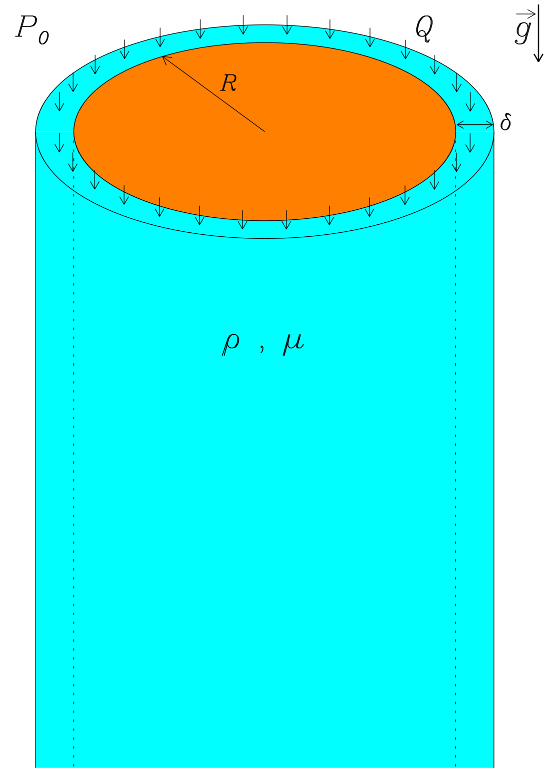
Estructura de la Materia 1 – 2^{do} Parcial

2^{do} Cuatrimestre 2021

Problema 1

Un líquido Newtoniano de viscosidad μ y densidad ρ uniformes cae verticalmente y en forma estacionaria por la superficie de un cilindro infinitamente largo de radio R, formando una película delgada de espesor δ, axisimétrica y uniforme. El fluido está en contacto con aire estacionario a presión P_0.

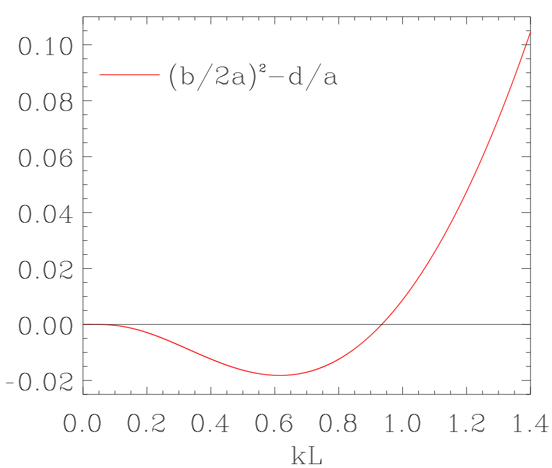


a) Para esta configuración encuentre por análisis dimensional el caudal volumétrico Q considerando que el mismo depende de ν y no de μ y ρ separadamente. Explique por qué esta hipótesis es plausible.

b) Encuentre el campo de velocidades $u_z(r)$.

c) Suponiendo ahora que el caudal Q está predeterminado, halle el valor de δ en función de los parámetros del problema bajo la hipótesis que $\delta/R \equiv \epsilon \ll 1$. *Ayuda: A partir de lo hallado en* **(b)** *halle la expresión del caudal, desarrolle al orden más bajo en ϵ (no nulo) y despeje.*

Problema 2



Se tiene un fluido ideal con el perfil de velocidades

$$U(z) = \begin{cases} U_0 & \text{si} \quad z > 2L \\ U_0\left(\frac{z}{L} - 1\right) & \text{si} \quad L < z < 2L \\ 0 & \text{si} \quad 0 < z < L \end{cases} \quad ,$$

con la presencia de un contorno sólido en $z = 0$.

a) Considere una perturbación al campo de velocidades dada por una función de corriente

$$\psi_k(x,z,t) = \phi(z)e^{ik(x-ct)} \quad , \quad \delta\vec{v} = \vec{\nabla}\psi \times (-\hat{y}) \quad .$$

Escriba la forma que tendrá $\phi(z)$ en cada una de las regiones de acuerdo a las condiciones de contorno.

b) Plantee las condiciones de empalme correspondientes de las cuales es posible obtener la relación de dispersión $\omega = \omega(k)$.

c) De las condiciones de empalme puede obtenerse una ecuación cuadrática en ω de la forma

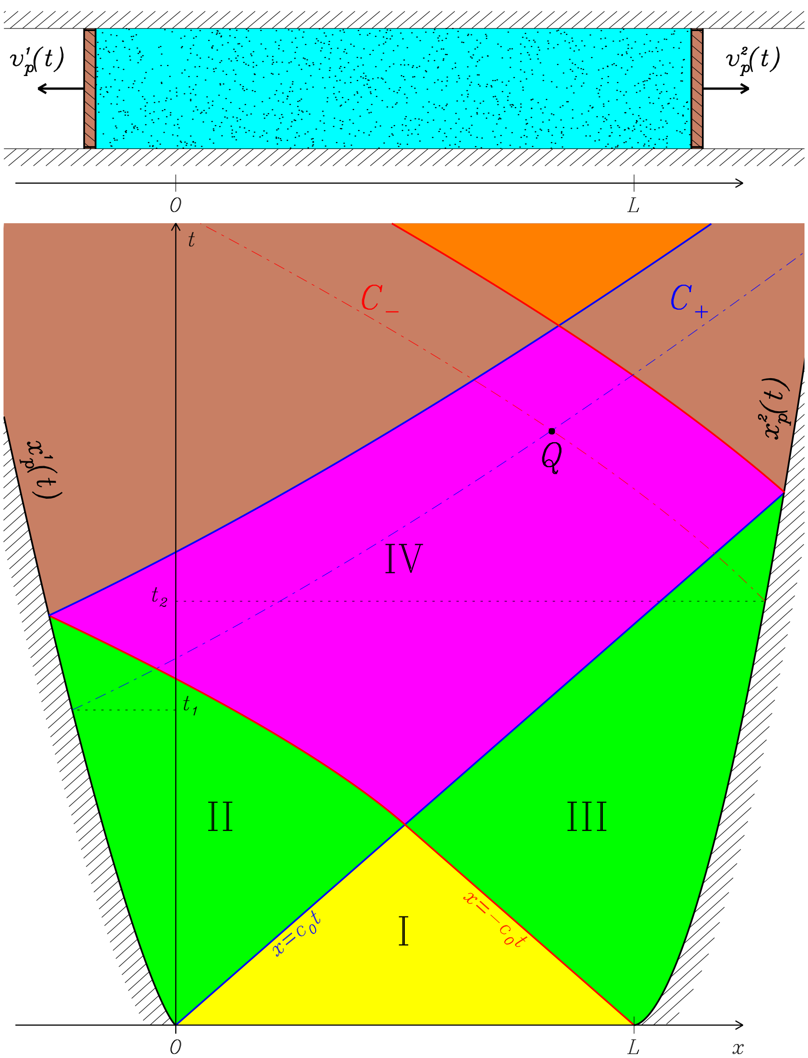
$$\mathrm{a}(kL)\omega^2 + \mathrm{b}(kL)\frac{U_0}{L}\omega + \mathrm{d}(kL)\left(\frac{U_0}{L}\right)^2 = 0 \quad ,$$

donde las funciones de la variable adimensional kL, $\mathrm{a}(kL)$, $\mathrm{b}(kL)$ y $\mathrm{d}(kL)$ son también adimensionales. Considere una perturbación del campo de velocidades dada por una función de corriente que puede expresarse por una superposición de modos normales

$$\psi(x,z,t) = \int_{0.7k_0}^{1.3k_0} \psi_k(x,z,t) L dk \quad , \quad k_0 L = 1.2 \quad .$$

En base al gráfico explique por qué esta perturbación desestabiliza el flujo y halle (en forma aproximada) la tasa de crecimiento de la inestabilidad en unidades de U_0/L.

Problema 3



Se tiene un gas ideal entre dos pistones inicialmente separados una distancia L con estado inicial uniforme $v = 0$ y $\rho = \rho_0$. A $t = 0$ los pistones comienzan a extraerse con velocidades prescriptas $v_p^1(t)$ (pistón izquierdo) y $v_p^2(t)$ (pistón derecho), como se indica en la parte superior de la figura. El estado del gas se esquematiza en el plano $x - t$ en la parte inferior de la figura.

a) Caracterice las regiones del plano $x - t$ identificadas como I, II y III; es decir, especifique si se trata de estado constante, onda simple Γ_- o Γ_+, etc. ¿Cómo son las curvas $\mathcal{C}_+$ y $\mathcal{C}_-$ en cada una de estas regiones? Justifique sus respuestas.

b) Indique qué representan físicamente las curvas que limitan superiormente a la región IV.

c) Considere el punto Q del plano $x - t$. Suponga que lograron determinarse las curvas $\mathcal{C}_+$ y $\mathcal{C}_-$ que pasan por ese punto, como se indica en la figura. Determine el estado del gas en el punto Q en función de condiciones iniciales y de la velocidad de los pistones en los tiempos indicados.