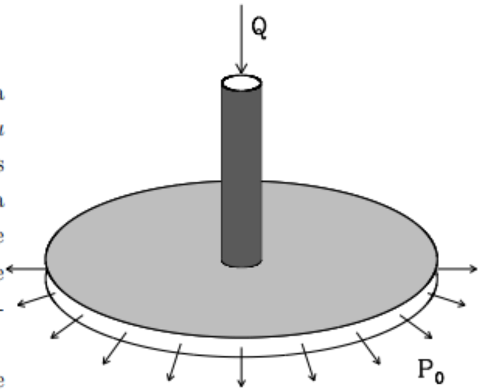
Problema 2



Por un caño de radio R_1 fluye en forma estacionaria un líquido newtoniano incompresible de viscosidad μ con caudal Q. Dicho caño descarga entre dos discos concéntricos transversales de radio R_2 separados una distancia L, como se muestra en la figura. Considere que entre los discos se establece un flujo radial desde R_1 hasta la salida en R_2. Se desprecia el efecto gravitatorio en el flujo entre los discos.

a) Escriba las tres componentes de la ecuación de Navier – Stokes para el flujo entre los discos (use coordenadas adecuadas para la simetría del problema).

b) A partir de la ecuación de continuidad (o condición de incompresibilidad en este caso) encuentre la dependencia del campo de velocidades $\vec{u} = u_r(r,z)\check{\mathbf{r}}$ con la coordenada radial r.

c) Considerando un flujo laminar (desprecie el término convectivo en la ecuación de Navier – Stokes), encuentre el campo de velocidades (*Ayuda: Calcule el campo de velocidades en función del gradiente de presiones y luego use la conservación del caudal*).

a) $\underline{u}(r,z) = u_r \hat{r}$ $\Rightarrow$

2.10 Ecuación de Navier-Stokes con ν y ρ constantes; sin fuerzas externas

$$\cancel{\frac{\partial u_r}{\partial t}} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,u_r - \cancel{\frac{u_\theta^2}{r}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \cancel{\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}}\right)$$

$$\cancel{\frac{\partial u_\theta}{\partial t}} + \cancel{(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,u_\theta} + \cancel{\frac{u_r u_\theta}{r}} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\cancel{\nabla^2 u_\theta} + \cancel{\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}} - \cancel{\frac{u_\theta}{r^2}}\right)$$

$$\cancel{\frac{\partial u_z}{\partial t}} + \cancel{(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,u_z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \cancel{\nu\nabla^2 u_z}$$

donde

$$\mathbf{u}\cdot\nabla = u_r\frac{\partial}{\partial r} + \cancel{\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}} + \cancel{u_z\frac{\partial}{\partial z}}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$\hat{r}$) $u_r\,\partial_r u_r = -\frac{1}{\rho}\partial_r p + \nu\left[\frac{1}{r}\partial_r\left(r\,\partial_r u_r\right) + \partial_{zz} u_r\right] - \nu\frac{u_r}{r^2}$

$\hat{\theta}$) $0 = \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}$

$\hat{z}$ $0 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$

b) $\frac{1}{r}\,\partial_r\left(\rho\, r\, u_r\right) = 0$

$\partial_r\left(r\,u_r\right) = 0$

$$\boxed{u_r = \frac{C(z)}{r}}$$

$$0 = \cancel{u_r \partial_r u_r} = -\frac{1}{\rho}\partial_r p + \nu\left[\frac{1}{r}\partial_r\left(r\,\partial_r u_r\right) + \partial_{zz}u_r\right] - \nu\frac{u_r}{r^2}$$

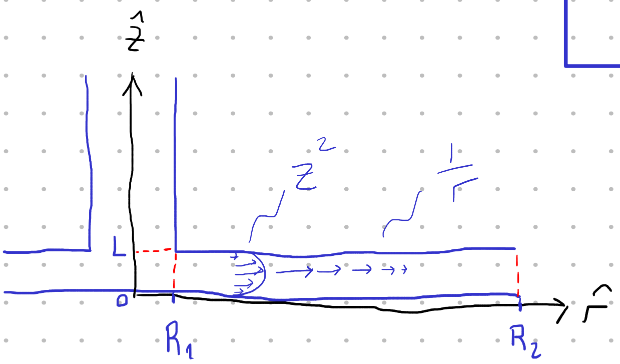
$$\frac{1}{\rho}\partial_r p = \nu\,\cancel{\frac{C(z)}{r^3}} + \nu\,\frac{\partial_{zz}C(z)}{r} - \nu\,\cancel{\frac{C(z)}{r^3}}$$

$$u_r = \frac{C(z)}{r}$$

$$\partial_r u_r = -\frac{C(z)}{r^2}$$

$$\frac{r}{\mu}\partial_r p = \partial_{zz}C(z)$$

$$\boxed{C(z) = \frac{r}{2\mu}\partial_r p\, z^2 + A z + B}$$



$$\begin{cases} C(z=0) = 0 \\ C(z=L) = 0 \end{cases}$$

$$u_r = \frac{C(z)}{r}$$

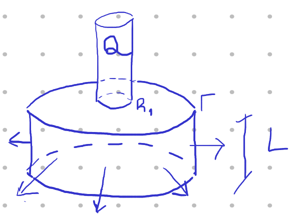
$$C(z=0) = B = 0$$

$$C(z=L) = \frac{r}{2\mu}\partial_r p\, L^{\cancel{2}} + A\,\cancel{L} = 0$$

$$A = -\frac{r}{2\mu}\partial_r p\, L$$

$$C(z) = \frac{r}{2\mu}\partial_r p\left(z^2 - L z\right)$$

$$\boxed{u_r(r,z) = \frac{\partial_r p}{2\mu}\left(z^2 - L z\right)}$$



$$Q = 2\pi r\int_0^L u_r(r,z)\,dz$$

$$Q = 2\pi r \int_0^L \frac{\partial_r p}{2\mu}\left(z^2 - Lz\right) dz$$

$$Q = \cancel{2}\pi r \frac{\partial_r p}{\cancel{2}\mu}\left(\frac{z^3}{3} - \frac{L}{2} z^2\right)\Bigg|_0^L$$

$$= \frac{\cancel{2}\pi r}{\mu} \partial_r p \, L^3 \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)}_{-\frac{1}{6}} = -\frac{\pi r L^3}{6\mu} \partial_r p = Q$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{Q 6\mu}{\pi r L^3} \quad Q \Rightarrow \int_p^{p_0} dp = -\frac{Q 6\mu}{\pi L^3} \int_r^{R_2} \frac{1}{r} dr$$

$$p_0 - p = -\frac{Q 6\mu}{\pi L^3} \ln\left(\frac{R_2}{r}\right)$$

$$\boxed{P(r) = P_0 + \frac{Q 6\mu}{\pi L^3} \ln\left(\frac{R_2}{r}\right)} \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

$$\partial_r P = -\frac{Q 6\mu}{\pi L^3} \frac{1}{r}$$

$$\boxed{\underline{u}(r, z) = \frac{3Q}{\pi r} \frac{\left(zL - z^2\right)}{L^3}}$$