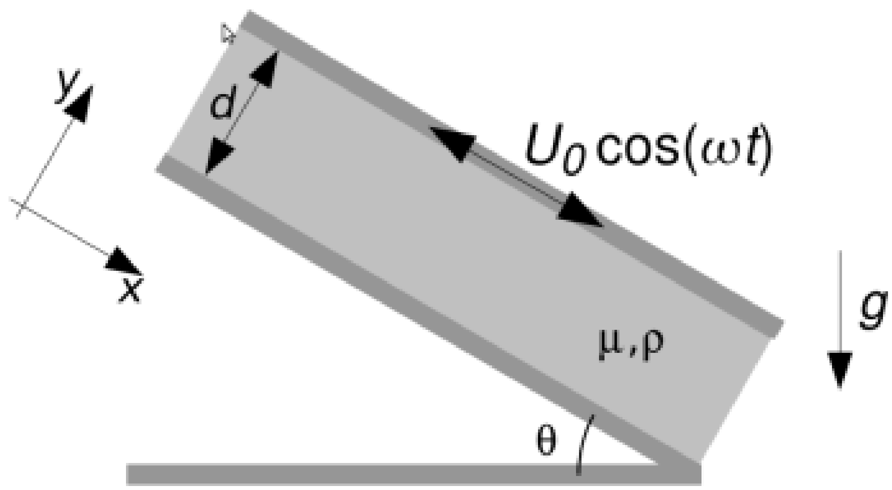
Estructura de la Materia I

Guía 4: Flujos viscosos

14 de octubre de 2021

Problema XIII



Problema 13. Para la situación que se muestra en la figura:

(i) Muestre que el campo de velocidades puede ser calculado a partir de la superposición del campo de velocidades de un problema estacionario y el de un problema dependiente del tiempo. ¿Cuáles son las condiciones para poder hacerlo?

(ii) Mediante análisis dimensional, estime la dependencia funcional de la potencia media entregada al fluido por el plano superior.

Proponemos: $\overline{v} = v(y,t)\hat{x}$

¿Cuáles son las condiciones de contorno? $\begin{cases} v(y=0) = 0 \\ v(y=d) = U_0 \cos(\omega t) \end{cases}$

Planteando Navier Stokes, tenemos:

$$\widehat{x})\quad \partial_t v = -\frac{1}{\rho}\partial_x p + \nu \partial^2_{yy} v + g\sin(\theta)$$

por simetría de traslación en x:

$$\partial_x p = 0$$

$$\widehat{y})\quad 0 = -\frac{1}{\rho}\partial_y p - g\cos(\theta) \implies p(y)$$

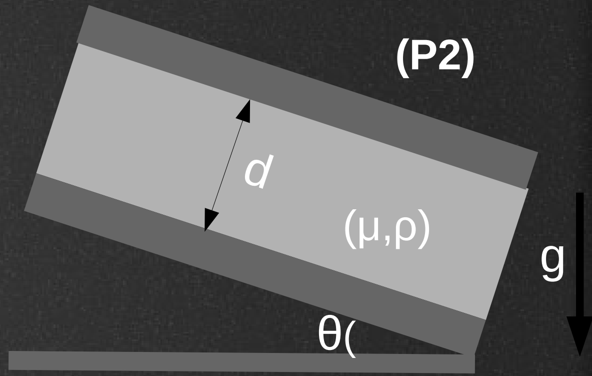
Problema XIII

En x tenemos la gravedad y la ecuación diferencial es inhomogénea.
Nos proponen usar la solución:

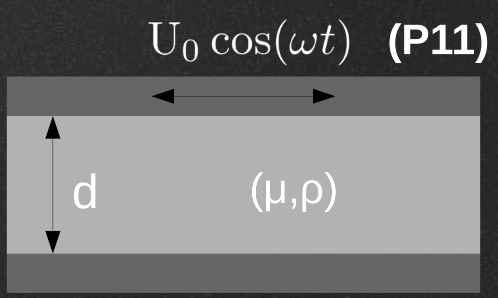
$$\mathrm{v(y,t)} = \underbrace{\mathrm{v}_1(y)}_{\text{Va a absorber la inhomogeneidad}} + v_2(y,t)$$

$\Rightarrow$ ¿Por qué puedo hacer esto?

Por linealidad:



+



Las ecs. de Navier Stokes me quedan:

(1) $\nu \partial^2_{yy} v_1 + g \sin(\theta) = 0$

(2) $\partial_t v_2 = \nu \partial^2_{yy} v_2$

Y las condiciones de contorno asociadas son:

(1) $\mathrm{v}_1(y=0) = 0 \quad v_1(y=d) = 0$

(2) $\mathrm{v}_2(y=0,t) = 0 \quad v_2(y=d,t) = U_0 \cos(\omega t)$

Problema XIII

Resolvamos la ec. **(1):**

$$\nu\partial^2_{yy}v_1 + g\sin(\theta) = 0 \implies \partial^2_{yy}v_1 = -\frac{g\sin(\theta)}{\nu}$$

$$\Rightarrow \mathrm{v}_1(y) = -\frac{g\sin(\theta)}{2\nu}y^2 + Ay + B$$

Usando las CC: $\begin{cases} v_1(y=0) = 0 \\ v_1(y=d) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{v}_1(y) = \frac{g\sin(\theta)}{2\nu}y(d-y)}$$

Resolvamos la ec. **(2):**

Proponemos una solución separable:

$\mathrm{v}_2(y,t) = \mathrm{Re}\{\tilde{v}_2(y)e^{i\omega t}\}$ y reemplazamos en: $\partial_t v_2 = \nu\partial^2_{yy}v_2$

$$\Rightarrow \partial_t(\tilde{v}_2(y)e^{i\omega t}) = \nu\partial^2_{yy}(\tilde{v}_2(y)e^{i\omega t})$$

$$\tilde{v}_2(y)i\omega e^{i\omega t} = \nu e^{i\omega t}\partial^2_{yy}\tilde{v}_2(y) \implies \left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{i\omega}{\nu}\right)\tilde{v}_2 = 0$$

$\Rightarrow$ La solución es: $\tilde{v}_2(y) = Ae^{ky} + Be^{-ky}$ $\boxed{\text{con } k = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}}}$

Problema XIII

Reescribamos el k:

$$k = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} = \sqrt{e^{i\pi/2}}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = e^{i\pi/4}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(1+i) \equiv \frac{1}{\delta}(1+i)$$

δ: longitud de penetración

$$[\nu] = \frac{L^2}{T} \quad [\omega] = \frac{1}{T}$$

$$\implies [\delta] = L$$

$$\implies \widetilde{v}_2(y) = Ae^{y/\delta(1+i)} + Be^{-y/\delta(1+i)}$$

Ahora nos falta aplicar las condiciones de contorno:

(1): $v_2(y=0,t) = 0 \implies \widetilde{v}_2(y=0) = 0$

(2): $v_2(y=d,t) = U_0\cos(\omega t) \implies \widetilde{v}_2(y=d) = U_0$

Por (1): $\widetilde{v}_2(y=0) = 0 = A + B \implies A = -B$

Por (2): $\widetilde{v}_2(y=d) = U_0 = A\left(e^{d/\delta(1+i)} - e^{-d\delta(1+i)}\right)$

$$\implies A = \frac{U_0}{e^{d/\delta(1+i)} - e^{-d\delta(1+i)}}$$

Problema XIII

La solución me va a quedar:

$$\mathrm{v}_2(y,t) = \mathrm{Re}\{\tilde{v}_2(y)e^{i\omega t}\}$$

donde: $$\widetilde{v_2}(y) = \frac{U_0}{e^{d/\delta(1+i)} - e^{-d\delta(1+i)}}\left(e^{y/\delta(1+i)} - e^{-y/\delta(1+i)}\right)$$

Ahora hay que tomar la parte real a esa expresión…

$$e^{d/\delta} = \cosh(d/\delta) + \sinh(d/\delta) \quad e^{-d/\delta} = \cosh(d/\delta) - \sinh(d/\delta)$$

$$e^{id/\delta} = \cos(d/\delta) + i\sin(d/\delta) \quad e^{-id/\delta} = \cos(d/\delta) - i\sin(d/\delta)$$

A simple vista se puede ver que la solución es:

$$v_2(y,t) = \frac{U_0\cos(\omega t)\,[\sinh(y/\delta)\cos(y/\delta)\sinh(d/\delta)\cos(d/\delta) + \cosh(y/\delta)\sin(y/\delta)\cosh(d/\delta)\sin(d/\delta)]}{\sinh^2(d/\delta)\cos^2(d/\delta) + \cosh^2(d/\delta)\sin^2(d/\delta)}$$
$$+ \frac{U_0\sin(\omega t)\,[\sinh(y/\delta)\cos(y/\delta)\cosh(d/\delta)\sin(d/\delta) - \cosh(y/\delta)\sin(y/\delta)\sinh(d/\delta)\cos(d/\delta)]}{\sinh^2(d/\delta)\cos^2(d/\delta) + \cosh^2(d/\delta)\sin^2(d/\delta)}$$

Obs: Si d >>> δ → se recupera el problema 10 “invertido”

Problema XIII

Parte (b) Mediante análisis dimensional, estime la depedencia funcional de la potencia media por unidad de área entregada al fluido por el plano superior.

La potencia se define como:

$$\mathrm{P} = \frac{dW}{dt} \quad \text{donde:} \quad W = Fd$$

Por unidad de área, las unidades son: $[\mathrm{P}] = \overbrace{\frac{ML}{T^2}\frac{1}{L^2}}^{\text{F/A}} L\frac{1}{T} = \frac{M}{T^3}$

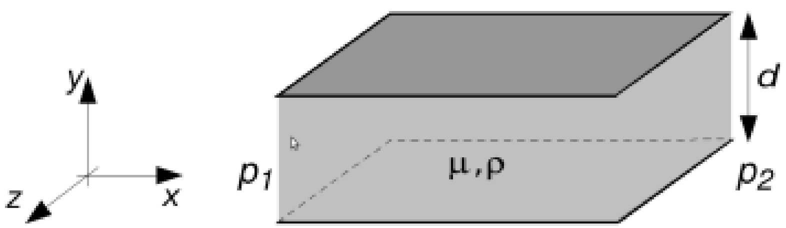
La potencia media es: $\langle P \rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} dt P(t)$

¿De qué variables va a depender la potencia media?

$$\langle P \rangle = f(U_0, \delta, \mu) \Longrightarrow \langle P \rangle = U_0^{\alpha}\delta^{\beta}\mu^{\gamma} = (LT^{-1})^{\alpha}(L)^{\beta}(ML^{-1}T^{-1})^{\gamma}$$

Ahora miramos dimensión por dimensión:

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{L)}\ 0 = \alpha + \beta - \gamma \Longrightarrow \beta = \gamma - \alpha = -1 \\ &\mathrm{M)}\ 1 = \gamma \\ &\mathrm{T)}\ \text{-}3 = \text{-}\,\alpha - \gamma \Longrightarrow \alpha = 3 - \gamma = 2 \end{aligned}\right\} \langle P \rangle \propto \mu\delta^{-1}U_0^2$$



Problema 12. Resuelva el caso de un líquido entre dos planos en reposo de dimensiones infinitas, movido porun gradiente de presion oscilante en forma armónica en el tiempo, del tipo $\Delta p = p_2 - p_1 = p_0 \cos(\omega t)$. Utilice análisis dimensional para obtener la dependencia funcional del caudal medio $\langle Q \rangle$ (en un semi-período) que se establece a través de una sección transversal al movimiento.

Proponemos: $\overline{v} = v(y,t)\hat{x}$

$$\widehat{x}) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{p_0}{L}\cos(\omega t) + \nu \partial^2_{yy} v \longrightarrow \text{Usando: } \mathrm{v} = \mathrm{Re}\{\tilde{v}(y)e^{i\omega t}\}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial(\tilde{v}(y)e^{i\omega t})}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{p_0}{L}\cos(\omega t) + \nu \partial^2_{yy}(\tilde{v}(y)e^{i\omega t})$$

$$\Longrightarrow \; i\omega\tilde{v}(y)e^{i\omega t} = -\frac{1}{\rho}\frac{p_0}{L}e^{i\omega t} + e^{i\omega t}\nu\partial^2_{yy}\tilde{v}(y)$$

$$\Longrightarrow \; i\omega\tilde{v}(y) = -\frac{1}{\rho}\frac{p_0}{L} + \nu\partial^2_{yy}\tilde{v}(y)$$

$$\Longrightarrow \; \partial^2_{yy}\tilde{v}(y) - \frac{i\omega}{\nu}\tilde{v}(y) - \frac{p_0}{\mu L} = 0$$

La solución será:
$\widetilde{v} = \widetilde{v}_H + \widetilde{v}_P$

Problema 14. Resuelva nuevamente el problema 12, pero ahora considerando una variación de la presión de la forma $\Delta p = p_2 - p_1 = P + p_0 \cos(\omega t)$, donde P y p_0 son constantes.

Combinación del P12 y del P13. Hay un término inhomogéneo que no depende del tiempo y otro que sí depende del tiempo.

$$\widehat{x}) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{P}{L} - \frac{1}{\rho}\frac{p_0}{L}\cos(\omega t) + \nu \partial_{yy}^2 v$$

Vamos a tener que usar:

$$\mathrm{v}(\mathrm{y},\mathrm{t}) = \underbrace{\mathrm{v}_1(y)}_{\text{Absorbe la inhomogeneidad cte}} + \underbrace{v_2(y,t)}_{\text{idem al P12}} \Rightarrow$$

lo puedo hacer porque la ecuación es lineal