

Ejercicio 1

(a) El primer inciso nos pide calcular el caudal volumétrico Q y considerar que el mismo depende de ν . Una forma simple de darnos cuenta de por qué esta hipótesis es plausible, es pensar en el rol que cumple la viscosidad en este sistema, ya que sin viscosidad no podríamos tener fluido pegado a la varilla cilíndrica. Pero si consideramos solo μ , a la hora de calcular el caudal no podremos anular la masa en forma no trivial, con lo cual tendremos que considerar la densidad ρ . También se puede pensar en que si el fluido es estacionario, como el movimiento es debido a la aceleración de la gravedad, la única fuerza que puede oponerse a la aceleración es el término de la viscosidad cinemática.

Hay varias formas de calcular el caudal Q con análisis dimensional, algunas más fiables que otras. Sin embargo se consideraron correctas las que cumplían con las hipótesis válidas. Este no es el caso de los que consideraron que el caudal depende de la presión P_0 (el sistema no tiene gradiente de presión, está completamente rodeado por P_0) o los que no llegaron a las unidades correctas.

En este resuelto ofrecemos una forma de calcularlo. Los parámetros de los cuales depende el caudal serían R , δ , g y ν , y teniendo en cuenta que dos de ellos tienen las mismas dimensiones, podemos construir un primer número Π como $\Pi = \delta/R$. El otro número Π lo construimos utilizando la magnitud física a determinar

$$f(Q, g, R, \nu) = 0,$$

Donde vemos que además el caudal dependerá de la gravedad. Tenemos 4 variables y 3 unidades, con lo cual tenemos un único número pi. Las unidades de cada variable son $[Q] = L^3T^{-1}$, $[g] = LT^{-2}$, $[R] = L$ y $[\nu] = L^2T^{-1}$. En este caso nos quedará un parámetro libre, pero si consideramos que la velocidad estará dada por la relación entre la fuerza de la gravedad y la fuerza viscosa llegaremos a la siguiente expresión de caudal:

$$Q = \frac{g}{\nu} R^4 f(\delta/R).$$

(b) Ahora nos piden calcular el campo de velocidades $u_z(r)$. Si consideramos flujo laminar, simetría de rotación y de traslación la ecuación del sistema resulta:

$$0 = \nu \left[\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r) \right] u_z - g,$$

Que podemos integrar simplemente de la siguiente forma:

$$\partial_r (r \partial_r u_z) = \frac{g}{\nu} r = \partial_r \left(\frac{g}{2\nu} r^2 + A \right),$$

$$r \partial_r u_z = \frac{g}{2\nu} r^2 + A,$$

$$\partial_r u_z = \frac{g}{2\nu} r + \frac{A}{r} = \partial_r \left(\frac{g}{4\nu} r^2 + A \ln(r) + B \right),$$

$$u_z(r) = \frac{g}{4\nu} r^2 + A \ln(r) + B.$$

Ahora consideramos las condiciones de contorno. La primera es considerar que los elementos de fluido en contacto con el cilindro permanecen en reposo, esto equivale a $u_z(r = R) = 0$, de la que resulta:

$$B = -\frac{g}{4\nu} R^2 - A \ln(R).$$

Para el segundo contorno consideramos que la fuerza que ejerce cada fluido debe ser la misma, de lo que resulta:

$$\mu \partial_r u_z |_{r=R+\delta} = \mu_{aire} \partial_r u_z \approx 0.$$

De esta expresión resulta:

$$A = -\frac{g}{2\nu} (R + \delta)^2,$$

Entonces la expresión para la velocidad del flujo resulta:

$$u_z(r) = \frac{g}{4\nu} \left[(r^2 - R^2) - 2(R + \delta)^2 \ln \left(\frac{r}{R} \right) \right].$$

(c) Ahora nos piden calcular el valor de δ asumiendo que conocemos el caudal y bajo la hipótesis de que el radio del cilindro es mucho mayor al tamaño de la película de fluido, es decir $\delta/R \ll 1$. Comencemos calculando el caudal:

$$Q = 2\pi \int_{r=R}^{r=R+\delta} r u_z(r) (-\hat{z} \cdot \hat{z}) dr = -2\pi \int_{r=R}^{r=R+\delta} r \frac{g}{4\nu} \left[(r^2 - R^2) - 2(R + \delta)^2 \ln \left(\frac{r}{R} \right) \right] dr.$$

Acomodando bien los términos e integrando llegamos a la siguiente expresión:

$$Q = -\frac{\pi g R^4}{8\nu} \left\{ 4 \left(1 + \frac{\delta}{R} \right)^4 \ln \left(1 + \frac{\delta}{R} \right) - \frac{\delta}{R} \left(2 + \frac{\delta}{R} \right) \left[3 \left(1 + \frac{\delta}{R} \right)^2 - 1 \right] \right\}.$$

Reemplazando $\delta/R = \epsilon$ resulta:

$$Q = -\frac{\pi g R^4}{8\nu} \left\{ 4(1 + \epsilon)^4 \ln(1 + \epsilon) - \epsilon(2 + \epsilon)[3(1 + \epsilon)^2 - 1] \right\},$$

y podemos expandir cada término al orden mas bajo de ϵ , dando como resultado:

$$Q = -\frac{\pi g R^4}{8\nu} \left[4(1 + 4\epsilon + 6\epsilon^2 + 4\epsilon^3 + \epsilon^4) \left(\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{3} - \frac{\epsilon^4}{4} + \dots \right) - (4\epsilon + 14\epsilon^2 + 12\epsilon^3 + 3\epsilon^4) \right],$$

de donde obtenemos:

$$Q = -\frac{\pi g R^4}{8\nu} \left(\frac{16}{3} \epsilon^3 - \frac{11}{12} \epsilon^4 + \mathcal{O}(\epsilon^5) \right).$$

y teniendo en cuenta que $\epsilon = \delta/R \ll 1$, nos quedamos con el orden más bajo, del cual despejamos δ como

$$\delta^3 = -\frac{3Q\nu}{2\pi g R}$$

§ Problema 2

(a) Se tiene un fluido ideal con el perfil de velocidades

$$U(z) = \begin{cases} U_0 & \text{si } z > 2L \\ U_0 \left(\frac{z}{L} - 1\right) & \text{si } L < z < 2L \\ 0 & \text{si } 0 < z < L \end{cases} \quad (1)$$

en presencia de un contorno sólido en $z = 0$. Nos dicen que consideremos una perturbación al campo de velocidades dada por una función de corriente

$$\psi_k(x, z, t) = \phi(z)e^{i(kx - \omega t)} \quad , \quad \delta \vec{v} = \vec{\nabla} \psi \times (-\hat{y}). \quad (2)$$

Sabemos que la amplitud de la perturbación $\phi(z)$ debe cumplir la Ec. de Rayleigh, dada por

$$[U(z) - c] (\phi''(z) - k^2 \phi(z)) - U''(z) \phi(z) = 0, \quad (3)$$

pero dado que U_0 es lineal a trozos, la misma se simplifica a

$$\phi''(z) - k^2 \phi(z) = 0. \quad (4)$$

Las soluciones de esta Ec. están dadas por una combinación lineal de exponenciales

$$\phi(z) = Ae^{-kz} + Be^{kz}. \quad (5)$$

La región completa estará caracterizada por

$$\phi(z) = \begin{cases} Ae^{-kz} + Be^{kz} & \text{si } z > 2L \\ \tilde{C}e^{-kz} + De^{kz} & \text{si } L < z < 2L \\ Ee^{-kz} + Fe^{kz} & \text{si } 0 < z < L \end{cases} \quad (6)$$

Con respecto a las relaciones de contorno, sabemos que la perturbación es local y por ende no puede diverger en el infinito. Por esta razón, pedimos

$$\phi(z) \rightarrow 0 \quad \text{en } z \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

Asimismo, sobre $z = 0$ tenemos un contorno sólido, por lo que la componente normal de la velocidad debe anularse y además tendremos una línea de corriente. Si utilizamos este último argumento de línea de corriente, debemos pedir que la componente imaginaria de la función corriente sea una constante, tal como estudiamos en las guías anteriores. Procediendo de tal modo, se tiene

$$\text{Im}[\psi(x, z = 0, t)] = \text{Im} \left[\phi(z = 0) e^{ik(x - ct)} \right] = \text{cte} \implies \phi(z = 0) = 0. \quad (8)$$

Por esta razón, llegamos a que $E = -F$. Juntando todas estas condiciones, la amplitud de la perturbación nos queda

$$\phi(z) = \begin{cases} Ae^{-kz} & \text{si } z > 2L \\ \tilde{C}e^{-kz} + De^{kz} & \text{si } L < z < 2L \\ E(e^{-kz} - e^{kz}) & \text{si } 0 < z < L \end{cases} \quad (9)$$

(b) En este inciso nos pedían simplemente plantear las condiciones de empalme correspondientes, a partir de las cuales uno puede obtener la relación de dispersión $\omega(k)$. Tenemos tres regiones diferenciadas, que deben exhibir continuidad tanto en la presión como en la velocidad. La condición de continuidad de la presión en la interfaz inferior se puede escribir como

$$\begin{aligned}
& \Delta [U'(z)\phi(z) - (U(z) - c)\phi'(z)]|_{z=L} = 0 \\
& \implies \frac{U_0}{L} (\tilde{C}e^{-kL} + De^{kL}) - (0 - c)k (-\tilde{C}e^{-kL} + De^{kL}) = kc (-E^{-kL} - Ee^{kL}) \\
& \implies \boxed{\tilde{C}e^{-kL} \left(\frac{U_0}{L} - ck \right) + De^{kL} \left(\frac{U_0}{L} + ck \right) = -Ekc (e^{-kL} + e^{kL})}.
\end{aligned} \tag{10}$$

En la interfaz superior el procedimiento es análogo

$$\begin{aligned}
& \Delta [U'(z)\phi(z) - (U(z) - c)\phi'(z)]|_{z=2L} = 0 \\
& \implies -(U_0 - c)(-k)Ae^{-2kL} = \frac{U_0}{L} (\tilde{C}e^{-2kL} + De^{2kL}) - (U_0 - c)k (-\tilde{C}e^{-2kL} + De^{2kL}) \\
& \implies \boxed{Ak(U_0 - c)e^{-2kL} = \tilde{C}e^{-2kL} \left(\frac{U_0}{L} + (U_0 - c)k \right) + De^{2kL} \left(\frac{U_0}{L} - (U_0 - c)k \right)}
\end{aligned} \tag{11}$$

Con respecto a la continuidad de la velocidad, debemos plantear

$$\begin{aligned}
\Delta \left[\frac{\phi(z)}{U(z) - c} \right] \Big|_{z=L} = 0 & \implies \boxed{\frac{\tilde{C}e^{-kL} + De^{kL}}{c} = \frac{E(e^{-kL} - e^{kL})}{c}} \\
\Delta \left[\frac{\phi(z)}{U(z) - c} \right] \Big|_{z=2L} = 0 & \implies \boxed{\frac{\tilde{C}e^{-2kL} + De^{2kL}}{U_0 - c} = \frac{Ae^{-2kL}}{U_0 - c}}
\end{aligned} \tag{12}$$

(c) Nos dicen que de las condiciones de empalme puede obtenerse una ecuación cuadrática en ω de la forma

$$a(kL)\omega^2 + b(kL)\frac{U_0}{L}\omega + d(kL)\left(\frac{U_0}{L}\right)^2 = 0. \tag{13}$$

A partir de la solución de esta cuadrática, sabremos si ω tiene una componente imaginaria y en consecuencia si el flujo presenta inestabilidades. La solución de la ecuación está dada por

$$\omega_{1,2} = \frac{-b(kL) \pm \frac{U_0}{L} \sqrt{b(kL)^2 - 4a(kL)d(kL)}}{2a(kL)}. \tag{14}$$

En consecuencia, si la función

$$g(kL) = \left(\frac{b(kL)}{2a(kL)} \right)^2 - \frac{d(kL)}{a(kL)} \tag{15}$$

es negativa, entonces el flujo es inestable. En el examen nos ayudaban dándonos el gráfico de esta $g(kL)$ en función de kL . Como se pueda apreciar, la función es negativa para perturbaciones que cumplen $0 < kL < 0.95$.

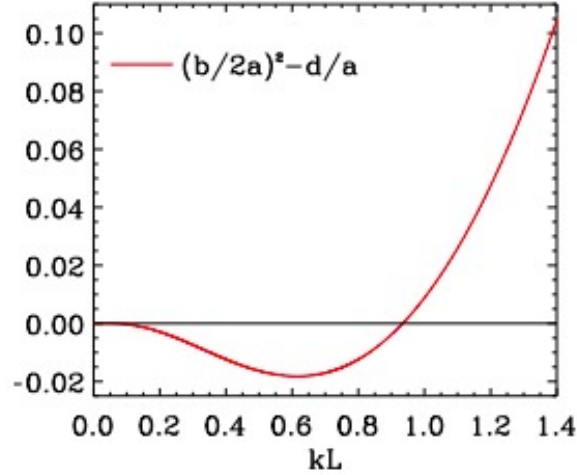


Figura 1: $g(kL)$ en función de kL .

El ejercicio nos pide considerar una perturbación dada por una superposición de modos normales de la forma

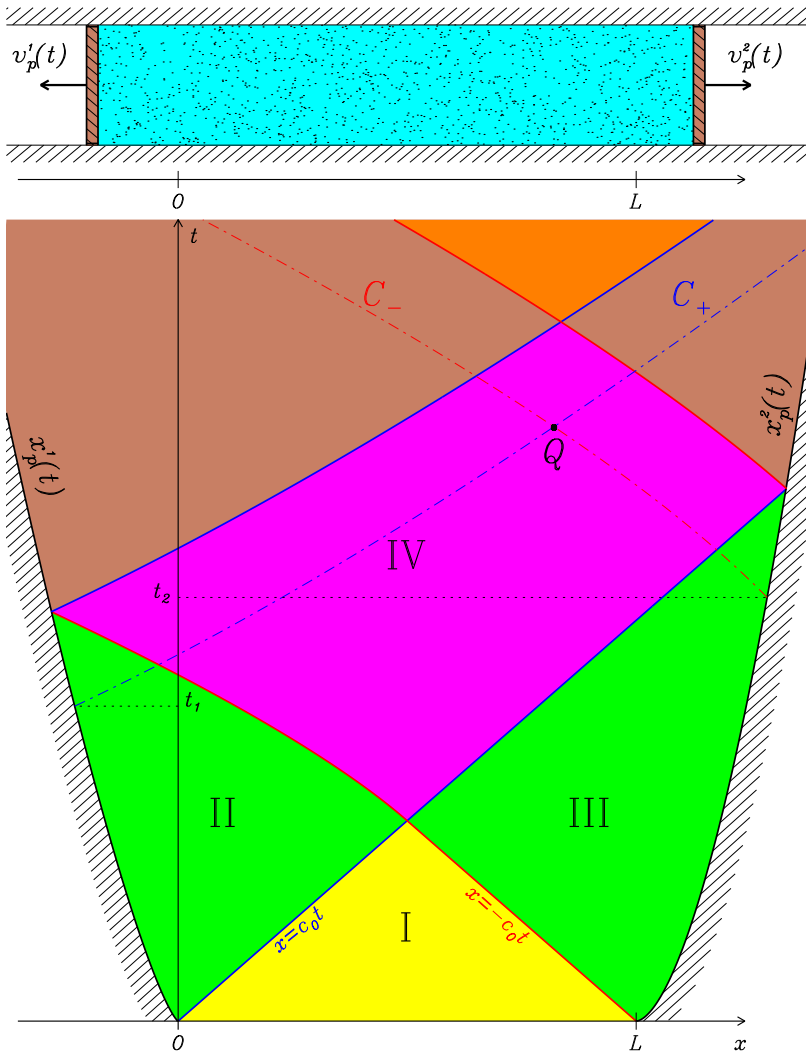
$$\psi(x, z, t) = \int_{0.7k_0}^{1.3k_0} \psi_k(x, z, t) L dk \quad , \quad k_0 L = 1.2. \quad (16)$$

Lo que esto nos está indicando es que la perturbación tiene componentes $k \in [0.7k_0, 1.3k_0]$. Pero en verdad a nosotros nos interesa el comportamiento en términos de la variable kL , puesto que es la información que nos muestra el gráfico. Usando el otro dato que nos da el inciso en relación a que $k_0 L = 1.2$, entonces tenemos que la variable $kL \in [0.84, 1.56]$. Como este intervalo tiene una intersección no nula con el intervalo donde la función $g(kL)$ es negativa, podemos concluir que ω tiene una componente imaginaria y que por lo tanto el flujo es inestable.

Con respecto a la tasa de crecimiento de la inestabilidad, la misma estará dada por la componente imaginaria de ω . Considerando que la perturbación tiene componentes $kL \in [0.84, 1.56]$, que la función $g(kL)$ es negativa entre $[0.84, 0.95]$ y que dentro de ese intervalo el valor donde es mayormente negativa es en $kL = 0.84$, podemos estimar a orden cero que la tasa de crecimiento de la inestabilidad estará dada por el valor que tome la función $g(kL)$ ahí mismo. Más en concreto, la tasa de inestabilidad será aproximadamente

$$i\gamma \sim \frac{U_0}{L} \sqrt{g(0.84)} \simeq i0.14 \frac{U_0}{L}. \quad (17)$$

§ Problema 3



Se tiene un gas ideal entre dos pistones inicialmente separados una distancia L con estado inicial uniforme $v = 0$ y $\rho = \rho_0$. A $t = 0$ los pistones comienzan a extraerse con velocidades prescritas $v_p^1(t)$ (pistón izquierdo) y $v_p^2(t)$ (pistón derecho), como se indica en la parte superior de la figura. El estado del gas se esquematiza en el plano $x - t$ en la parte inferior de la figura.

- Caracterice las regiones del plano $x - t$ identificadas como I, II y III; es decir, especifique si se trata de estado constante, onda simple Γ_- o Γ_+ , etc. ¿Cómo son las curvas C_+ y C_- en cada una de estas regiones? Justifique sus respuestas.
- Indique qué representan físicamente las curvas que limitan superiormente a la región IV.
- Considere el punto Q del plano

$x - t$. Suponga que lograron determinarse las curvas C_+ y C_- que pasan por ese punto, como se indica en la figura. Determine el estado del gas en el punto Q en función de condiciones iniciales y de la velocidad de los pistones en los tiempos indicados.

a) La región I está limitada superiormente por las curvas $x = c_0t$ y $x = L - c_0t$ (donde si $p = A\rho^\gamma$ entonces $c_0 = \sqrt{A\gamma\rho_0^{\gamma-1}}$), por lo que esta región es la del gas sin perturbar, teniendo en cuenta que dichas rectas llevan la perturbación generada por cada pistón al comenzar a moverse en $t = 0$. Entonces I es una región constante con $v = 0$ y $\rho = \rho_0$, y como en todas las regiones constantes las curvas C_+ y C_- están dadas por rectas, ya que las curvas surgen de

$$C_+ : \frac{dx}{dt} = v + c(\rho_0) = c(\rho_0) = \text{cte} \quad , \quad C_- : \frac{dx}{dt} = v - c(\rho_0) = -c(\rho_0) = \text{cte}' \quad .$$

La región II es adyacente al estado constante I, separada del mismo por una curva C_+ la cual es atravesada por las curvas C_- que transportan todas ellas un mismo valor del invariante Γ_- . Es por ello que sobre toda la región II, Γ_- es constante, lo que determina que esta región sea una onda simple

Γ_- . En esta región se verifica que sobre las curvas \mathcal{C}_+ , ambos invariantes, Γ_- y Γ_+ son constantes, lo cual implica que v y $c(\rho)$ son constantes, y como consecuencia las curvas \mathcal{C}_+ son rectas. Sobre las curvas \mathcal{C}_- lo único que podemos decir es que no son rectas.

Para la región III usamos un razonamiento similar que para la región II, donde ahora la curva que separa a la región del estado constante es una \mathcal{C}_- , y las curvas que atraviesan la frontera son las \mathcal{C}_+ . Debido a ello podemos decir que III es una onda simple Γ_+ en donde las curvas \mathcal{C}_- son rectas, pero no las \mathcal{C}_+ .

b) Notemos que la región IV está limitada inferiormente por la curva que representa a la perturbación debida al movimiento del pistón 1, a $t = 0$, viajando en el medio ya perturbado por el pistón 2 (y viceversa). Veamos entonces que las curvas que limitan superiormente la región son el reflejo en el pistón 2 de la perturbación iniciada en el pistón 1 a $t = 0$ (es una curva \mathcal{C}_-), y viceversa (es una curva \mathcal{C}_+).

c) Para este ítem es claro que si logramos determinar los valores Γ_+ y Γ_- que transportan las curvas \mathcal{C}_+ y \mathcal{C}_+ que pasan por el punto Q , sería inmediato hallar los valores de v_Q y ρ_Q . Llamemos P al punto del plano $x - t$ correspondiente a la posición del pistón 1 a $t = t_1$, entonces

$$\Gamma_-^I = -\frac{2c_0}{\gamma - 1} = \Gamma_-^P = v_p^1(t_1) - \frac{2c_P}{\gamma - 1} \implies c_P = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2}v_p^1(t_1) \quad .$$

Análogamente, si denominamos como R al punto del plano correspondiente a la posición del pistón 2 a $t = t_2$

$$\Gamma_+^I = \frac{2c_0}{\gamma - 1} = \Gamma_+^R = v_p^2(t_2) + \frac{2c_R}{\gamma - 1} \implies c_R = c_0 - \frac{\gamma - 1}{2}v_p^2(t_2) \quad .$$

A través de la curva \mathcal{C}_+ que pasa por Q se transporta

$$\Gamma_+^P = v_p^1(t_1) + \frac{2c_P}{\gamma - 1} = 2v_p^1(t_1) + \frac{2c_0}{\gamma - 1} \quad ,$$

y a través de la curva \mathcal{C}_- que pasa por Q se transporta

$$\Gamma_-^R = v_p^2(t_2) - \frac{2c_R}{\gamma - 1} = 2v_p^2(t_2) - \frac{2c_0}{\gamma - 1} \quad .$$

De esto se obtiene

$$v_Q = \frac{\Gamma_+^P + \Gamma_-^R}{2} = v_p^1(t_1) + v_p^2(t_2) \quad , \quad c_Q = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\Gamma_+^P - \Gamma_-^R}{2} = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2}[v_p^1(t_1) - v_p^2(t_2)] \quad .$$

Para finalizar, de la última relación se puede obtener la densidad

$$\rho_Q = \left\{ \frac{c_0 + \frac{\gamma - 1}{2}[v_p^1(t_1) - v_p^2(t_2)]}{\sqrt{A\gamma}} \right\}^{\frac{2}{\gamma - 1}} \quad .$$