Estructura de la Materia I

Repaso

18 de noviembre de 2021

Problema 3

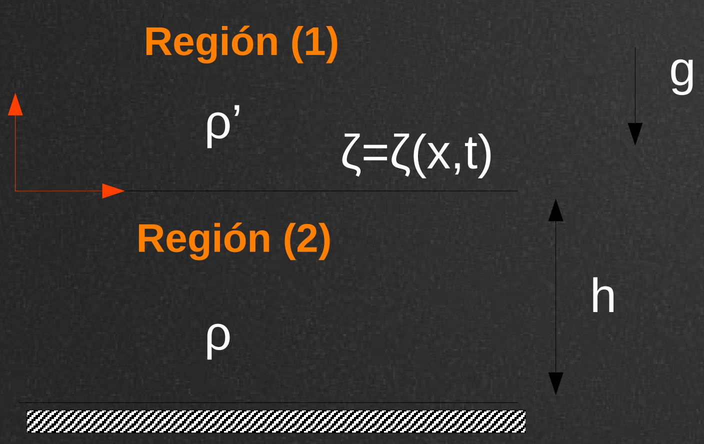
Se tienen dos líquidos ideales e incompresibles en contacto, bajo la acción de la gravedad $\vec{g}$ (en la dirección $\check{z}$).

Considere perturbaciones de amplitud pequeña (ondas de gravedad) al estado de equilibrio, que se propagan en la dirección $\check{x}$ y con simetría en $\check{y}$. El líquido superior tiene densidad ρ' y altura infinita. El líquido inferior tiene densidad ρ (con $\rho > \rho'$) y profundidad h.

a) Obtenga la relación de dispersión $\omega = \omega(k)$ para las ondas de gravedad.

b) Encuentre la expresión explícita de la superficie de contacto entre los líquidos, $\zeta = \zeta(x,t)$ para un único valor de k.

c) Obtenga las componentes de la velocidad $u_x(x,z,t)$ y $u_z(x,z,t)$.



Los fluidos son incompresibles e irrotacionales → sus potenciales de velocidad satisfacen Laplace:

$$\nabla^2\phi' = 0 \quad , \quad \nabla^2\phi = 0$$

Proponemos:

$$\phi'(x,z,t) = f_1(z)\cos(kx - \omega t)$$
$$\phi(x,z,t) = f_2(z)\cos(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow \boxed{f_1(z) = Ae^{-kz} + Be^{kz}}$$

$$\boxed{f_2(z) = Ce^{-kz} + De^{kz}}$$

Teníamos: $\boxed{\phi'(x,z,t) = f_1(z)\cos(kx-\omega t)}$ $\boxed{\phi(x,z,t) = f_2(z)\cos(kx-\omega t)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{f_1(z) = Ae^{-kz} + Be^{kz}}$ $\boxed{f_2(z) = Ce^{-kz} + De^{kz}}$

(1) En z=−h tenemos un contorno sólido, la componente vertical de la velocidad se anula:

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0 \Rightarrow \text{-kC e}^{kh} + kDe^{-kh} = 0 \implies \boxed{D = Ce^{2kh}}$$

(2) En el fluido superior, tenemos que h→∞ . Pedimos que:

$$\lim_{z\to+\infty} \phi'(z) = 0 \implies \boxed{f_1(z) = Ae^{-kz}}$$

(3) Continuidad de la velocidad en la interfaz:

$$\left.\frac{\partial \phi'}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=0} \Rightarrow \text{-kA} = \text{-kC} + \text{kD} \implies \boxed{A = C(1-e^{2kh})}$$

(4) Continuidad de la presión en la inferfaz de los dos líquidos.

$$\left.\left[g\left(\rho-\rho'\right)\frac{\partial\phi}{\partial z} + \rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \rho'\frac{\partial^2\phi'}{\partial t^2}\right]\right|_{z=0} = 0$$

Recordemos de dónde salía…

(4) Recordemos de dónde salía la condición de continuidad de la presión en la inferfaz de los dos líquidos. Planteo Bernoulli:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \Longrightarrow p = -\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + gz \right)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \frac{p}{\rho'} + gz = 0 \Longrightarrow p = -\rho' \left(\frac{\partial \phi'}{\partial t} + gz \right)$$

Igualo presiones en la interfase: $\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + gz \right)\Big|_{z=\zeta} = \rho' \left(\frac{\partial \phi'}{\partial t} + gz \right)\Big|_{z=\zeta}$

Derivo esta expresión respecto al tiempo y aproximo:

$$\partial_t \zeta \approx v_z\big|_{z=\zeta} = \partial_z \phi\big|_{z=\zeta} = \partial_z \phi'\big|_{z=\zeta}$$

$$\left[g\left(\rho - \rho'\right) \frac{\partial \phi}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \rho' \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} \right]\Bigg|_{z=\zeta} = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left[g\left(\rho - \rho'\right) \frac{\partial \phi}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \rho' \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} \right]\Bigg|_{z=0} = 0}$$

En nuestro caso...

$$\left[g\left(\rho - \rho'\right)\left(-kC + kCe^{2kh}\right) - \rho\omega^2 C(1 + e^{2kh}) + \rho'\omega^2 A \right] = 0$$

Meto lo que me quedó en un sistema matricial y resuelvo el determinante.
Teníamos:

$$\boxed{A = C(1 - e^{2kh})}$$

$$\boxed{\left[g\left(\rho - \rho'\right)\left(-kC + kCe^{2kh}\right) - \rho\omega^2 C(1 + e^{2kh}) + \rho'\omega^2 A\right] = 0}$$

$$\Rightarrow \mathrm{M}=\begin{pmatrix} 1 & -1 + e^{2kh} \\ \rho'\omega^2 & g\left(\rho - \rho'\right)\left(-k + ke^{2kh}\right) - \rho\omega^2(1 + e^{2kh}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = 0$$

$$\det\{M\} = gk\left(\rho - \rho'\right)\left(-1 + e^{2kh}\right) - \rho\omega^2(1 + e^{2kh}) + \left(\rho'\omega^2 - \rho'\omega^2 e^{2kh}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \omega^2\Big(-\rho(1 + e^{2kh}) + \rho'(1 - e^{2kh})\Big) + gk\left(\rho - \rho'\right)\left(-1 + e^{2kh}\right) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{gk\left(\rho' - \rho\right)\left(-1 + e^{2kh}\right)}{\Big(\rho'(1 - e^{2kh}) - \rho(1 + e^{2kh})\Big)} = \boxed{\frac{gk\left(\rho - \rho'\right)\sinh(kh)}{\Big(\rho'\sinh(kh) + \rho\cosh(kh)\Big)} = \omega^2}$$

(b) La interfaz líquido-líquido ζ(x, t) la podemos obtener despejando directamente de la igualdad de las presiones:

$$\zeta(x,t) = -\frac{1}{g\left(\rho-\rho'\right)}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} - \rho'\frac{\partial\phi'}{\partial t}\right)\bigg|_{z=0}$$

$$\begin{aligned}\zeta(x,t) &= -\frac{1}{g\left(\rho-\rho'\right)}\Big(\rho\omega C(1+e^{2kh}) - \rho'\omega A\Big)\sin(kx-\omega t)\\ &= -\frac{C\omega}{g\left(\rho-\rho'\right)}\Big(\rho(1+e^{2kh}) - \rho'(1-e^{2kh})\Big)\sin(kx-\omega t)\end{aligned}$$

(c) Calcule las velocidades:

$$\mathrm{v}_{1z}(x,z,t) = \frac{\partial\phi'}{\partial z} \qquad \mathrm{v}_{1x}(x,z,t) = \frac{\partial\phi'}{\partial x}$$

$$\mathrm{v}_{2z}(x,z,t) = \frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad \mathrm{v}_{2x}(x,z,t) = \frac{\partial\phi}{\partial x}$$

Problema 2

Considere un fluido ideal y plano en el semiplano superior, en presencia de un contorno sólido en $y = 0$. El flujo estacionario está dado por:

$$U(y) = \begin{cases} U_0 & si \quad y > 2a \\ U_0\left(\frac{y}{a} - 1\right) & si \quad a < y < 2a \\ 0 & si \quad 0 < y < a \end{cases},$$

donde U_0 y a son datos del problema.

a) Analice la estabilidad del flujo, tenga en cuenta qué condición impone la presencia del contorno sólido sobre la función corriente de la perturbación. En particular encuentre una expresión que sea función exclusivamente de ka cuyo signo caracterice la estabilidad del flujo.

b) A partir de lo obtenido en **a)** trate de determinar si una perturbación con $k = 1/a$ produce inestabilidades en el flujo.

La ecuación de Rayleigh original era:

$$[\mathrm{U(y)\text{-}c}]\left(f''(y) - k^2 f(y)\right) - U''(y) f(y) = 0$$

Pero como U(y) es lineal a trozos, el segundo término no contribuye y tenemos:

$\mathrm{f}''(y) - k^2 f(y) = 0$, cuya solución es: $\mathrm{f(y)=Ae}^{-ky} + Be^{ky}$

Tenemos 3 regiones con dos constantes c/u:

$$\Longrightarrow \quad \text{f(y)}=\begin{cases} Ae^{-ky}+Be^{ky} & \text{si } y>2a \\ \widetilde{C}e^{-ky}+De^{ky} & \text{si } a<y<2a \\ Ee^{-ky}+Fe^{ky} & \text{si } 0<y<a \end{cases}$$

¿Cuántas condiciones de contorno necesitamos?

Condiciones de contorno:

- **1era condición: Perturbación local**

$$\text{f(y)} \to 0 \quad \text{en } y \to +\infty \implies \boxed{B=0}$$

- **2nda condición (continuidad de la presión en las dos interfaces):**

$$\Delta\left[U'(y)f(y)-(U(y)-c)f'(y)\right]|_{y=2a}=0$$

$$\Delta\left[U'(y)f(y)-(U(y)-c)f'(y)\right]|_{y=a}=0$$

- **3era condición (continuidad de la velocidad en las dos interfaces):**

$$\Delta\left[\frac{f(y)}{U(y)-c}\right]|_{y=2a}=0 \qquad \Delta\left[\frac{f(y)}{U(y)-c}\right]|_{y=a}=0$$

- **4ta condición (contorno sólido):**

$$\text{Im}[\psi(x,y=0,t)]=\text{Im}[f(y=0)e^{i(kx-\omega t)}]=\text{cte} \implies f(y=0)=0$$

Tenemos:

$$\mathrm{U(y)}=\begin{cases} U_0 & \text{si} \quad y>2a \\ U_0\left(\frac{y}{a}-1\right) & \text{si} \quad a<y<2a \\ 0 & \text{si} \quad 0<y<a \end{cases} \qquad \mathrm{f(y)}=\begin{cases} Ae^{-ky} & \text{si } y>2a \\ \widetilde{C}e^{-ky}+De^{ky} & \text{si } a<y<2a \\ Ee^{-ky}+Fe^{ky} & \text{si } 0<y<a \end{cases}$$

Planteamos la interfaz superior (y=2a):

(1) $\Delta\left[U'(y)f(y)-(U(y)-c)f'(y)\right]|_{y=2a}=0$

$$-(U_0-c)(-k)Ae^{-2ka}=\frac{U_0}{a}(\widetilde{C}e^{-2ka}+De^{2ka})-(U_0-c)k(-\widetilde{C}e^{-2ka}+De^{2ka})$$

$$\Longrightarrow \boxed{Ak(U_0-c)e^{-2ka}=\widetilde{C}e^{-2ka}\left(\frac{U_0}{a}+(U_0-c)k\right)+De^{2ka}\left(\frac{U_0}{a}-(U_0-c)k\right)}$$

(2) $\Delta\left[\frac{f(y)}{U(y)-c}\right]|_{y=2a}=0$

$$\frac{Ae^{-2ka}}{U_0-c}=\frac{\widetilde{C}e^{-2ka}+De^{2ka}}{U_0-c} \Longrightarrow \boxed{Ae^{-2ka}=\widetilde{C}e^{-2ka}+De^{2ka}}$$

(3) $\mathrm{Im}[\psi(x,y=0,t)]=\mathrm{Im}[f(y=0)e^{i(kx-\omega t)}]=\mathrm{cte}$

$$\Longrightarrow f(y=0)=0 \Longrightarrow \boxed{E=-F}$$

Tenemos:

$$U(y)=\begin{cases} U_0 & \text{si} \quad y > 2a \\ U_0\left(\frac{y}{a}-1\right) & \text{si} \quad a < y < 2a \\ 0 & \text{si} \quad 0 < y < a \end{cases} \qquad f(y)=\begin{cases} Ae^{-ky} & \text{si } y > 2a \\ \tilde{C}e^{-ky}+De^{ky} & \text{si } a < y < 2a \\ Ee^{-ky}+Fe^{ky} & \text{si } 0 < y < a \end{cases}$$

Ahora planteamos la interfaz inferior (y=a):

(4) $$\Delta\left[U'(y)f(y)-(U(y)-c)f'(y)\right]|_{y=a}=0$$

$$\frac{U_0}{a}(\tilde{C}e^{-ka}+De^{ka})-(0-c)k(-\tilde{C}e^{-ka}+De^{ka})=kc\left(-E^{-ka}+Fe^{ka}\right)$$

$$\boxed{\tilde{C}e^{-ka}\left(\frac{U_0}{a}-ck\right)+De^{ka}\left(\frac{U_0}{a}+ck\right)=-Ekc\left(e^{-ka}+e^{ka}\right)}$$

(5) $$\Delta\left[\frac{f(y)}{U(y)-c}\right]|_{y=a}=0$$

$$\frac{\tilde{C}e^{-ka}+De^{ka}}{-c}=\frac{Ee^{-ka}-Ee^{ka}}{-c} \implies \boxed{\tilde{C}e^{-ka}+De^{ka}=E(e^{-ka}-e^{ka})}$$

Planteamos el sistema matricial:

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} k(U_0-c)e^{-2ka} & -e^{-2ka}\left(\frac{U_0}{a}+(U_0-c)k\right) & -e^{2ka}\left(\frac{U_0}{a}-(U_0-c)k\right) & 0 \\ e^{-2ka} & -e^{-2ka} & -e^{2ka} & 0 \\ 0 & e^{-ka}\left(\frac{U_0}{a}-ck\right) & e^{ka}\left(\frac{U_0}{a}+ck\right) & kc\left(e^{-ka}+e^{ka}\right) \\ 0 & e^{-ka} & e^{ka} & -e^{-ka}+e^{ka} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ \widetilde{C} \\ D \\ E \end{pmatrix}=0$$

Planteamos que el determinante se anule:

$$\det\{M\}=k(U_0-c)e^{-2ka}\Bigg[-e^{-2ka}\left(e^{ka}\left(\frac{U_0}{a}+ck\right)(-e^{-ka}+e^{ka})-e^{ka}kc\left(e^{-ka}+e^{ka}\right)\right)$$
$$+e^{2ka}\left(e^{-ka}\left(\frac{U_0}{a}-ck\right)(-e^{-ka}+e^{ka})-e^{-ka}kc\left(e^{-ka}+e^{ka}\right)\right)\Bigg]$$
$$-e^{2ka}\Bigg[-e^{-2ka}\left(\frac{U_0}{a}+(U_0-c)k\right)\left(e^{ka}\left(\frac{U_0}{a}+ck\right)(-e^{-ka}+e^{ka})-e^{ka}kc\left(e^{-ka}+e^{ka}\right)\right)$$
$$+e^{2ka}\left(\frac{U_0}{a}-(U_0-c)k\right)\left(e^{-ka}\left(\frac{U_0}{a}-ck\right)(-e^{-ka}+e^{ka})-e^{-ka}kc\left(e^{-ka}+e^{ka}\right)\right)\Bigg]=0$$

Tip: simplificar al máximo esta expresión, no mandarse a hacer distributiva directo. Saquemos de factor común los términos de color.

$$\left(e^{ka}\left(\frac{U_0}{a}+ck\right)(-e^{-ka}+e^{ka})-e^{ka}kc\left(e^{-ka}+e^{ka}\right)\right)\left[-k(U_0-c)e^{-4ka}+\left(\frac{U_0}{a}+(U_0-c)k\right)\right]$$

$$+\left(e^{-ka}\left(\frac{U_0}{a}-ck\right)(-e^{-ka}+e^{ka})-e^{-ka}kc\left(e^{-ka}+e^{ka}\right)\right)\left[k(U_0-c)-e^{4ka}\left(\frac{U_0}{a}-(U_0-c)k\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow\left(e^{ka}\left(\frac{U_0}{a}+ck\right)\sinh(ka)-e^{ka}kc\cosh(ka)\right)\left[k(U_0-c)(-e^{-4ka}+1)+\frac{U_0}{a}\right]$$

$$+\left(e^{-ka}\left(\frac{U_0}{a}-ck\right)\sinh(ka)-e^{-ka}kc\cosh(ka)\right)\left[k(U_0-c)(1+e^{4ka})-e^{4ka}\frac{U_0}{a}\right]=0$$

$$\Rightarrow\left(e^{ka}\sinh(ka)\frac{U_0}{a}+ck\cancel{e^{ka}}\overbrace{(\sinh(ka)-\cosh(ka))}^{-\cancel{e^{-ka}}}\right)\left[k(U_0-c)(-e^{-4ka}+1)+\frac{U_0}{a}\right]$$

$$+\left(e^{-ka}\sinh(ka)\frac{U_0}{a}-ck\cancel{e^{-ka}}\underbrace{(\sinh(ka)+\cosh(ka))}_{\cancel{e^{ka}}}\right)\left[k(U_0-c)(1+e^{4ka})-e^{4ka}\frac{U_0}{a}\right]=0$$

$$\left(e^{ka}\sinh(ka)\frac{U_0}{a}-ck\right)\left[k(U_0-c)(-e^{-4ka}+1)+\frac{U_0}{a}\right]$$

$$+\left(e^{-ka}\sinh(ka)\frac{U_0}{a}-ck\right)\left[k(U_0-c)(1+e^{4ka})-e^{4ka}\frac{U_0}{a}\right]=0$$

$$\left(e^{ka}\sinh(ka)\frac{U_0}{a}-ck\right)\left[ck(e^{-4ka}-1)-kU_0e^{-4ka}+kU_0+\frac{U_0}{a}\right]$$

$$+\left(e^{-ka}\sinh(ka)\frac{U_0}{a}-ck\right)\left[-ck(1+e^{4ka})+kU_0+kU_0e^{4ka}-e^{4ka}\frac{U_0}{a}\right]=0$$

Resolvemos la cuadrática y despejamos c=f(k).
Si Im(c) # 0 para algún k→ el flujo es inestable para ese k.

Veamos el caso particular de k=1/a.

$$\left(e^{1}\sinh(1)\frac{U_0}{a}-\frac{c}{a}\right)\left[\frac{c}{a}(e^{-4}-1)-\frac{U_0}{a}e^{-4}+\frac{2U_0}{a}\right]+\left(e^{-1}\sinh(1)\frac{U_0}{a}-\frac{c}{a}\right)\left[-\frac{c}{a}(1+e^{4})+\frac{U_0}{a}\right]=0$$

→ vuelo todas las a...

Caso particular de k=1/a:

$$\left(e^1\sinh(1)U_0 - c\right)\left[c(e^{-4}-1) - U_0e^{-4} + 2U_0\right] + \left(e^{-1}\sinh(1)U_0 - c\right)\left[-c(1+e^4) + U_0\right] = 0$$

$$\Rightarrow ce^1\sinh(1)U_0(e^{-4}-1) - \sinh(1)U_0^2e^{-3} + 2e^1\sinh(1)U_0^2 + -c^2(e^{-4}-1) + cU_0e^{-4} - 2cU_0$$
$$+ -ce^{-1}\sinh(1)U_0(1+e^4) + e^{-1}\sinh(1)U_0^2 + c^2(1+e^4) - cU_0 = 0$$

Término cuadrático: $c^2(2\sinh(4)+2) \implies \boxed{A = 2\sinh(4) + 2 \simeq 56,58}$

Término lineal: $c\left[2\sinh(1)U_0\Big(\cosh(3) - \cosh(1)\Big) + U_0e^{-4} - 3U_0\right]$

$$\implies \boxed{B = 2\sinh(1)U_0\Big(\cosh(3) - \cosh(1)\Big) + U_0e^{-4} - 3U_0 \simeq 17,05U_0}$$

Término constante: $\boxed{C = -\sinh(1)U_0^2e^{-3} + 2e^1\sinh(1)U_0^2 + e^{-1}\sinh(1)U_0^2 \simeq 6,76U_0^2}$

$$c_{1,2} = \frac{\omega_{1,2}}{k} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \implies B^2 - 4AC \simeq -1239.22U_0^2 \implies \boxed{\omega \in \mathrm{Im}}$$