



## Cinemática y dinámica de fluidos

13 de agosto de 2021

### 1. Descripciones eulerianas y lagrangianas

En este curso, vamos a considerar a un fluido como un continuo. Sin embargo, para introducir los dos grandes sistemas para la descripción del movimiento de una masa fluida, conviene pensar a la misma como compuesto de “elementos” de fluido.

Una descripción euleriana<sup>1</sup> consiste en definir un sistema de coordenadas fijo en el espacio. En algún instante  $t$ , el punto denotado por las coordenadas  $\mathbf{x}$  estará ocupado por algún elemento de fluido, el cual se estará moviendo con velocidad  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . Nótese que los elementos de fluido que ocupan una misma posición  $\mathbf{x}$  en distintos tiempos son, en general, distintos.

En una descripción lagrangiana<sup>2</sup>, por el contrario, asignamos una etiqueta  $\mathbf{q}$  a cada elemento de fluido. En general, un mismo elemento de fluido ocupará distintas posiciones en el espacio en momentos distintos. Ver fig. (1).

<sup>1</sup>Llamada así por Leonhardt Euler (1707-1783). Ver fig. (21))

<sup>2</sup>Llamada así por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).



Figura 1: En una descripción Euleriana, la posición del surfista depende del tiempo; en cambio, sus coordenadas lagrangianas permanecen constantes

Digamos que la partícula de coordenadas lagrangianas  $\mathbf{q}$  ocupa, en el instante  $t$ , el punto en el espacio  $\mathbf{x}(\mathbf{q}, t)$ , que son sus coordenadas eulerianas. Para traducir una descripción en la otra, asumimos que ambas coinciden en algún instante inicial, digamos  $t = 0$

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, 0) = \mathbf{q} \quad (1)$$

Tanto un observador euleriano como uno lagrangiano coinciden respecto a qué velocidad tienen las partículas del fluido. Esa condición se expresa por la identidad

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{v}[\mathbf{x}(\mathbf{q}, t), t] \quad (2)$$

Al moverse, van a cambiar sus coordenadas eulerianas, de modo tal que

$$\frac{d\mathbf{x}(\mathbf{q}, t)}{dt} = \mathbf{v}[\mathbf{x}(\mathbf{q}, t), t] \quad (3)$$

Derivando esta identidad respecto a  $\mathbf{q}$ , encontramos<sup>3</sup>

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial q^k} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial q^k} \quad (4)$$

Esta ecuación, con la condición inicial que se deduce de (1)

$$\frac{\partial x^i}{\partial q^k}(t = 0) = \delta_k^i \quad (5)$$

determina la transformación de las coordenadas lagrangianas en eulerianas, si se conoce el campo de velocidades  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ .

### 1.0.1. Ejemplo: Los panqueques de Zel'dovich

Por ejemplo, supongamos un fluido en que cada partícula se mueve con velocidad uniforme, independiente de los otros elementos de fluido. En una descripción lagrangiana, diríamos que la partícula  $\mathbf{q}$  tiene velocidad  $\mathbf{v}(\mathbf{q})$ , independiente del tiempo. En  $t = 0$ , la partícula ocupa la posición  $\mathbf{x}(\mathbf{q}, 0) = \mathbf{q}$ , de acuerdo con (1). Entonces en el instante  $t$

<sup>3</sup>En este curso vamos a utilizar la *convención de Einstein*: cuando un índice aparece repetido en una expresión, se sobreentiende que debe sumarse sobre todo su rango de valores. Por lo tanto, en la fórmula (4) el índice  $j$  debe ir sumado desde  $j = 1$  hasta  $j = 3$ . Por supuesto, la convención se llama así por Albert Einstein (1879-1955).

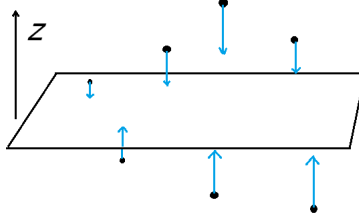


Figura 2: Panqueque de Zel'dovich. Todas las partículas del fluido tienden al plano  $z = 0$ , con una velocidad constante proporcional al valor inicial de la coordenada  $z$

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{q} + \mathbf{v}[\mathbf{q}] t \quad (6)$$

Si conocemos la función  $\mathbf{v} = \mathbf{v}[\mathbf{q}]$ , podemos invertir esta relación y encontrar la coordenada Lagrangiana  $\mathbf{q}$  como función de la coordenada euleriana  $\mathbf{x}$ .

Para continuar con el ejemplo, supongamos que

$$v_z = -v \frac{q_z}{\ell} \quad (7)$$

con  $v_x = v_y = 0$  (ver fig. (2)).

Entonces, escribiendo  $\mathbf{x} = (x, y, z)$

$$\begin{aligned} x &= q_x \\ y &= q_y \\ z &= \left(1 - \frac{v}{\ell} t\right) q_z \end{aligned} \quad (8)$$

Nótese que en el instante  $t = \ell/v$  la totalidad del fluido ha colapsado al plano  $z = 0$ , independientemente de la posición inicial de las partículas.

Yakov Zel'dovich (1914-1987) propuso este modelo como el primer paso en la formación de una galaxia.

## 2. La ecuación de continuidad

Supongamos que un cierto número de partículas ocupa un volumen  $d^3q$  en coordenadas lagrangianas, y su masa total es  $\rho(\mathbf{q}) d^3q$ . Como corresponde a la descripción lagrangiana, tanto el volumen  $d^3q$  como la densidad  $\rho(\mathbf{q})$  son independientes del tiempo. Ahora, estas mismas partículas ocupan, en la descripción euleriana, un volumen  $d^3x = J d^3q$ , donde (ver fig. (3))

$$J = \left| \det \frac{\partial x^i}{\partial q^k}(t) \right| \quad (9)$$

es el Jacobiano de la transformación de las coordenadas eulerianas en las lagrangianas. Como la masa del elemento de fluido es la misma en ambas descripciones, debemos tener

$$\rho[\mathbf{x}(\mathbf{q}, t), t] d^3x = \rho[\mathbf{q}] d^3q \quad (10)$$

y reemplazando  $d^3x = J d^3q$  tenemos que

$$\rho[\mathbf{x}(\mathbf{q}, t), t] J = \text{constante} \quad (11)$$

o bien, derivando respecto del tiempo

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) J + \rho \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

donde ya sabemos que  $dx^i/dt = v^i$ .

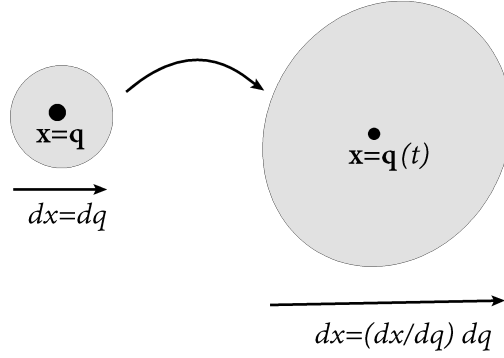


Figura 3: Inicialmente, el volumen de un elemento de fluido es el mismo en coordenadas eulerianas o lagrangianas. En cualquier otro instante, el volumen en coordenadas lagrangianas permanece constante, mientras que en coordenadas eulerianas no.

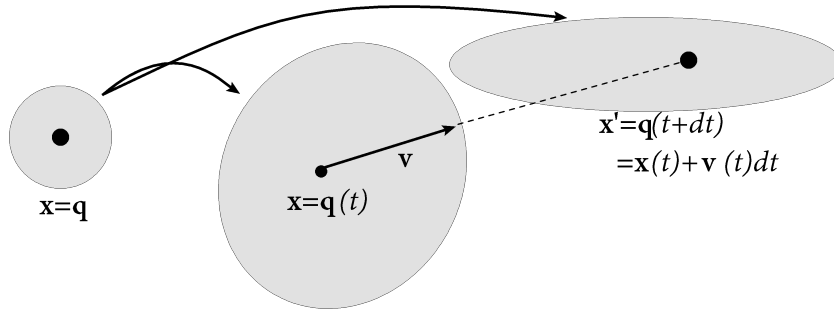


Figura 4: La evolución desde  $t = 0$  hasta  $t + dt$  es la composición de la evolución hasta  $t$  y la evolución entre  $t$  y  $t + dt$ .

### 2.0.1. Interludio matemático

Para calcular  $\partial J/\partial t$  vamos a comparar  $J(t)$  con  $J(t + dt)$ . Consideramos que las partículas con coordenadas lagrangianas  $\mathbf{q}$  están en el punto  $\mathbf{x}$  en  $t$  y en  $\mathbf{x}'$  en  $t + dt$  (ver fig. (4)). Entonces

$$\frac{\partial x'^i}{\partial q^k} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial q^k} \quad (13)$$

Tomando determinantes en ambos miembros vemos que

$$J(t + dt) = J(t) \det \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \quad (14)$$

Pero

$$x'^i = x^i + v^i dt \quad (15)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} &= \delta_j^i + dt \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + dt \frac{\partial v_x}{\partial x} & dt \frac{\partial v_x}{\partial y} & dt \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ dt \frac{\partial v_y}{\partial x} & 1 + dt \frac{\partial v_y}{\partial y} & dt \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ dt \frac{\partial v_z}{\partial x} & dt \frac{\partial v_z}{\partial y} & 1 + dt \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

Haciendo la cuenta es fácil ver que

$$\det \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = 1 + dt \nabla \cdot \mathbf{v} + O(dt^2) \quad (17)$$

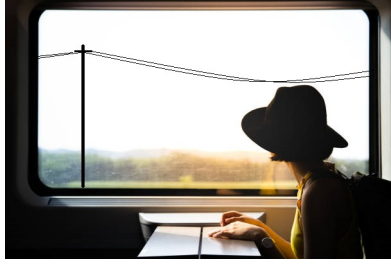


Figura 5: Una variación en el espacio convertida en una variación en el tiempo.

Despreciando los términos de orden superior

$$J(t + dt) - J(t) = J \nabla \cdot \mathbf{v} dt \quad (18)$$

O sea que

$$\frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (19)$$

(fin del interludio matemático)

Volviendo a la ecuación (12), encontramos la *ecuación de continuidad*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x^i} v^i + \rho \frac{\partial v^i}{\partial x^i} = 0 \quad (20)$$

Esta ecuación se suele escribir de dos maneras equivalentes: por un lado

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (21)$$

a la que vamos a volver más adelante, y por otro

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (22)$$

donde hemos introducido la *derivada material*

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho \quad (23)$$

que consiste en derivar respecto del tiempo manteniendo fijas las coordenadas lagrangianas<sup>4</sup>

Esta segunda manera de escribir la ecuación de continuidad (20) enfatiza que hay dos mecanismos por los cuales la densidad puede variar: porque es, efectivamente, dependiente del tiempo, o porque al transcurrir el tiempo una misma posición en el espacio es ocupada por distintos elementos de fluido, de modo que una variación en el espacio se convierte en una variación en el tiempo (ver (fig. (5))).

## 2.0.2. Panqueques de Zel'dovich (II)

Volviendo al ejemplo del fluido que colapsa sobre un plano, a partir de la transformación (8) encontramos

$$J = 1 - \frac{v}{\ell} t \quad (25)$$

y por lo tanto

---

<sup>4</sup>En la ecuación (23) el operador

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla &= v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= v^x \frac{\partial}{\partial x} + v^y \frac{\partial}{\partial y} + v^z \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (24)$$

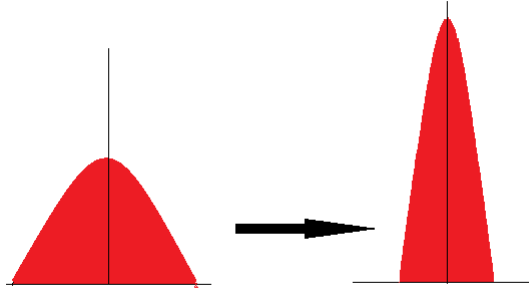


Figura 6: La evolución de la densidad de un panqueque de Zel'dovich. El área bajo la curva permanece constante, lo cual refleja la conservación de la masa.

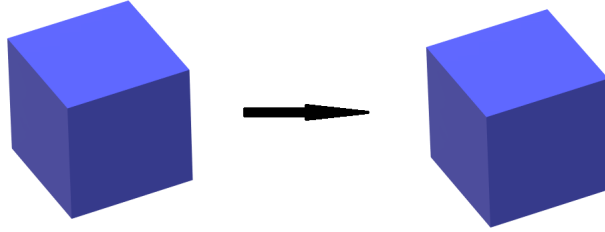


Figura 7: El efecto de una traslación rígida sobre un elemento de fluido.

$$\rho[\mathbf{x}, t] = \frac{\rho[\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)]}{1 - \frac{v}{\ell}t} = \frac{\rho\left[\left(x, y, \frac{z}{1 - \frac{v}{\ell}t}\right), 0\right]}{1 - \frac{v}{\ell}t} \quad (26)$$

que no sorprendentemente explota en  $t = \ell/v$  (ver fig. (6)).

Derivando respecto del tiempo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{v}{\ell} \frac{\rho\left[\left(x, y, \frac{z}{1 - \frac{v}{\ell}t}\right), 0\right]}{\left(1 - \frac{v}{\ell}t\right)^2} + z \frac{v}{\ell} \frac{\rho_{,z}\left[\left(x, y, \frac{z}{1 - \frac{v}{\ell}t}\right), 0\right]}{\left(1 - \frac{v}{\ell}t\right)^3} \quad (27)$$

mientras que derivando respecto de  $z$

$$\frac{\partial \rho[\mathbf{x}, t]}{\partial z} = \frac{\rho_{,z}\left[\left(x, y, \frac{z}{1 - \frac{v}{\ell}t}\right), 0\right]}{\left(1 - \frac{v}{\ell}t\right)^2} \quad (28)$$

Por otro lado, de la ecuación (7) tenemos que

$$v^z = -\frac{v}{\ell} \frac{z}{1 - \frac{v}{\ell}t} \quad (29)$$

con lo cual podemos verificar fácilmente la ecuación de continuidad.

### 3. Cinemática de fluidos

En esta sección vamos a discutir como es posible deducir características del flujo de un fluido a partir de propiedades locales del campo de velocidades.

Dada la velocidad  $\mathbf{v}$  en un punto, el flujo más simple que podemos imaginar sería una traslación rígida, en que todos los puntos del fluido fluyen con la misma velocidad (ver fig. (7)).

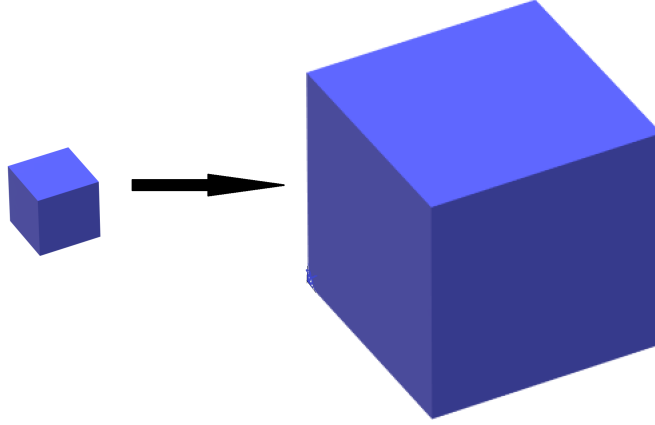


Figura 8: El efecto de un flujo con divergencia no nula pero sin rotor ni tensor de corte sobre un elemento de fluido.

Los apartamientos de este flujo básico estarán descriptos, en primer lugar, por las nueve derivadas primeras  $\partial v^i / \partial x^j$  en el mismo punto. Es habitual agrupar estas derivadas en

- a) Un escalar, la *divergencia* de la velocidad

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \quad (30)$$

- b) Un (pseudo) vector, la *vorticidad*

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (31)$$

o en componentes

$$\omega^i = \epsilon^{ijk} \partial_j v_k \quad (32)$$

- c) Un tensor simétrico de traza nula, el *tensor de corte* o *tensor de deformaciones*

$$\sigma_{jk} = \partial_j v_k + \partial_k v_j - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (33)$$

Puesto que la divergencia da cuenta de un grado de libertad, la vorticidad de 3 y el tensor de deformaciones de 5, entre los tres dan cuenta de las nueve derivadas primeras.

Como ya hemos visto (ver la ecuación (20)) la divergencia está asociada a flujos con cambios en la densidad del fluido (ver fig. (8)).

Un fluido con divergencia nula corresponde a densidad constante, se dice que es un flujo *incompresible*.

La vorticidad está asociada a una rotación rígida alrededor del punto de referencia, que tomamos como  $\mathbf{x} = 0$  (ver fig. (9)).

Efectivamente, en una rotación rígida con velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega}$ , el campo de velocidades alrededor del origen es

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} \quad (34)$$

o en componentes

$$v^i = \epsilon^{ijk} \Omega^j x^k \quad (35)$$

y la vorticidad

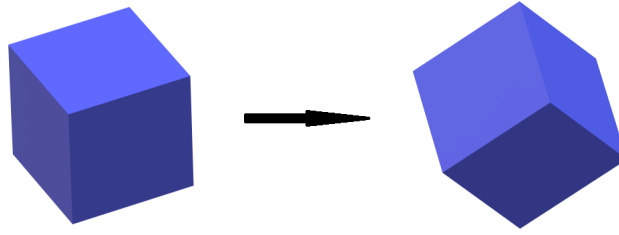


Figura 9: El efecto de un flujo con rotor no nulo pero sin divergencia ni tensor de corte sobre un elemento de fluido.

$$\begin{aligned}
 \omega^i &= \epsilon^{ijk} \partial_j \epsilon_{klm} \Omega^l x^m \\
 &= \epsilon^{ijk} \epsilon_{klj} \Omega^l \\
 &= 2\Omega^i
 \end{aligned} \tag{36}$$

Un flujo con vorticidad nula se dice *irrotacional* o *potencial* ya que, como el campo electroestático en Física 3, la condición de vorticidad nula indica que el campo de velocidades se puede escribir como el gradiente de un escalar,  $\mathbf{v} = \nabla\phi$ .

### 3.0.1. Otro interludio matemático

Supongamos una curva cerrada

$$\Gamma = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda), 0 \leq \lambda \leq \Lambda, \mathbf{x}(\Lambda) = \mathbf{x}(0)\} \tag{37}$$

El elemento de longitud sobre la curva es

$$d\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} d\lambda \tag{38}$$

y es tangente a la curva en todo punto. Dado un campo vectorial  $\mathbf{v}$ , la circulación alrededor de  $\Gamma$  es

$$\mathcal{C} = \oint_{\Gamma} d\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \tag{39}$$

El Teorema de Stokes<sup>5</sup> afirma que  $\mathcal{C}$  es igual al flujo del rotor  $\nabla \times \mathbf{v}$  a través de cualquier superficie  $\mathcal{S}$  cuyo borde sea  $\Gamma$ .

Si  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ , entonces la circulación de  $\mathbf{v}$  sobre cualquier curva cerrada es cero. Entonces yo puedo definir un potencial  $\phi$  para  $\mathbf{v}$ <sup>6</sup>. Por ejemplo, puedo definir  $\phi(\mathbf{0}) = 0$ , y  $\phi(\mathbf{x})$  como la circulación de  $\mathbf{v}$  sobre alguna curva que empiece en  $\mathbf{0}$  y termine en  $\mathbf{x}$ . Como cualquier curva da lo mismo, puedo elegir un segmento recto  $\mathbf{x}(\lambda) = \lambda\mathbf{x}$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ , es decir

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_0^1 d\lambda \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}(\lambda\mathbf{x}) \tag{40}$$

Se puede verificar explícitamente que si  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ , entonces  $\nabla\phi = \mathbf{v}$ . Efectivamente

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}) &= \int_0^1 d\lambda [(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\lambda(\mathbf{x} + d\mathbf{x})) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}(\lambda\mathbf{x})] \\
 &\approx dx^i \left\{ \int_0^1 d\lambda [v_i(\lambda\mathbf{x}) + x^j \lambda v_{j,i}(\lambda\mathbf{x})] \right\}
 \end{aligned} \tag{41}$$

Como  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ , en el segundo término podemos reemplazar  $v_{j,i}$  por  $v_{i,j}$ . Pero

<sup>5</sup>Llamado así por George Stokes (1819-1903)

<sup>6</sup>Este resultado es el *Lema de Poincaré*, llamado así por Henri Poincaré (1854-1912)



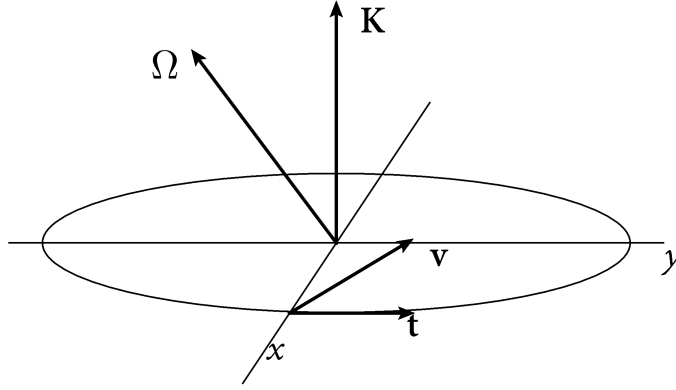


Figura 10: La circulación del campo de velocidades de la rotación rígida (34) alrededor del círculo  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

$$\lambda x^j v_{i,j}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \frac{d}{d\lambda} v_i(\lambda \mathbf{x}) \quad (42)$$

de manera que podemos integrar por partes y encontrar que

$$\phi(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}) = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \quad (43)$$

como queríamos demostrar.

Viceversa, si  $\mathbf{v}$  deriva de un potencial,  $\nabla \times \mathbf{v}$  necesariamente vale cero.

Por ejemplo, consideremos el círculo  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  y el campo de velocidades de una rotación rígida (34) (ver fig. (10)). Entonces  $d\mathbf{t} = r d\varphi \hat{\mathbf{K}} \times \hat{\mathbf{r}}$ . Ocurre que

$$\left( \hat{\mathbf{K}} \times \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot (\Omega \times \hat{\mathbf{r}}) = \hat{\mathbf{K}} \cdot \Omega \quad (44)$$

porque sobre el círculo  $\hat{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$ , y entonces

$$\mathcal{C} = 2\pi r^2 \hat{\mathbf{K}} \cdot \Omega = \pi r^2 \hat{\mathbf{K}} \cdot \omega \quad (45)$$

tal como lo predice el Teorema de Stokes.

Vale la pena aclarar que nos tomamos todo este trabajo porque la diferencia que hace la presencia o no de vorticidad en un flujo es uno de los temas principales en todo el curso.

(fin del otro interludio matemático)

Volvamos al tercero de los patrones de flujo básicos.

Por descarte, el tensor de deformaciones describe un flujo sin cambio de densidad y sin rotación neta alrededor del punto de referencia (ver fig. (11)).

Como  $\sigma_{ij}$  es un tensor simétrico, es posible elegir los ejes coordenados de tal manera que sea diagonal (decimos que son los *ejes principales* del tensor), y como tiene traza nula, los elementos de la diagonal no pueden ser todos del mismo signo. Además, si la vorticidad es nula, el flujo es potencial, y si la divergencia es nula, el potencial debe ser una función armónica (es decir, solución de la ecuación de Laplace,  $\Delta\phi = 0$ ).

En las figuras (12), (13) y (14) reiteramos los patrones típicos del campo de velocidades en estos tres flujos básicos.

## 4. Dinámica de fluidos

Las ecuaciones de movimiento de un fluido se expresan como un conjunto de leyes de conservación.

Supongamos que cada partícula del fluido posee una cierta cantidad de una cierta magnitud aditiva  $X$ . Entonces la cantidad de  $X$  en un volumen  $d^3x$  va a ser proporcional al volumen,  $dX = \xi d^3x$ , y la cantidad de  $X$  en un volumen finito (que llamamos el *volumen de control*) se calcula por aditividad

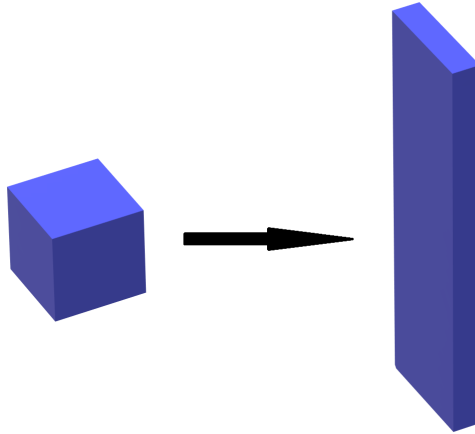


Figura 11: El efecto de un flujo con tensor de corte no nulo pero sin divergencia ni rotor sobre un elemento de fluido.

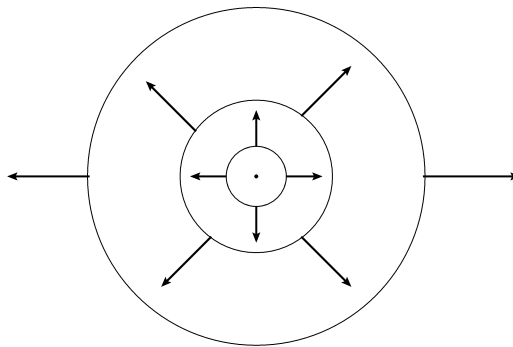


Figura 12: Patrón típico del campo de velocidades en un flujo con divergencia no nula pero sin rotor ni tensor de corte. Se trata de un flujo potencial con potencial  $\phi \propto x^2 + y^2$

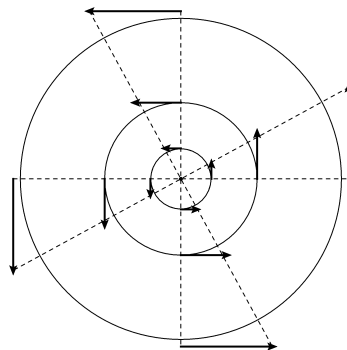


Figura 13: Patrón típico del campo de velocidades en un flujo con rotor no nula pero sin divergencia ni tensor de corte.

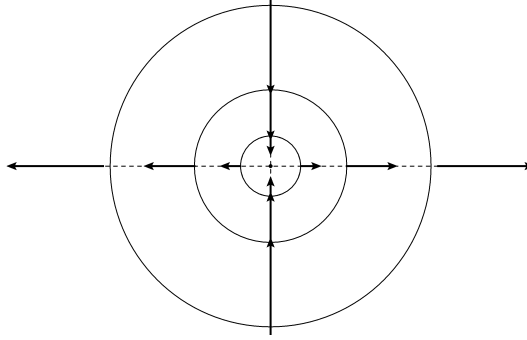


Figura 14: Patrón típico del campo de velocidades en un flujo con tensor de corte no nulo pero sin divergencia ni rotor. El potencial que genera el campo de velocidades es  $\phi \propto x^2 - y^2$



Figura 15: Los dos mecanismos que inducen una variación de la cantidad  $X$ : izquierda: creación en el volumen; derecha: flujo a través de la frontera.

$$X = \int_V d^3x \xi \quad (46)$$

Ahora nos preguntamos por los mecanismos por los cuales la cantidad  $X$  puede variar en el tiempo

$$\frac{dX}{dt} = \int_V d^3x \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (47)$$

Básicamente hay dos. Puede ser que una cierta cantidad  $f$  de  $X$  se cree (o se destruya) por unidad de volumen y de tiempo dentro del volumen de control, o bien puede ser que una cantidad de  $X$  abandone el volumen de control a través de su frontera  $\delta V$  (ver fig. (15)).

El primer mecanismo produce un cambio en  $X$  de

$$dX_1 = \int_V d^3x f dt \quad (48)$$

Podemos imaginar dos maneras en que  $X$  se intercambie a través de  $\delta V$ . Podría ser que haya partículas atravesando la frontera, y que *transporten* cada una una cantidad de  $X$ , o bien otro mecanismo que no involucre el transporte de partículas.

Supongamos un elemento de área  $d\mathbf{A}$  en la frontera  $\delta V$ . El elemento de área está caracterizado por su magnitud  $dA$  y por la normal  $\mathbf{n}$  exterior a  $V$ . Para que una partícula con velocidad  $\mathbf{v}$  atravesase el elemento de área en un lapso  $dt$ , debe estar ubicada a una distancia no mayor que  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dt$  de la frontera, ya que  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$  es la componente de la velocidad en la dirección a la frontera (ver fig. (16)). Si  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} > 0$  la partícula sale de  $V$ , y en caso contrario entra en  $V$ .

Todo el volumen  $dA \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dt$  es transportado dentro o fuera de  $V$  en el lapso  $dt$ , y por lo tanto el cambio neto en  $X$  es

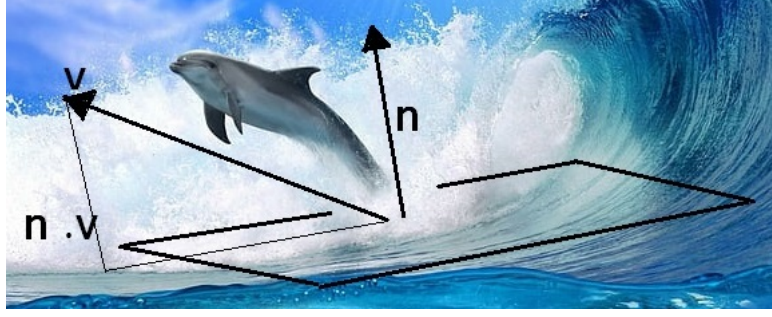


Figura 16: El delfín se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$ , pero su velocidad normal a la superficie es  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$ . Para poder salir del agua en un intervalo  $dt$  debe hallarse a una profundidad no mayor que  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dt$ .

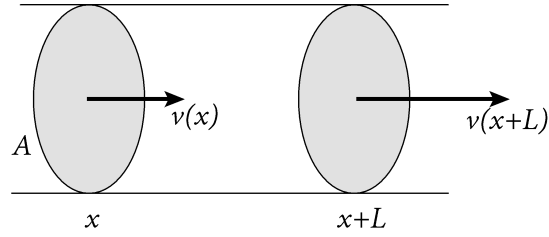


Figura 17: El teorema de Gauss en una dimensión. Consideramos la variación en la cantidad de fluido comprendida entre las posiciones  $x$  y  $x + L$  en un cilindro de área transversa  $A$ . El fluido que entra por la tapa en  $x$  es  $v(x) \rho(x) A dt$ . El fluido que sale por la tapa en  $x + L$  es  $v(x + L) \rho(x + L) A dt$ . Por lo tanto la variación neta en la masa de fluido es  $A dt (v(x) \rho(x) - v(x + L) \rho(x + L)) = -A dt \int_x^{x+L} dx \frac{d(v\rho)}{dx}$

$$dX_2 = - \int_{\partial V} \mathbf{dA} \cdot \mathbf{v} \xi dt \quad (49)$$

que por el Teorema de Gauss<sup>7</sup> (ver fig. (17)) se puede convertir en una integral de volumen

$$dX_2 = - \int_V d^3x \nabla \cdot (\xi \mathbf{v}) dt \quad (50)$$

Finalmente, asumimos que la variación de  $X$  debida a otras acciones en la frontera también es extensiva, y por lo tanto se puede escribir como la suma de las variaciones por unidad de tiempo en cada elemento de área

$$dX_3 = \int_{\partial V} \mathbf{dA} \cdot \mathbf{j} dt \quad (51)$$

que también se puede convertir en una integral de volumen por el teorema de Gauss.

En resumen, en un lapso  $dt$  tenemos  $dX = dX_1 + dX_2 + dX_3$ , y dividiendo ambos términos por  $dt$ , finalmente

$$\int_V d^3x \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla \cdot (\xi \mathbf{v}) - f - \nabla \cdot \mathbf{j} \right\} = 0 \quad (52)$$

y como el volumen de control es arbitrario, obtenemos la ecuación de conservación

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla \cdot (\xi \mathbf{v}) = f + \nabla \cdot \mathbf{j} \quad (53)$$

Es fácil ver que si ponemos  $\xi = \rho$ ,  $f = \mathbf{j} = 0$ , recuperamos la ecuación de continuidad (20).

La otra ley de conservación que nos interesa es la del impulso. También existen leyes de conservación para el impulso angular y para la energía. Esta última es un poco más complicada, ya que implica introducir elementos de termodinámica, que discutiremos en un apéndice.

<sup>7</sup>Llamado así por Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

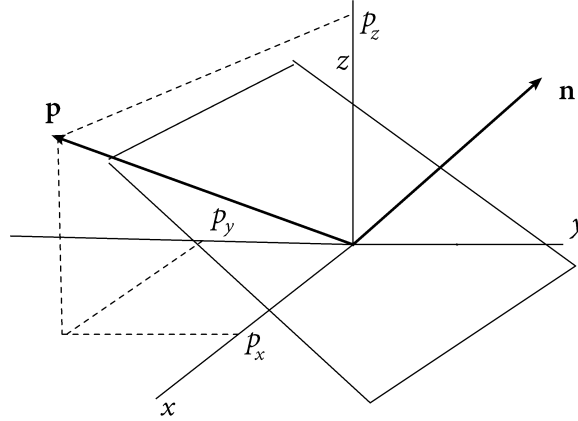


Figura 18: Cada una de las componentes  $(p_x, p_y, p_z)$  del momento transmitido a través de un elemento de superficie en un intervalo  $dt$  es proporcional al área  $dA$ , al lapso  $dt$ , y una combinación lineal de las tres componentes de la normal  $(n_x, n_y, n_z)$ . Estas tres combinaciones lineales se pueden escribir como una única ecuación matricial  $p^j = -dA dt T^{jk} n_k$ .

#### 4.1. Conservación del impulso

La ley de conservación del impulso sigue el esquema que hemos discutido, excepto que la cantidad  $\xi$  es ahora de carácter vectorial. Efectivamente, el impulso total en un elemento de volumen  $d^3x$  es  $d\mathbf{p} = \rho \mathbf{v} d^3x$ .

Por eso, cuando hablamos de la cantidad de impulso que atraviesa un elemento de área  $d\mathbf{A}$ , tenemos que discriminar de qué componente del impulso estamos hablando. En general, la cantidad de impulso en la dirección  $j$  que atraviesa el elemento de área  $d\mathbf{A}$  por unidad de tiempo se puede escribir como  $-dA n_k T^{jk} dt$ . Puesto que tanto el impulso como  $\mathbf{n}$  son cantidades vectoriales,  $T^{ij}$  es un tensor (ver fig. (18)).

El tensor  $T^{jk}$  tiene una parte debida al transporte, que por analogía con el  $\xi \mathbf{v}$  de la discusión previa podemos escribir como

$$T_{transporte}^{jk} = (\rho v^j) v^k \quad (54)$$

Pero además, el impulso de un elemento de fluido cambia debido a la acción de fuerzas sobre ese elemento. Las fuerzas externas las vamos a contabilizar dentro del término de creación  $\mathbf{f}$ . Respecto de las fuerzas internas, vamos a asumir que son de corto alcance, centrales, y que obedecen el principio de acción y reacción. Entonces las fuerzas entre elementos de fluido en el interior del volumen de control no aportan al cambio total en el impulso, y sólo debemos ocuparnos de las fuerzas actuando sobre la frontera  $\delta V$ .

Estas fuerzas las vamos a clasificar por el momento en dos clases: las fuerzas de presión, y todas las demás. La fuerza de presión obedece el *Principio de Pascal*<sup>8</sup>: la fuerza de presión sobre el elemento de área  $d\mathbf{A}$  tiene la dirección de la normal  $\mathbf{n}$ . Para que ésto sea posible debe ser

$$T_{presion}^{jk} = p \delta^{jk} \quad (55)$$

Como este tensor es idéntico a sí mismo cualquiera sean los ejes coordenados, decimos que la presión es *isótropa* (ver fig. (19)).

Finalmente, reunimos todas las otras fuerzas entre partículas en un *tensor de esfuerzos*

$$T_{otras\ fuerzas\ internas}^{jk} = \tau^{jk} \quad (56)$$

De este modo, la ley de conservación del impulso resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v^j + \frac{\partial}{\partial x^k} [\rho v^j v^k + p \delta^{jk} + \tau^{jk}] = f^j \quad (57)$$

O, desarrollando la primer derivada y usando la ley de conservación para  $\rho$

$$\frac{\partial}{\partial t} v^j + v^k \frac{\partial}{\partial x^k} v^j = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau^{jk}}{\partial x^k} + \frac{1}{\rho} f^j \quad (58)$$

<sup>8</sup>Llamado así por Blaise Pascal (1623-1662).

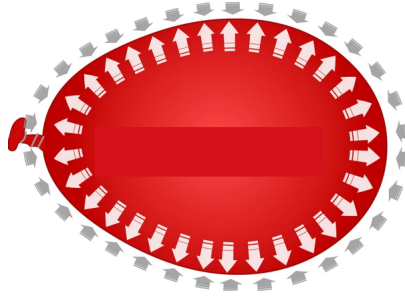


Figura 19: Principio de Pascal: la fuerza de presión sobre un elemento de superficie es siempre en la dirección de la normal a ese elemento.

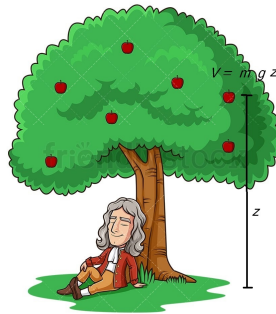


Figura 20: La energía potencial es  $V = mgz$ . El potencial gravitatorio es la energía por unidad de masa  $\Phi = gz$ , y  $\nabla\Phi = g\mathbf{K}$

En el caso más general, la fuerza externa  $\mathbf{f}$  es simplemente el peso del fluido,  $\mathbf{f} = -\rho\nabla\Phi$ , donde  $\Phi$  es el potencial gravitatorio (ver fig. (20)).

Decimos que un fluido es *ideal* si  $\tau^{jk} = 0$ . Para un fluido ideal sujeto a su propio peso, la ecuación (60) se convierte en la *ecuación de Euler* (ver fig. (21)).

$$\frac{\partial}{\partial t} v^j + v^k \frac{\partial}{\partial x^k} v^j = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} \quad (59)$$

## 4.2. Conservación del impulso angular

Para simplificar la discusión, supongamos que no hay fuerzas externas,  $\mathbf{f} = 0$ . Como estamos suponiendo que las fuerzas entre partículas son centrales, el impulso angular debe conservarse. Además, vamos a suponer



Figura 21: Leonhardt Euler (1707-1783)

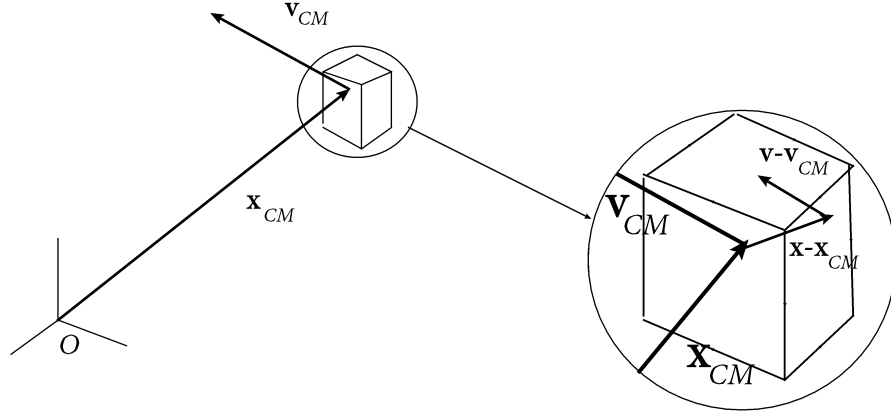


Figura 22: El momento angular siempre se puede descomponer en el momento debido a la traslación del centro de masa y el momento debido al movimiento alrededor del centro de masa. Pero si las partículas que componen el fluido no tienen un momento angular intrínseco, el momento angular alrededor del centro de masa es despreciable, porque tiende a cero más rápido que el volumen del elemento de fluido.

que las partículas no tienen *spin* o *momento angular intrínseco*. Por lo tanto, su momento angular proviene exclusivamente de su movimiento en el espacio.

El momento angular de las partículas comprendidas en un elemento de volumen  $d^3x$  puede descomponerse en el momento angular del centro de masa y el momento angular respecto del centro de masa, lo que es un corolario del Teorema de Steiner<sup>9</sup>. Pero este último

$$\mathbf{L}_{CM} = \int d^3x \rho (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{CM}) \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{CM}) \quad (60)$$

es un infinitésimo de orden superior a  $d^3x$  y por lo tanto despreciable (ver fig. (22)).

En consecuencia, la densidad de momento angular es  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{x} \times \mathbf{v}$ . Como no estamos considerando la posibilidad de fuerzas externas, la variación de momento angular sólo puede deberse a transporte o al torque de las fuerzas que actúan sobre el borde del volumen de control. Por lo tanto

$$\int_V d^3x \frac{\partial j^i}{\partial t} = \int_{\delta V} da \epsilon^{ijk} x_j \{-\rho v_k v_l n^l - p n_k - \tau_{kl} n^l\} \quad (61)$$

Usando el teorema de Gauss y la arbitrariedad del volumen de control obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho \epsilon^{ijk} x_j v_k] = -\frac{\partial}{\partial x^l} \epsilon^{ijk} x_j \rho v_k v^l - \frac{\partial}{\partial x^k} \epsilon^{ijk} x_j p - \frac{\partial}{\partial x^l} \epsilon^{ijk} x_j \tau_k^l \quad (62)$$

Eliminando términos que se cancelan por simetría, encontramos que

$$\epsilon^{ijk} x_j \left[ \frac{\partial}{\partial t} \rho v_k + \frac{\partial}{\partial x^l} \rho v_k v^l + \frac{\partial}{\partial x^k} p + \frac{\partial}{\partial x^l} \tau_{kl} \right] = -\epsilon^{ijk} \tau_{kl} \quad (63)$$

Pero el lado izquierdo se anula en virtud de la conservación del momento lineal, (59). Por lo tanto, en ausencia de momento angular intrínseco, el tensor de esfuerzos  $\tau^{jk}$  debe ser simétrico.

### 4.3. Conservación de la energía

La energía de un elemento de fluido se compone de la energía asociada a la traslación del centro de masa y de la *energía interna*  $u$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + u \quad (64)$$

En ausencia de otras fuerzas externas, la energía interna puede variar por a) transporte de energía por el movimiento del fluido, b) el trabajo asociado a cambios de volumen, c) el calor que fluye hacia o desde el elemento de volumen, o d) el calor generado por fuerzas de fricción al interior del elemento de volumen.

<sup>9</sup>Por Jakob Steiner (1796-1863)

Como ya hemos visto, la variación del volumen por unidad de tiempo está dada por la divergencia del campo de velocidades  $\nabla \cdot \mathbf{v}$ . El trabajo asociado al cambio de volumen es  $w = p\nabla \cdot \mathbf{v}$ .

Para describir el transporte de calor introducimos un vector flujo de calor  $\mathbf{q}$ , de manera que la cantidad de calor que atraviesa un elemento de área  $d\mathbf{A}$  por unidad de tiempo en la dirección de la normal es  $d\mathbf{A} \cdot \mathbf{q}$ .

Como veremos más adelante, el calor generado por las fuerzas de fricción es  $\tau_{ij}v_{i,j}$ .

Reuniendo todos estos términos, la ecuación de conservación para la energía interna es

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k} (uv^k) = -p \frac{\partial v^k}{\partial x^k} - \frac{\partial q^k}{\partial x^k} - \tau^{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \quad (65)$$

En el apéndice damos una deducción más detallada de esta fórmula.

## 5. Acerca de la literatura

La referencia primaria para este curso es el tomo VI del Curso de Física Teórica de Landau y Lifshitz [1]. Los libros de Kambe [2], Cohen y Kundu [3] y Falkovich [4] son buenas referencias que tienen la ventaja de ser más modernos. Las notas del Prof. Fernando Minotti cubren la mayor parte del curso [5].

## Apéndice: Deducción de la ecuación de conservación de la energía

Esta sección asume conocimientos de termodinámica. Está basada en [6].

Por simplicidad vamos a considerar un fluido sin fuerzas externas ni fuerzas de largo alcance. La termodinámica del sistema está descrita por cinco variables extensivas, el volumen  $V$ , el número de partículas  $N$  (si todas las partículas tienen la misma masa  $m$ , el número de partículas  $N$  y la masa  $M = mN$  conllevan la misma información), el impulso total  $\mathbf{P}$ , la energía  $E$  y la entropía  $S$ . Estas variables están vinculadas entre sí por la Primera Ley de la Termodinámica

$$TdS = dE + pdV - \mu dN - \mathbf{v} \cdot d\mathbf{P} \quad (66)$$

donde  $T$  es la temperatura,  $p$  es la presión,  $\mu$  es el potencial químico y  $\mathbf{v}$  es la velocidad del centro de masa. El hecho de que todas las variables ( $S, E, V, N, \mathbf{P}$ ) escalan de la misma manera con el tamaño del sistema, mientras que las variables intensivas ( $T, p, \mu, \mathbf{v}$ ) son independientes de la escala, nos permite escribir

$$TS = E + pV - \mu N - \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} \quad (67)$$

Diferenciando esta identidad y substrayendo la Primera Ley (66) obtenemos la ecuación de Gibbs-Duhem

$$Nd\mu = -SdT + Vdp - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{v} \quad (68)$$

En vez de estudiar la termodinámica del fluido en su conjunto, podemos analizar un elemento de volumen  $dV$ . Entonces  $S = sdV$ ,  $E = \epsilon dV$ ,  $N = ndV$  y  $\mathbf{P} = \mathbf{p}dV$ .  $\mathbf{p}$  es la densidad de impulso, que ya sabemos es  $\mathbf{p} = mn\mathbf{v}$ . Entonces la ecuación (68) se convierte en

$$Ts = \epsilon + p - \mu n - mn\mathbf{v}^2 \quad (69)$$

La Primera Ley

$$Tds = d\epsilon - \mu dn - \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} \quad (70)$$

y la ecuación de Gibbs-Duhem

$$nd\mu = -sdT + dp - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{v} \quad (71)$$

$\epsilon$ ,  $n$ ,  $\mathbf{p}$  y  $s$  obedecen leyes de conservación del tipo

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k} nv^k &= 0 \\ \frac{\partial p^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k} [mnv^i v^k + \delta^{ik} p + \tau^{ik}] &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k} [(\epsilon + p) v^k + j^k] &= 0 \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k} [s v^k + j_s^k] &= \sigma\end{aligned}\quad (72)$$

No conocemos la forma del tensor de esfuerzos  $\tau^{jk}$  ni de las corrientes  $j^k$  y  $j_s^k$ . La inclusión de la presión en la ecuación para la energía da cuenta del trabajo de las fuerzas de presión ante un cambio de volumen. La Segunda Ley afirma que la creación de entropía  $\sigma$  es no negativa,

$$\sigma \geq 0 \quad (73)$$

Ahora, por la ecuación (72), podemos escribir

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{-1}{T} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^k} [(\epsilon + p) v^k + j^k] - \mu \frac{\partial}{\partial x^k} n v^k - v_i \frac{\partial}{\partial x^k} [m n v^i v^k + \delta^{ik} p + \tau^{ik}] \right\} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^k} s v^k - \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \frac{1}{T} [j^k - v_i (\delta^{ik} p + \tau^{ik})] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x^k} \{ T s v^k + j^k - v^k p - v_i \tau^{ik} \} \\ &\quad - \frac{1}{T} \frac{\partial \mu}{\partial x^k} n v^k - \frac{1}{T} \frac{\partial v_i}{\partial x^k} [m n v^i v^k + \delta^{ik} p + \tau^{ik}]\end{aligned}\quad (74)$$

Utilizamos la ecuación de Gibbs-Duhem (73) para eliminar las derivadas de  $\mu$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x^k} s v^k - \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \frac{1}{T} [j^k - v_i \tau^{ik}] \right\} - \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x^k} \{ j^k - v_i \tau^{ik} \} - \frac{1}{T} \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \tau^{ik} \quad (75)$$

$q^k = j^k - v_i \tau^{ik}$  es la parte del flujo de energía que no se debe al trabajo de las fuerzas entre partículas, y por lo tanto puede interpretarse como un flujo de calor. Comparando con el modelo de ley de conservación, identificamos

$$\begin{aligned}j_s^k &= \frac{q^k}{T} \\ \sigma &= -\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x^k} q^k - \frac{1}{T} \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \tau^{ik}\end{aligned}\quad (76)$$

Más adelante en el curso vamos a explorar las consecuencias de la positividad de  $\sigma$ . Por ahora, observamos que el hecho de que el término  $\tau^{ik} v_{i,k}$  sea parte de la creación de entropía justifica asociarlo con el concepto de fricción, como hicimos en el texto.

Para concluir, la ley de conservación de la energía resulta

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k} [(\epsilon + p) v^k + v_i \tau^{ik} + q^k] = 0 \quad (77)$$

Es habitual escribir

$$\epsilon = \frac{1}{2} m n \mathbf{v}^2 + u \quad (78)$$

donde  $u$  es la *energía interna*, y

$$\mu = -\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + \mu_T \quad (79)$$

De esa forma podemos eliminar  $\mathbf{v}$  de las ecuaciones, ya que

$$\begin{aligned}Ts &= u + p - \mu_T n \\ Tds &= du - \mu_T dn \\ nd\mu_T &= -sdT + dp\end{aligned}\quad (80)$$

y reemplazando en la ecuación (79) obtenemos la ecuación (67).

## Referencias

- [1] L. Landau y E. Lifshitz, *Mecánica de Fluidos*, Reverté, Barcelona (2001).
- [2] T. Kambe, *Elementary Fluid mechanics*, World Scientific, Singapur (2007).
- [3] P. Kundu e I. Cohen, *Fluid Mechanics*, Elsevier, Amsterdam (2004).
- [4] G. Falkovich, *Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge (2018).
- [5] Fernando Minotti, *Apuntes de Estructura de la Materia 1* (2018), en línea:  
[http://materias.df.uba.ar/e1a2018c2/files/2018/11/apuntes\\_e1\\_2018.pdf](http://materias.df.uba.ar/e1a2018c2/files/2018/11/apuntes_e1_2018.pdf)
- [6] P. M. Chaitin y T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).