, en una onda simple Γ_-, $\mathcal{C}_+$ son líneas rectas. Veamos que a partir de lo que dedujimos se puede inferir otra propiedad importante. Supongamos que en el plano $x-t$ se tiene una cierta región $\mathcal{S}$ que es un estado constante el cual está limitado por una curva σ. Como c es no nula, entonces $\mathcal{C}_+$ y $\mathcal{C}_-$ no pueden ser paralelas en ningún punto, por lo que en un punto P sobre la curva σ al menos alguna de las dos características debe cruzar la curva. Supongamos que $\mathcal{C}_+$ es la que cruza, entonces Γ_+ es constante a lo largo de cada $\mathcal{C}_+$ y sobre toda la

región $\mathcal{S}$. Asumiendo que u y ρ son suaves, Γ_+ será constante sobre una región exterior a $\mathcal{S}$, entonces hay una región adyacente a $\mathcal{S}$ que es onda simple (Γ_+ o Γ_-). Si en algún punto a lo largo de σ, la otra característica $\mathcal{C}_-$ no es paralela a σ, debería cruzarla y por lo tanto Γ_- debería ser constante sobre una región adyacente a $\mathcal{S}$. Esta región debería ser otro estado constante. De todo esto se deduce que el límite de un estado constante debe estar dado por líneas rectas.
Ahora ya estamos en condiciones de pasar a resolver los primeros ejercicios.

Problema 1

Tenemos un gas politrópico con ecuación de estado $p\rho^{-\gamma}$ =constante, en reposo y con presión y densidad uniformes, p_0 y ρ_0 respectivamente. Sobre este estado base se tienen perturbaciones

$$\vec{v} = \delta v(x,t)\hat{x} \quad , \quad \rho = \rho_0 + \delta\rho(x,t) \quad , \quad p = p_0 + \delta p(x,t) \quad .$$

Estamos dentro del caso homoentrópico, vimos que en ese caso la ecuación de Euler nos queda

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} \quad ,$$

y la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad .$$

Reemplazando en estas ecuaciones v y ρ por las expresiones perturbadas, y quedándonos con el primer orden en las perturbaciones tenemos

$$\frac{\partial \delta v}{\partial t} = -\frac{c^2}{\rho_0}\frac{\partial \delta\rho}{\partial x} \quad ,$$

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial \delta v}{\partial x} = 0 \quad .$$

Derivando la última ecuación (continuidad) respecto del tiempo obtenemos

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} + \rho_0\frac{\partial^2 \delta v}{\partial t\partial x} = 0 \quad ,$$

pudiendo invertirse el orden de derivación en el segundo término y reemplazarse $\frac{\partial \delta v}{\partial t}$ usando la ecuación de Euler. Obtenemos en definitiva

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial x^2} = 0 \quad ,$$

que es una ecuación de ondas para $\delta\rho$ con velocidad de propagación c. Observemos que

$$c^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s = \frac{\gamma p}{\rho} \approx \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$$

Problema 3

En este problema se tiene gas inicialmente en reposo dentro de un tubo en el que se comienza a retirar un pistón con velocidad constante $-U$. Se tiene que $p = A\rho^\gamma$, e inicialmente (estado de reposo) $\rho = \rho_0$. A tiempo t, el gas que está mas allá de $x = c_0 t = \sqrt{A\gamma\rho_0^{\gamma-1}}t$, no se entera aún que el pistón está moviéndose, es decir, es gas no perturbado con $u = 0$ y $\rho = \rho_0$; tenemos un estado constante.
Los invariantes de Riemann en esta región que denominaremos ①, donde las características son rectas de pendiente $\pm c_0$, serán

$$\Gamma_\pm = \pm \int_a^{\rho_0} \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho = \text{constante} \quad .$$

La región adyacente a ① es una onda simple Γ_-, ya que las características $\mathcal{C}_-$ son las que atraviesan la recta $x = c_0 t$ que delimita la región constante ①. En la onda simple Γ_- las características $\mathcal{C}_+$ son líneas rectas. A esta región onda simple Γ_- le damos el nombre de región ②.
Por otro lado, el gas en contacto con el pistón se mueve con velocidad $u = -U$. Tomemos el estado $(-U, \rho_p)$ donde el índice p hace referencia al punto del plano $x - t$ que verifica $x_p = -Ut_p$, es decir que está sobre el pistón. Sabemos que las características $\mathcal{C}_-$ que emergen de la región ①, atraviesan la región ② y llegan hasta el pistón, por ello

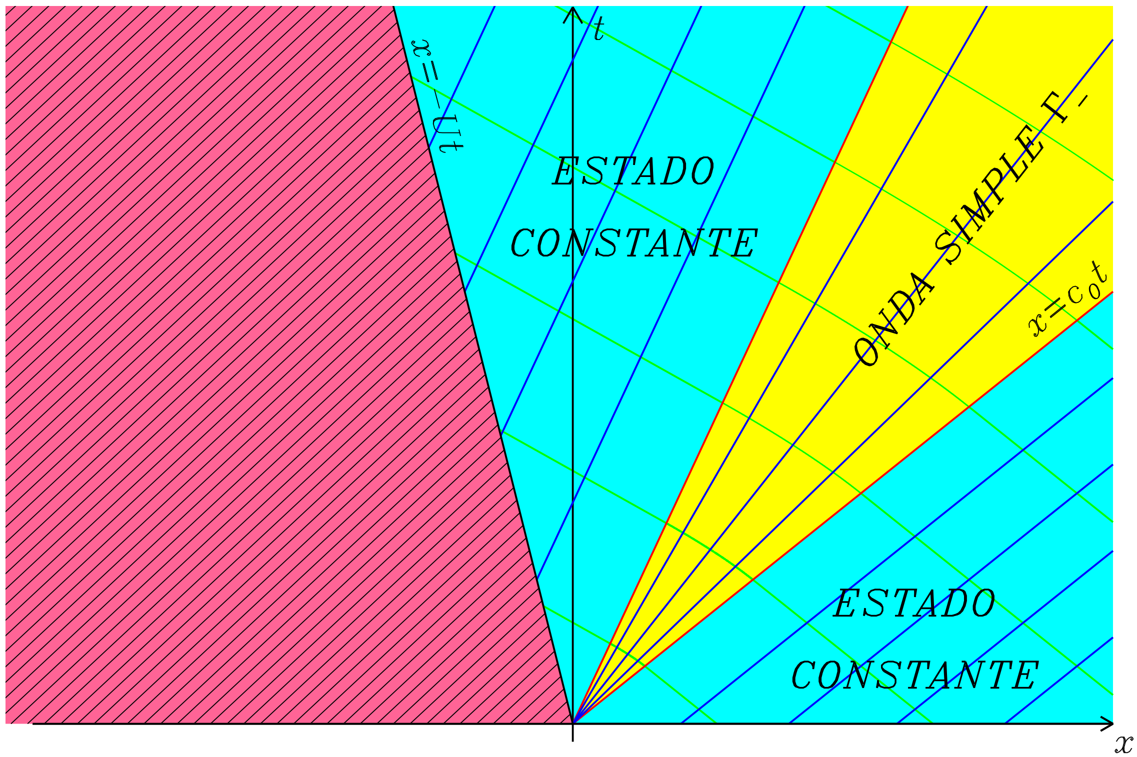
$$\Gamma_-(-U, \rho_p) = \Gamma_-(0, \rho_0) \Longrightarrow \int_a^{\rho_p} \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho = -[U + \Gamma_-(0, \rho_0)] = \text{constante} \quad .$$

Esto sólo es posible si ρ_p es constante a lo largo del camino del pistón (ya que $c(\rho)$ y ρ son positivos). Además, el invariante de Riemann Γ_+, el cual es igual a $-U - [U + \Gamma_-(0, \rho_0)$ sobre el camino del pistón, es una constante, independiente de la característica $\mathcal{C}_+$ que emerge del camino del pistón. Todo esto nos lleva a que existe un estado constante adyacente al pistón al que denominaremos región ③. El límite de esta región debe ser una recta característica $\mathcal{C}_+$ que sale del origen.
Como los límites de la región ② son dos $\mathcal{C}_+$ que se intersectan en el origen, todas las $\mathcal{C}_+$ de la región ② deben ser rectas que salen del origen.
Continuando con las definiciones, una onda simple cuyas rectas características se intersectan en un punto sobre el eje x se denomina una onda de *rarefacción* centrada. El término *rarefacción* hace referencia a una disminución de la densidad, el gas a pasar de ① a ③ a través de ② se *rarifica*, es decir, disminuye su densidad. Veamos que esto realmente es así

$$\int_{\rho_0}^{\rho_p} \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho = \int_a^{\rho_p} \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho - \int_a^{\rho_0} \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho = \int_a^{\rho_p} \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho + \Gamma_-(0, \rho_0) = -U < 0 \quad ,$$

y teniendo en cuenta que el integrando de la primera integral es siempere negativo, debe concluirse que $\rho_p < \rho_0$. Esto es perfectamente compatible con lo que intuitivamente se adivinaba, si el pistón se mueve hacia la izquierda, incrementando el volumen ocupado por el gas, en la región cercana al pistón el gas debe disminuir su densidad.
Todo lo expresado hasta aquí en cuanto a curvas características y las regiones en que se divide el

plano $x - t$ puede verse reflejado en el siguiente gráfico.



En esta figura las líneas azules corresponden a las características $\mathcal{C}_+$, mientras que las verdes corresponden a las $\mathcal{C}_-$. Cabe aclarar que en la región ② las curvas $\mathcal{C}_-$ deben calcularse en forma numérica (no se obtiene solución analítica).

Veamos que a partir de la ecuación de estado, podemos encontrar expresiones para las funciones de Riemann en función de u y de c

$$\Gamma_\pm = u \pm \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho = u \pm \int \frac{\sqrt{\gamma A \rho^{\gamma-1}}}{\rho} d\rho = u \pm \sqrt{\gamma A \rho^{\gamma-1}} \frac{2}{\gamma - 1} = u \pm \frac{2c}{\gamma - 1} \quad .$$

Ya tenemos resuelto el problema para la región ①

$$u_{①} = 0 \quad , \quad \rho_{①} = \rho_0 \quad , \quad p_{①} = A\rho_0^\gamma \quad , \quad c_{①} = \sqrt{\gamma A \rho_0^{\gamma-1}} \quad .$$

Ahora encontremos analíticamente los valores de u y ρ en las regiones ② y ③ y la ecuación de la característica $\mathcal{C}_+$ que separa dichas regiones. Arranquemos con ③, que por ser un estado constante es más sencillo de evaluar

$$u_{①} = -U \Longrightarrow \Gamma_-^{③} = -U - \frac{2c_{③}}{\gamma - 1} = \Gamma_-^{①} = -\frac{2}{\gamma - 1}\sqrt{\gamma A \rho_0^{\gamma-1}} \quad ,$$

a partir de lo cual

$$c_{③} = \sqrt{\gamma A \rho_0^{\gamma-1}} - \frac{\gamma-1}{2}U = \sqrt{\gamma A \rho_{③}^{\gamma-1}} \Longrightarrow \rho_{③} = \left[\frac{1}{A\gamma}\left(\sqrt{\gamma A \rho_0^{\gamma-1}} - \frac{\gamma-1}{2}U\right)^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad ,$$

y de la última expresión es inmediato hallar $p_{③}$.

Antes de tener en cuenta los valores que adoptan las magnitudes físicas en la región ② notemos que la característica que la separa de la región ③ es

$$\mathcal{C}_+ : \quad x = (-U + c_{③})t = \left[-U + c_0 - U\frac{(\gamma-1)}{2}\right]t = \left[c_0 - U\frac{(\gamma+1)}{2}\right]t \quad .$$

Deberíamos tener en cuenta además que como $c_{③}$ es positivo, nuestro tratamiento es válido si $U < 2c_0/(\gamma-1)$. En la región ②

$$\mathcal{C}_+ : \quad \frac{x}{t} = u_{②} + c_{②} \quad , \quad \Gamma_-^{②} = u_{②} - \frac{2}{\gamma-1}c_{②} = \Gamma_-^{①} = -\frac{2}{\gamma-1}c_0 \quad ,$$

a partir de lo cual, despejando $c_{②}$

$$c_{②}(x,t) = \left(\frac{2}{\gamma-1}c_0 + \frac{x}{t}\right)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) \quad .$$

A su vez, también podemos despejar la velocidad del gas en la región ②

$$u_{②}(x,t) = \frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{x}{t} - c_0\right) \quad .$$

Finalmente, podemos hallar el valor de la densidad en esta región

$$\rho_{②}(x,t) = \left[\frac{1}{A\gamma}\left(\frac{2}{\gamma-1}c_0 + \frac{x}{t}\right)^2\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad .$$