

# Estructura de la Materia 1 – 2<sup>do</sup> Parcial

## 1<sup>er</sup> Cuatrimestre 2021

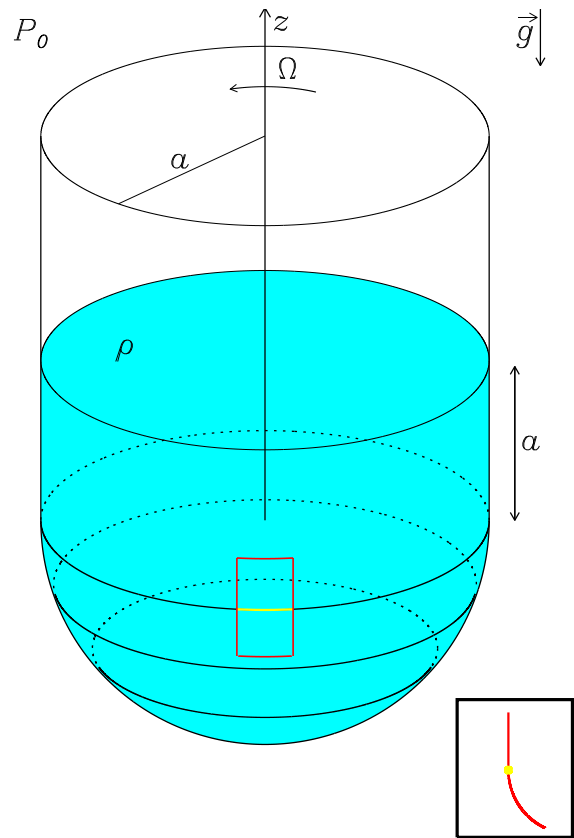
### Problema 1

Un recipiente cilíndrico de radio  $a$ , cuya parte inferior consiste en una semiesfera, se pone a girar con velocidad  $\Omega$  hasta alcanzar un régimen estacionario, en que el fluido de densidad uniforme  $\rho$  que se encuentra en su interior rota rígidamente como el recipiente.

a) Si inicialmente el fluido llena completamente la semiesfera y alcanza una altura  $a$  sobre la pared recta del cilindro, encuentre una expresión para la coordenada  $z$  de la superficie libre cuando el recipiente rota. Tome el sistema coordenado indicado, donde  $z = 0$  corresponde al centro de la semiesfera. ¿Cuál es el valor límite  $\Omega_\ell$  a partir del cual la superficie libre alcanza el fondo del recipiente?

b) Encuentre la presión sobre la superficie semiesférica (expresé en coordenadas esféricas). Considere  $\Omega < \Omega_\ell$ .

c) Ahora suponga que se tiene una compuerta (indicada por los trazos rojos) que puede girar rígidamente alrededor de una bisagra central (trazo amarillo) sobre el círculo que limita la superficie cilíndrica de la semiesférica. Indique cómo hallaría analíticamente la velocidad de rotación para la cual la puerta permanecería cerrada. El esquema inserto en la esquina inferior derecha de la figura muestra un corte vertical de la compuerta.



### Resolución

a) Al igual que lo hicimos en el ejercicio de la práctica, taquímetro hidrostático, lo más simple es pararse en el sistema rotante y, en ese sistema, considerar la ecuación básica de la hidrostática. El precio que pagamos por ello es tener que incluir fuerzas de inercia

$$0 = -\vec{\nabla}p - \rho g \hat{z} - \rho \vec{\Omega}(\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -\vec{\nabla}p - \rho g \hat{z} + \rho \Omega^2 r \hat{r} \quad ,$$

donde en el último término  $r$  denomina la coordenada radial en cilíndricas y  $\hat{r}$  es su correspondiente versor. Podemos escribir todo bajo el signo de derivación

$$\vec{\nabla} \left( p + \rho g z - \frac{\rho \Omega^2 r^2}{2} \right) = 0 \quad ,$$

lo cual implica que lo que está dentro del paréntesis es una cierta constante  $K$  para todo el fluido

$$p + \rho g z - \frac{\rho \Omega^2 r^2}{2} = K \quad .$$

Si ahora queremos conocer la forma de la superficie libre, sabemos que el correspondiente valor de presión sobre esa superficie es  $p_0$ , entonces despejando la coordenada  $z$  de la superficie libre, que llamaremos  $z_L$  en función de la coordenada radial, obtenemos

$$z_L(r) = \frac{K - p_0}{\rho g} + \frac{\Omega^2 r^2}{2g} \quad .$$

Ahora debemos usar la conservación de la masa, y del volumen por ser la densidad constante, para conocer el valor de la constante de integración  $K$ . Sabemos que inicialmente el fluido ocupaba toda la semiesfera y el cilindro hasta una altura  $a$ , por lo que el volumen de fluido es  $\frac{2}{3}\pi a^3 + \pi a^3 = \frac{5}{3}\pi a^3$ . El fluido está limitado superiormente por la superficie  $z_L(r)$  e inferiormente por la superficie semiesférica, la cual en coordenadas cilíndricas satisface  $z^2 + r^2 = a^2$ , de la que podemos despejar  $z(r) = -\sqrt{a^2 - r^2}$ , donde se ha tomado la solución negativa debido a que la semiesfera está por debajo del plano  $z = 0$ . De todo lo dicho, podemos plantear la igualdad (cabe aclarar que también se podría haber considerado que la semiesfera estaba completamente llena y entonces haber integrado en  $z$  sólo entre 0 y  $z_L(r)$ , pero en este caso la integral debía igualarse a  $\pi a^3$ )

$$\frac{5}{3}\pi a^3 = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{z_L(r)} r dz dr d\phi = 2\pi \left[ \int_0^a \left( \frac{K - p_0}{\rho g} + \frac{\Omega^2 r^2}{2g} + \sqrt{a^2 - r^2} \right) r dr \right] \quad .$$

Resolviendo la integral se llega a

$$K = p_0 + \rho g a - \frac{\Omega^2 a^2}{4g} \implies z_L(r) = a + \frac{\Omega^2}{4g}(2r^2 - a^2) \quad .$$

Asimismo puede obtenerse el campo de presiones para todo el fluido como

$$p(r, z) = p_0 + \rho g(a - z) + \frac{\Omega^2}{4g}(2r^2 - a^2) \quad .$$

Para encontrar la velocidad de rotación límite  $\Omega_\ell$  para la cual el fluido comienza a tocar el fondo del recipiente planteamos que  $z_L(r = 0) = -a$ , ya que el punto más bajo de la superficie libre se haya en  $r = 0$  y el valor de  $z$  en el fondo del recipiente para ese valor de  $r$  es  $-a$

$$z_L(r = 0) = -a \implies a - \frac{\Omega_\ell^2 a^2}{4g} = -a \implies \Omega_\ell = \sqrt{\frac{8g}{a}} \quad .$$

**b)** En este punto lo único que nos piden es encontrar la presión sobre el fondo del recipiente, es decir sobre la semiesfera. Como dice el enunciado, es conveniente expresar el resultado en coordenadas esféricas, por lo que hay que considerar qué forma toman  $z$  y  $r$  (coordenadas cilíndricas) sobre esa superficie

$$z = a \cos \theta \quad , \quad r = a \sin \theta \quad .$$

Reemplazando en la expresión de  $p(r, z)$  que encontramos en el ítem (a) se obtiene

$$p(\theta) = p_0 + \rho g a(1 - \cos \theta) + \frac{\Omega^2 a^2}{4g}(2 \sin^2 \theta - 1) \quad .$$

c) Para ver si la puerta permanece cerrada o no recordemos lo que aprendimos de cuerpo rígido, si este está inicialmente quieto, va a girar alrededor de un eje sólo si el torque sobre el mismo es no nulo (tomando el centro de momentos sobre el eje). Por lo tanto, lo que había que evaluar es la cantidad  $\vec{r} \times p(\theta)\hat{n}$  integrada sobre la superficie de la puerta, donde  $\vec{r}$  se mide desde el eje que coincide con la posición de la bisagra.

Hasta aquí lo que pedía este ítem del problema, pero podemos agregar a nuestro análisis cualitativo que si la puerta estuviera exclusivamente sobre la parte cilíndrica del recipiente no existiría una velocidad de rotación capaz de hacer que la puerta permanezca cerrada, porque independientemente de cuál fuera  $\Omega$ , el torque sobre la parte inferior de la puerta sería mayor que sobre la superior (porque a  $r$  fijo, la presión decrece monótonamente con la profundidad). En cambio cuando parte de la puerta está sobre la semiesfera además de tener en cuenta la variación de la presión con la profundidad, debe tenerse en cuenta la variación de la presión con  $r$  que introduce el término centrífugo.

## Ejercicio 2

(a) Nos piden hallar la fuerza  $\mathbf{F}_j$  que ejerce el fluido sobre el carrito en función de la velocidad  $V_c$  y los parámetros de la figura.

Para calcular  $\mathbf{F}_j$  debemos caracterizar el flujo. Para ello vamos a considerar un sistema de referencia que se mueve con el carrito a velocidad  $V_c$ . En dicho sistema, lejos del deflector y antes de impactar al mismo, conocemos la densidad  $\rho_j$  del fluido, su velocidad  $V_j - V_c$  y su sección  $A_j$  y llamemos  $p_0$  a la presión asociada aunque, como veremos, no será relevante. Por otra parte, también lejos del deflector pero posterior al impacto, es razonable suponer que el flujo vuelve a ser unidireccional, como hicimos en las clases prácticas, y por lo tanto la presión allí también es  $p_0$ .

Dado que el flujo es estacionario en el referencial propuesto, podemos aplicar el teorema de Bernoulli. Noten que para cualquier otro referencial, el campo de velocidades no es estacionario, sencillamente porque cambia la región del espacio ocupada por fluido. Entonces, para una línea de corriente cualquiera, el teorema de Bernoulli nos indica que la velocidad luego del impacto (y lejos del deflector), tendrá igual magnitud y por tanto será  $\mathbf{u}' = (V_j - V_c)(\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y})$  ( $\mathbf{u}'$  esta medido por el observador moviéndose con velocidad  $V_c$ ). La conservación del caudal implica entonces que también tendremos  $A_j$  después del impacto. Estos resultados deberían resultarnos familiares de varios ejercicios de la práctica.

Si ahora escogemos un volumen de control cuya pared lateral está dada por el propio jet y cuyas tapas se hallen lejos de la zona de impacto, la conservación integral del momento requiere,

$$\oint_S [(p - p_0)\hat{n} + \rho\mathbf{u}'(\mathbf{u}' \cdot \hat{n})] dS = \iint_{S_1} \rho\mathbf{u}'(\mathbf{u}' \cdot \hat{n})dS_1 + \iint_{S_2} \rho\mathbf{u}'(\mathbf{u}' \cdot \hat{n})dS_2 + \iint_{S_L} (p - p_0)\hat{n}dS_L = \mathbf{0}, \quad (1)$$

donde  $S$  es la superficie que encierra al volumen propuesto,  $S_1$  la tapa a la izquierda del deflector,  $S_2$  la tapa a la derecha del mismo y  $S_L$  la pared lateral del jet con  $\hat{n}$  la normal externa al fluido. Noten que estas expresiones también referencian las velocidades al sistema primado, ya que en éste el volumen de control permanece fijo en el espacio y por tanto valdrá esta forma de la conservación de momento. Además, como hicimos en clase, utilizamos  $p - p_0$  a la hora de integrar la presión, ya que la integral cerrada de una constante es cero. De esta manera, las integrales de presión sobre  $S_1$  y  $S_2$  se anularon, mientras que la integral de la velocidad sobre  $S_L$  resulta nula por estar  $S_L$  compuesta por líneas de corriente.

Si notamos ahora que, por definición, la integral restante sobre  $S_L$  se relaciona con  $\mathbf{F}_j$  mediante  $\mathbf{F}_j = \iint_{S_L} (p - p_0)\hat{n}dS_L$  tendremos,

$$\mathbf{F}_j = - \iint_{S_1} \rho\mathbf{u}'(\mathbf{u}' \cdot \hat{n})dS_1 - \iint_{S_2} \rho\mathbf{u}'(\mathbf{u}' \cdot \hat{n})dS_2,$$

$$\mathbf{F}_j = - \iint_{S_1} \rho(V_j - V_c) \hat{x} [(V_j - V_c) \hat{x} \cdot (-\hat{x})] dS_1 - \iint_{S_2} \rho(V_j - V_c)(\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}) [(V_j - V_c)(\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}) \cdot (\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y})] dS_2,$$

$$\mathbf{F}_j = \rho A_j (V_j - V_c)^2 - \rho A_j (V_j - V_c)^2 (\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}), \quad (2)$$

A partir de la ecuación (2), obtenemos entonces,

$$\mathbf{F}_j = \rho A_j (V_j - V_c)^2 [(1 - \cos \theta) \hat{x} - \sin \theta \hat{y}], \quad (3)$$

con lo que vemos que la fuerza que ejerce el jet sobre el carrito tiene 2 componentes, una que apunta en dirección del movimiento y otra componente que apunta en dirección  $-\hat{y}$ .

(b) Para que el sistema se encuentre en un estado estacionario debe existir una fuerza que se opone al movimiento y haga que la aceleración del carrito sea nula. En este inciso la fuerza que se opone al movimiento del carrito es la del rozamiento con el

aire, dado por  $\mathbf{F}_r = -k_1 V_c^2 \hat{x}$ . Teniendo en cuenta esto podemos calcular la velocidad  $V_c$ . Si tenemos en cuenta la componente  $x$  de la fuerza resulta,

$$\mathbf{F}_j \cdot \hat{x} = \rho A_j (V_j - V_c)^2 (1 - \cos \theta) = k_1 V_c^2,$$

$$V_j - V_c = \sqrt{\frac{k_1}{\rho A_j (1 - \cos \theta)}} V_c,$$

$$V_c = \frac{V_j}{1 + \sqrt{\frac{k_1}{\rho A_j (1 - \cos \theta)}}}, \quad (4)$$

Donde nos quedamos con la parte positiva de la raíz ya que la velocidad  $V_c$  no puede ser negativa y  $V_j \geq V_c$ .

(c) Ahora, además de tener en cuenta la fuerza de rozamiento con el aire, tenemos en cuenta la fuerza de fricción con el piso  $\mathbf{F}_f = -k_2 N$  donde  $N$  es el módulo de la fuerza normal sobre el carrito. Escribamos primero la normal  $N$ , con lo cual tenemos en cuenta la componente  $y$  de la ecuación (3),

$$N = \rho A_j (V_j - V_c)^2 \sin \theta + Mg,$$

Con esto estamos en condiciones de escribir la fuerza en  $x$ ,

$$\rho A_j (V_j - V_c)^2 (1 - \cos \theta) - k_1 V_c^2 - k_2 [\rho A_j (V_j - V_c)^2 \sin \theta + Mg] = 0. \quad (5)$$

De esta última expresión solo faltaría despejar  $V_c$ .

# 1er Parcial E1 2C-2021

Septiembre 2021

## 1 Problema 3

(a) El potencial complejo de la configuración completa equivale a la superposición entre el flujo uniforme proveniente del infinito, la fuente a una distancia  $a$  del eje real y la imagen que hace que el plano cumpla con la condición de contorno sólido, es decir,

$$W(z) = U_0 z + \frac{Q}{2\pi} \ln(z - ia) + \frac{Q}{2\pi} \ln(z + ia) \quad (1)$$

Para hallar los puntos de estancamiento, debemos pedir que la velocidad sea nula. La velocidad está relacionada con el potencial complejo a través de la relación

$$\frac{dW}{dz} \Big|_{z_{est}} = (u_x - iu_y) \Big|_{z_{est}} = 0. \quad (2)$$

Hallemos la derivada y veamos qué valores de  $z$  hacen que la velocidad se anule.

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz} &= U_0 + \frac{Q}{2\pi} \left( \frac{1}{z - ia} + \frac{1}{z + ia} \right) \\ &= U_0 + \frac{Q}{2\pi} \frac{z + ia + z - ia}{z^2 + a^2} \\ &= U_0 + \frac{Q}{2\pi} \frac{2z}{z^2 + a^2} = u_x - iu_y \end{aligned} \quad (3)$$

Pidiendo que  $dW/dz = 0$ , tenemos que

$$-\frac{2\pi U_0}{Q} = \frac{2z_{est}}{z_{est}^2 + a^2} \implies 0 = z_{est}^2 + \frac{Q}{U_0\pi} z_{est} + a^2. \quad (4)$$

Esto implica que los puntos de estancamiento se encuentran en

$$z_{est} = -\frac{Q}{2\pi U_0} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \left( \frac{2\pi U_0 a}{Q} \right)^2} \right] \quad (5)$$

Para que los puntos de estancamiento estén sobre el contorno sólido, debemos pedir que el argumento de la raíz sea positivo con tal que  $z_{est}$  sea real. Por este motivo, la condición nos queda

$$Q > 2\pi U_0 a \quad (6)$$

(b) La velocidad sobre el contorno sólido es

$$u_x = \frac{dW}{dz} \Big|_{y=0} = U_0 + \frac{Q}{2\pi} \frac{2x}{x^2 + a^2} \quad (7)$$

Nos preguntan por condiciones para la velocidad máxima, con lo cual lo primero será buscar cuál es dicha velocidad y en qué puntos del contorno sólido la veremos. Esto lo encontramos derivando e igualando a cero

$$\frac{du_x}{dx} = \frac{Q}{2\pi} \frac{(2(x^2 + a^2) - 4x^2)}{(x^2 + a^2)^2} = 0 \implies x_{crit} = \pm a \quad (8)$$

En particular, esto nos dice que la velocidad tiene un máximo en  $x = +a$ . Reemplazando en la expresión de  $u_x$ , tenemos que

$$u_x^{(max)} = U_0 + \frac{Q}{2\pi} \frac{2a}{2a^2} = U_0 + \frac{Q}{2\pi a} \quad (9)$$

Reemplazando por los valores numéricos del ejercicio, para que  $u_x^{(max)}$  sea al menos de  $7m/s$  tenemos

$$\begin{aligned} u_x^{(max)} &= 3m/s + 4m^2/s \frac{1}{a} \geq 7m/s \\ &\implies \boxed{1 \geq a \geq 0 \quad (\text{metros})} \end{aligned} \quad (10)$$

(c) En tanto que sobre el contorno sólido tenemos una línea de corriente, podemos aplicar Bernoulli entre  $x = a$  y un punto genérico del contorno, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{\rho} + \frac{u_x(x=a)^2}{2} &= \frac{p(x)}{\rho} + \frac{u_x(x)^2}{2} \\ \frac{p_0}{\rho} + \frac{\left(U_0 + \frac{Q}{2\pi a}\right)^2}{2} &= \frac{p(x)}{\rho} + \frac{\left(U_0 + \frac{Q}{2\pi} \frac{2x}{x^2 + a^2}\right)^2}{2} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\implies \boxed{p(x) = p_0 + \frac{\rho}{2} \left[ \left(U_0 + \frac{Q}{2\pi a}\right)^2 - \left(U_0 + \frac{Q}{2\pi} \frac{2x}{x^2 + a^2}\right)^2 \right]}$$