Estructura de la Materia 1 – 2^{do} Recuperatorio

2^{do} Cuatrimestre 2021

Problema 1

Dos planos paralelos separados una distancia d encierran un fluido de viscosidad dinámica μ que puede considerarse incompresible. El plano inferior se desplaza con velocidad U_1 constante en la dirección $\hat{x}$, mientras que el superior lo hace con velocidad U_2 constante en la dirección $\hat{y}$. Además hay un gradiente de presiones constante $\mathcal{P}$ en la dirección $\hat{x}$. Existe gravedad en la dirección $\hat{z}$.

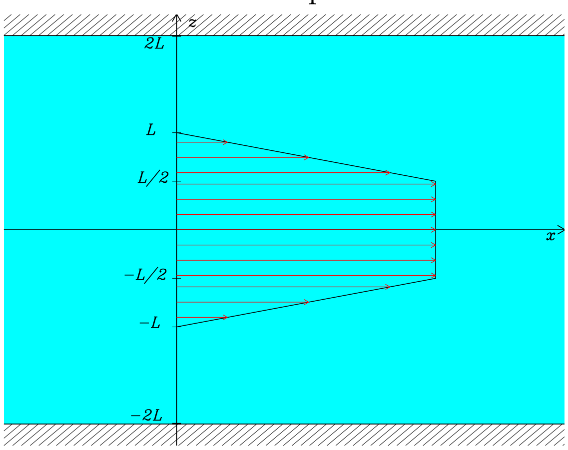
a) Obtenga la velocidad del fluido como función de z (tome $z = 0$ en el plano inferior).

b) Calcule la fuerza viscosa por unidad de área ejercida por el plano superior sobre el fluido.

c) Halle por análisis dimensional la altura z_0 que maximiza el módulo de la velocidad del fluido (*Ayuda: considere que los parámetros* $\mathcal{P}$ *y* μ *sólo aparecen en la forma* $\mathcal{P}/\mu$).

Problema 2

Se tiene un flujo plano-paralelo ideal en la configuración indicada en la figura, donde el perfil de velocidades está dado por



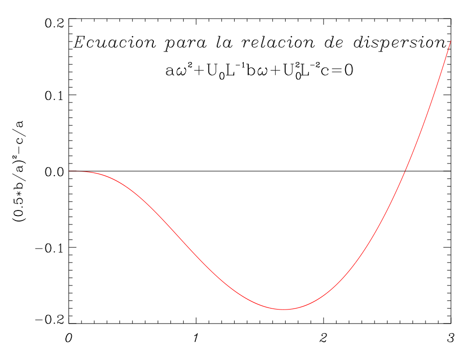
$$U(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad L \leq z \leq 2L \\ \frac{2U_0}{L}(L - z) & \text{si} \quad L/2 \leq z \leq L \\ U_0 & \text{si} \quad -L/2 \leq z \leq L/2 \\ \frac{2U_0}{L}(L + z) & \text{si} \quad -L \leq z \leq -L/2 \\ 0 & \text{si} \quad -2L \leq z \leq -L \end{cases} .$$

a) Considere una perturbación al campo de velocidades dada por una función de corriente

$$\psi(x, z, t) = \phi(z) e^{ik(x-ct)} \quad , \quad \delta\vec{v} = \vec{\nabla}\psi \times (-\hat{y}) \quad .$$

Tome sólo autofunciones $\phi(z)$ pares. Escriba la forma que tendrá $\phi(z)$ en cada una de las regiones considerando las condiciones de contorno.

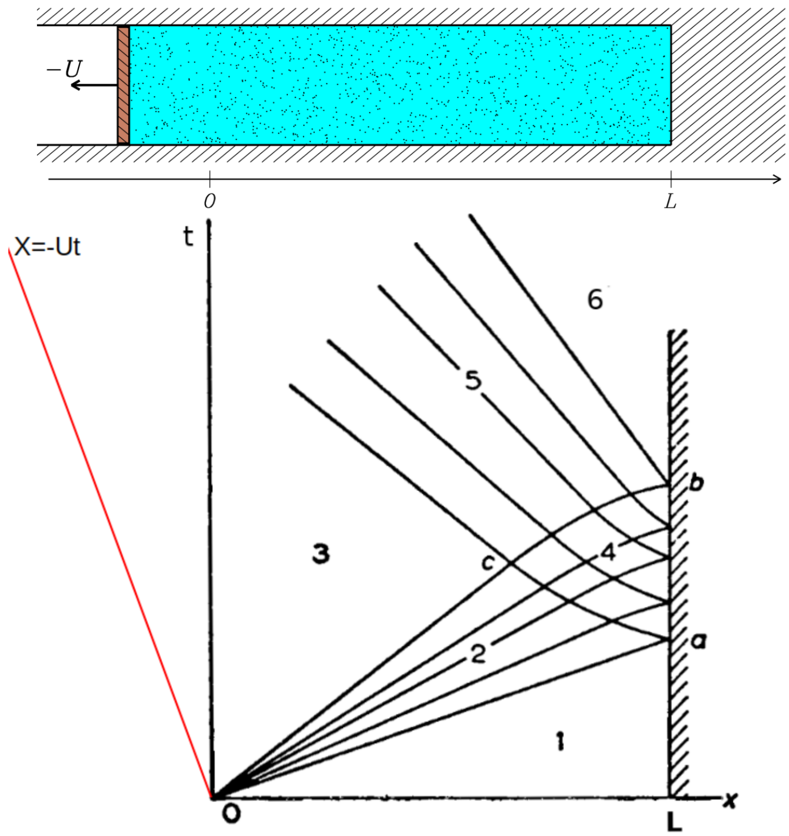
b) A partir de las condiciones de empalme encuentre un sistema homogéneo de 2×2 en función de los coeficientes de $\phi(z)$ en la región $L/2 < z < L$, el cual permite establecer la relación de dispersión para la perturbación.



c) Suponga que la perturbación está dada por un paquete de ondas que en el espacio k está centrado en $k_0 = 3L^{-1}$ y de semiancho $\Delta k = (8L)^{-1}$. Analice si esta perturbación desestabilizará el fluido en base al gráfico de la derecha.

Problema 3

Se tiene un gas ideal politrópico entre una pared en $x = L$ y un pistón con posición inicial $x = 0$ que se retira con velocidad uniforme $-U$, como indica la parte superior de la figura.



El gas inicialmente está en reposo y con densidad ρ_0 y presión p_0 uniformes. El estado del gas se esquematiza en el plano $x - t$ en la parte inferior de la figura.

a) Explique por qué las regiones 1, 3 y 6 son estados constantes. Identifique los estados 2 y 5 como ondas simples Γ_- y Γ_+. Justifique.

b) La región 4 es una región difícil de tratar analíticamente, porque es una zona de interacción entre las perturbaciones originadas en el pistón y el rebote de las mismas en la pared. Sin embargo puede obtenerse la expresión exacta para la separatriz entre la región 2 y 4 explotando el hecho de que se conoce la expresión de las curvas $\mathcal{C}_+$ en la región 2 y que la separatriz es una curva $\mathcal{C}_-$. Para ello, proceda siguiendo los siguientes pasos:

- Considerando que el valor del invariante Γ_- que transporta la curva $\mathcal{C}_-$ que es separatriz es $\Gamma_- = -2c_0/(\gamma - 1) = -2\sqrt{\gamma p_0/\rho_0}/(\gamma - 1)$, encuentre una expresión $c = c(v)$ válida sobre la separatriz.

- De la expresión de las curvas $\mathcal{C}_+$ en la región 2, $x/t = v + c$, reemplace con la expresión $c(v)$ hallada en el ítem anterior y despeje finalmente $v = v(x, t)$.

- Con las expresiones de $v(x, t)$ y $c(v(x, t))$ obtenidas en los ítems anteriores escriba una ecuación diferencial para la curva $\mathcal{C}_-$ separatriz

  $$\frac{dx}{dt} = v - c = f(x, t) \quad ,$$

  e integre, considerando como condición incial que la curva $\mathcal{C}_-$ emana de la pared, o sea en $x = L$, al tiempo $t_0 = L/c_0$. (Ayuda: Para una ecuación diferencial de la forma $\dot{x} + P(t)x = K$, con K =cte. la solución general es $x(t) = [K \int \exp(\int P(t)dt)\, dt + A] \exp(-\int P(t)dt)$, donde la constante A surge de las condiciones iniciales).