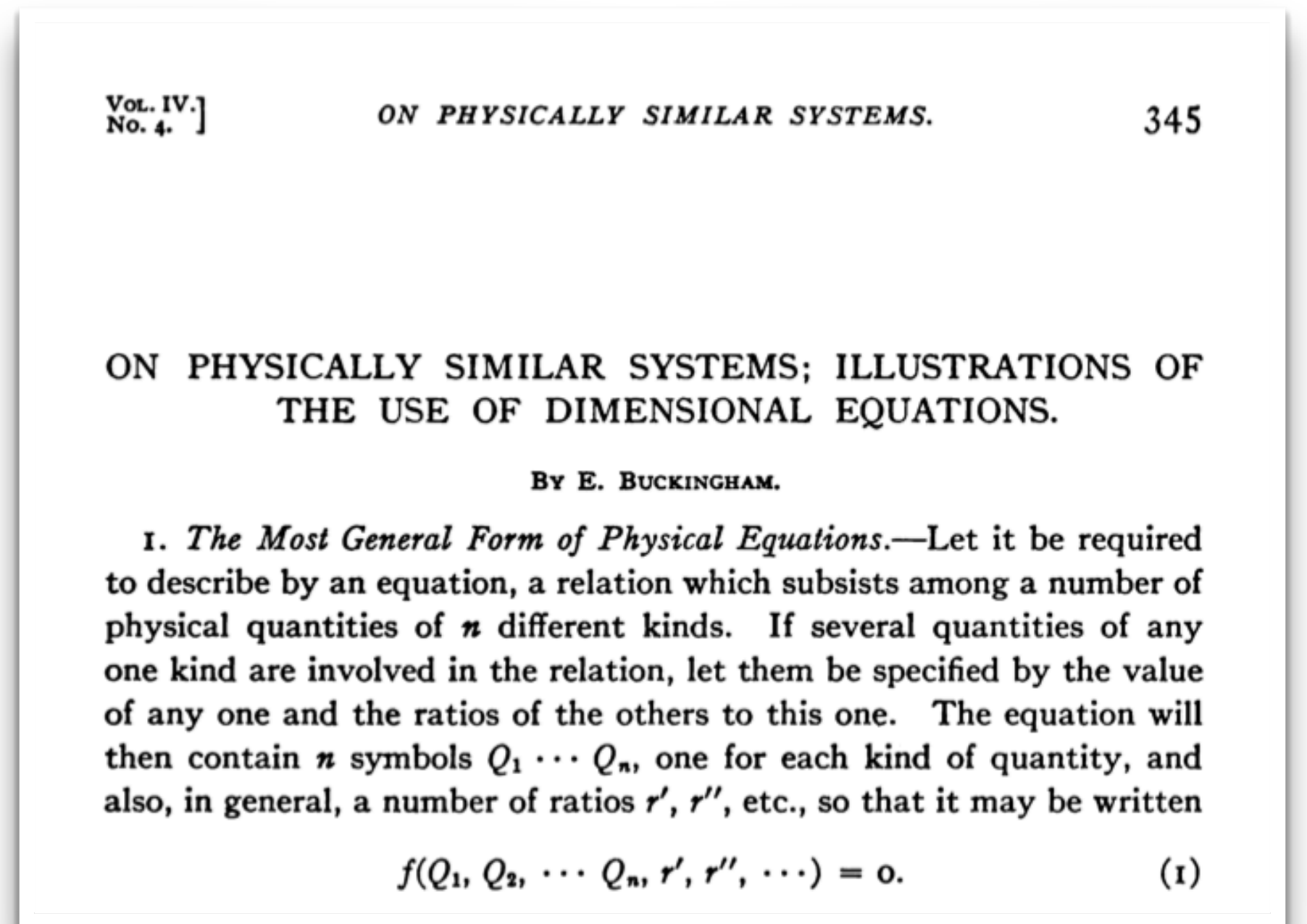


Repaso de Clase 9

- Análisis dimensional >>> Teorema Pi de Buckingham
- $a = f(a_1, \dots, a_n)$, k unidades >>> $\Pi = F(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k})$
- El teorema no dice de que variables depende la incógnita
- Tampoco dice cuales son los números Pi adimensionales (solo dice cuantos)
- Ejemplos. Flujo de Poiseuille.



Buckingham, E. 1914, Phys. Rev. 4, 345-376.

Inestabilidades y ondas

- El análisis de estabilidad/inestabilidad de un sistema, se realiza alrededor de un equilibrio determinado.
- Matemáticamente, si la cantidad $f(r, t)$ expresa el estado del sistema:
$$f(r, t) = f_0(r) + \delta f(r, t)$$

$\swarrow$
equilibrio

$\searrow$
perturbación
- $f(r, t) = f_0(r)$ debe ser solución de las ecuaciones, para ser considerado un estado de equilibrio.

- Si perturbamos (separamos) ese equilibrio:

$$\|\delta f(r, t)\| \ll \|f_0(r)\|$$

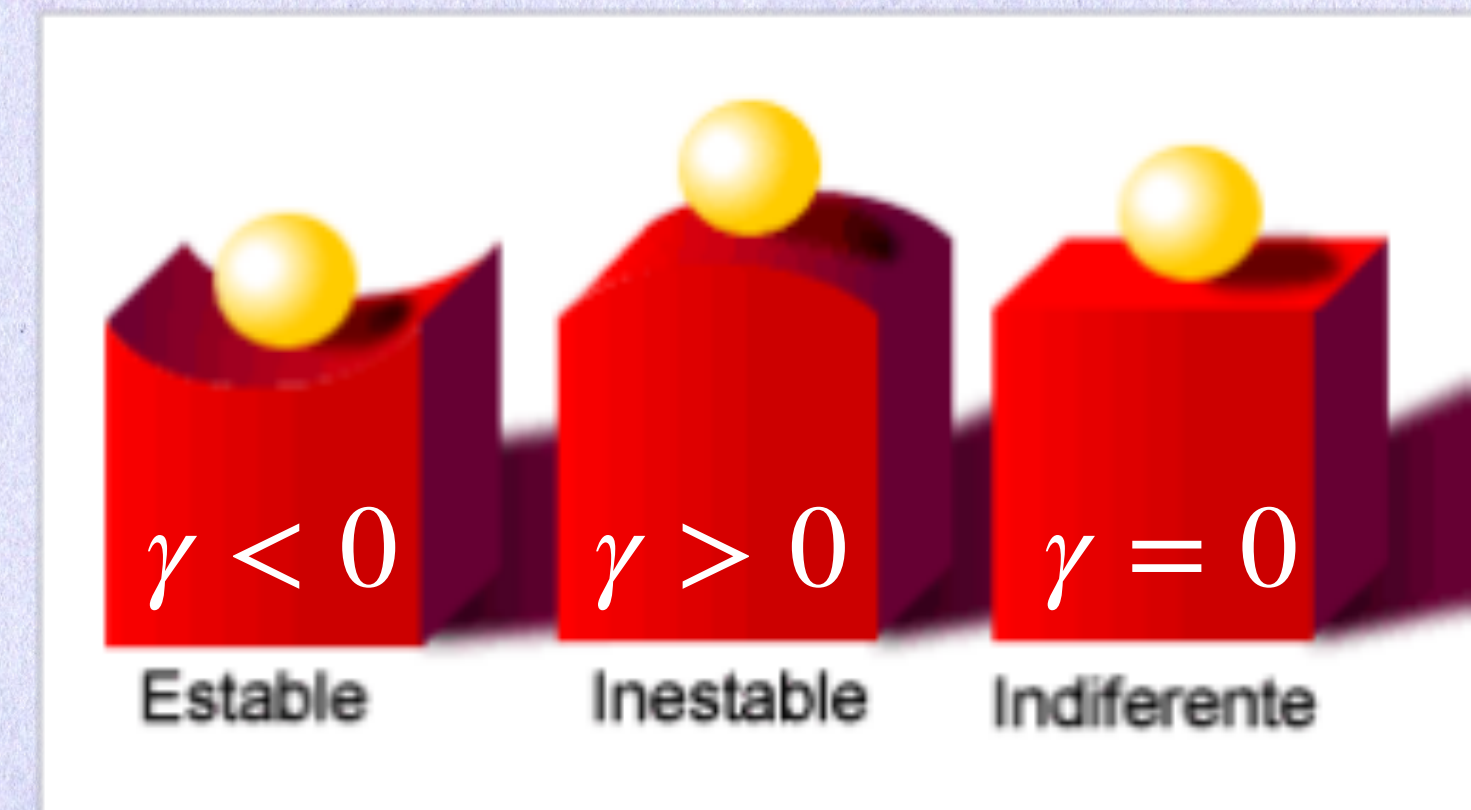
- Linealizamos el problema ($\delta f^2 \ll \delta f$) para obtener una ecuación (lineal) para δf .

- $\delta f(r, t) = \delta f(r) e^{-i\omega t}$

$\omega \in \mathbb{C}$ en general $\rightarrow \omega = \omega_R + i\gamma$

$$\therefore \delta f(r, t) = \delta f(r) \underbrace{e^{-i\omega_R t}}_{\text{propagación}} e^{\gamma t}$$

$\xrightarrow{\gamma > 0 \text{ inest.}}$
 $\xrightarrow{\gamma < 0 \text{ est.}}$



Inestabilidades de Kelvin-Helmholtz y Rayleigh-Taylor

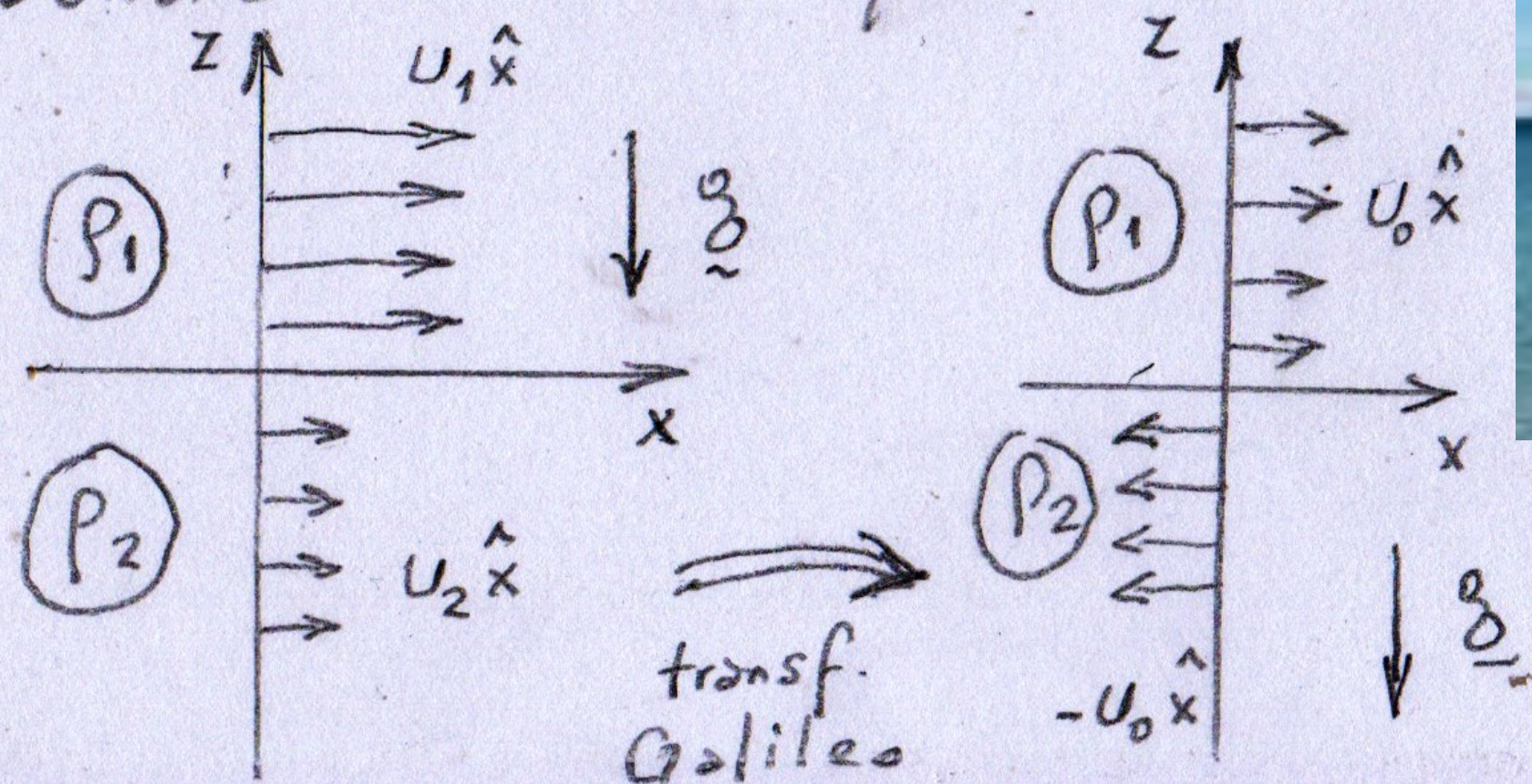
La inestabilidad de KH tiene lugar cuando dos flujos tienen diferente velocidad tangencial respecto de una interfase.



- La interfase $z=0$ se corruga y vale $\zeta(x,t)$.
- La velocidad a un lado y otro de la interfase está dada por $\pm u_0 \hat{x} + \nabla \phi_{1,2}(x,z,t)$

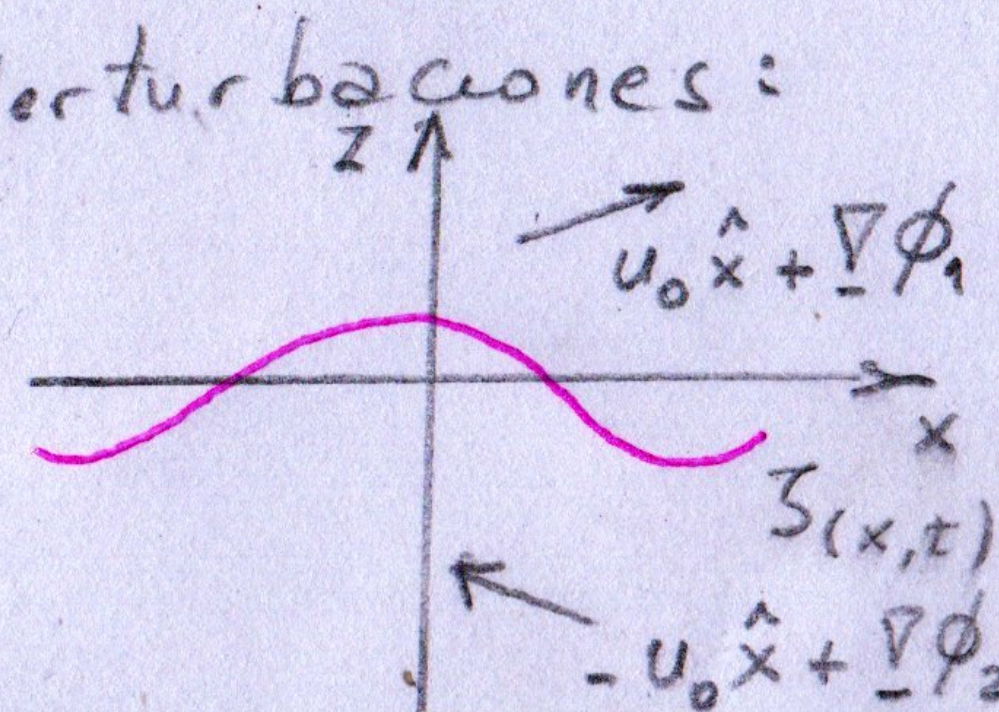
- La presión de cada lado : $p_0 - \rho_{1,2} g z + \delta p_{1,2}(x,z,t)$

• Consideremos el equilibrio:

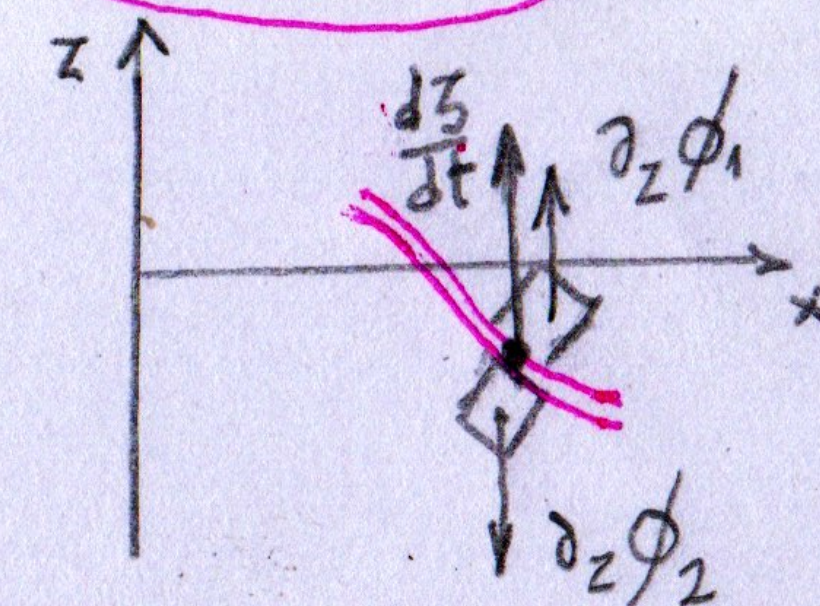


$$u_0 = \frac{u_1 - u_2}{2}$$

- Superponemos pequeñas perturbaciones:
 - planas ($\partial_y = 0, u_y = 0$)
 - incompresibles ($\nabla \cdot \underline{u} = 0$)
 - irrotacionales ($\nabla \times \underline{u} = 0$)
 - ideales ($\nu \approx 0$)



- Como $\nabla \cdot \underline{u} = 0$, en cada zona es $\nabla^2 \phi_{1,2} = 0$



- La velocidad vertical a uno y otro lado debe ser:

$$\partial_z \phi_1 \approx \partial_t \zeta + u_0 \partial_x \zeta$$

$$\partial_z \phi_2 \approx \partial_t \zeta - u_0 \partial_x \zeta$$

- También debemos igualar presiones a uno y otro lado de la interfase $p_1(x, \zeta, t) = p_2(x, \zeta, t)$

Inestabilidades de Kelvin-Helmholtz y Rayleigh-Taylor

Como el flujo es irrotacional pero no estacionario, obtenemos la presión de cada lado por Bernoulli-3:

$$\partial_t \phi + \frac{p}{\rho} + g z + \frac{u^2}{2} = C(t)$$

Linealizamos:

$$u_{1,2} = \pm u_0 \hat{x} + \nabla \phi_{1,2} \rightarrow u_{1,2}^2 = u_0^2 \pm 2u_0 \partial_x \phi_{1,2}$$

$$\therefore p_{1,2} = \rho_{1,2} \left[C_{1,2} - \partial_t \phi_{1,2} - g z - \frac{u_0^2}{2} \mp u_0 \partial_x \phi_{1,2} \right]$$

Podemos absorber $C_{1,2}$ y $\frac{u_0^2}{2}$ con una adecuada redefinición de $\phi_{1,2}$. Finalmente $p_1(z) = p_2(z)$

$$-p_1 (\partial_t \phi_1 + g z + u_0 \partial_x \phi_1) = -p_2 (\partial_t \phi_2 + g z - u_0 \partial_x \phi_2)$$

Las ecs. recuadradas forman un sistema lineal a coeficientes ctes. para z, ϕ_1, ϕ_2 .

$$z(x,t) = A e^{ikx - i\omega t}$$

$$\phi_{1,2}(x,z,t) = F_{1,2}(z) e^{ikx - i\omega t}$$

De las ecs. Laplace:

$$\nabla^2 \phi_{1,2} = 0 \rightarrow \partial_{zz} F_{1,2} - k^2 F_{1,2} = 0 \rightarrow F_{1,2} \sim e^{\pm kz}$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \phi_1 < \infty \\ z \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \rightarrow F_1(z) = B_1 e^{-kz}$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \phi_2 < \infty \\ z \rightarrow -\infty \end{array} \right\} \rightarrow F_2(z) = B_2 e^{kz}$$

$$e^{\pm k\zeta} \simeq 1 \pm k\zeta$$

Reemplazando en las otras ecuaciones:

$$p_1 (g A - i\omega B_1 + ik u_0 B_1) = p_2 (g A - i\omega B_2 - ik u_0 B_2)$$

$$-k B_1 = -i(\omega - k u_0) A$$

$$k B_2 = -i(\omega + k u_0) A$$

Es decir que:

$$\begin{pmatrix} -i(\omega - k u_0) p_1 & i(\omega + k u_0) p_2 & (p_1 - p_2) g \\ -k & 0 & i(\omega - k u_0) \\ 0 & k & i(\omega + k u_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ A \end{pmatrix} = 0$$

Kelvin-Helmholtz

Las soluciones no triviales satisfacen:

$$\det() = 0 \rightarrow \omega = \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} k U_0 \pm \sqrt{\frac{-4 p_1 p_2}{(p_1 + p_2)^2} k^2 U_0^2 - \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} k g}$$

La inestabilidad K-H corresponde al límite $g = 0$.

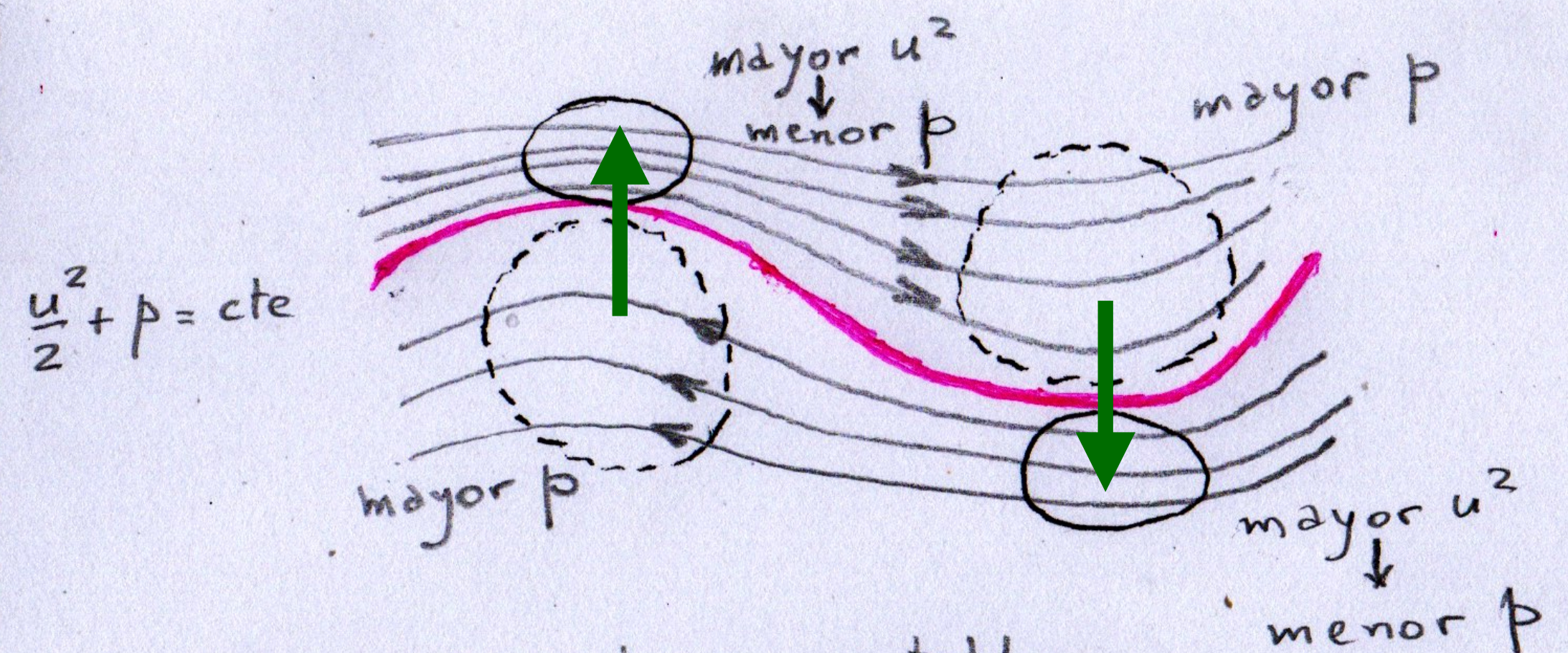
$$\omega = \omega_R + i\gamma \rightarrow \begin{aligned} \omega_R &= \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} k U_0 \\ \gamma &= \pm \frac{2\sqrt{p_1 p_2}}{p_1 + p_2} k U_0 \end{aligned}$$

- La velocidad relativa $U_0 = \frac{U_1 - U_2}{2}$ entre las dos zonas, SIEMPRE da lugar a inestabilidad.

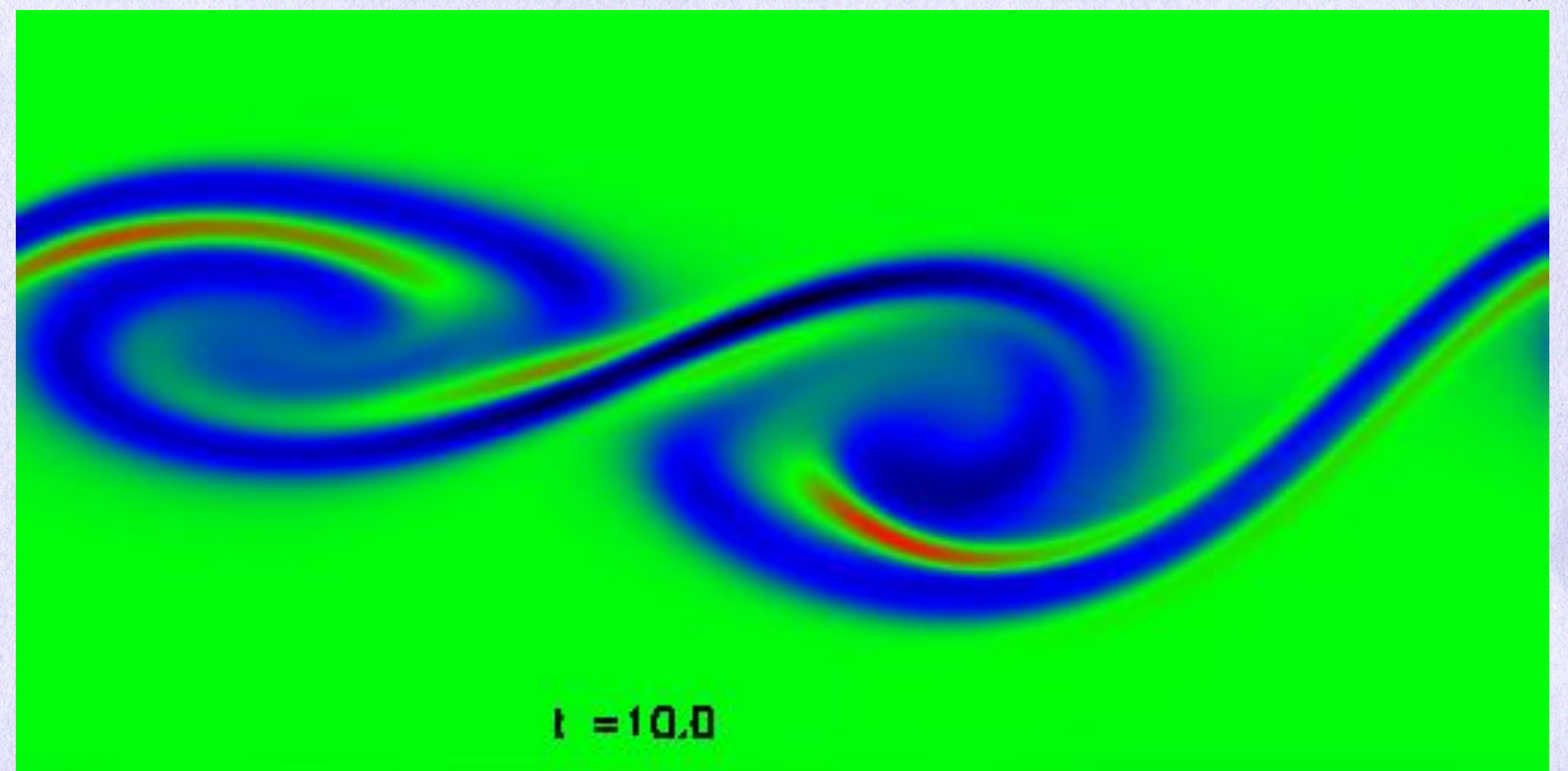
- Incluso si $p_1 = p_2 \rightarrow \gamma = \pm k U_0$

- Esta inestabilidad puede limitarse por viscosidad, tensión superficial 🤔 o también con una interfase gradual en lugar de discontinua.

- Conceptualmente, ¿qué es lo que origina esta inestabilidad?



• Sobre cada cresta se establece un grupo de baja presión, y bajo cada cresta uno de alta presión (bajo u^2). El desbalance de presión alimenta el crecimiento inestable.



Rayleigh-Taylor

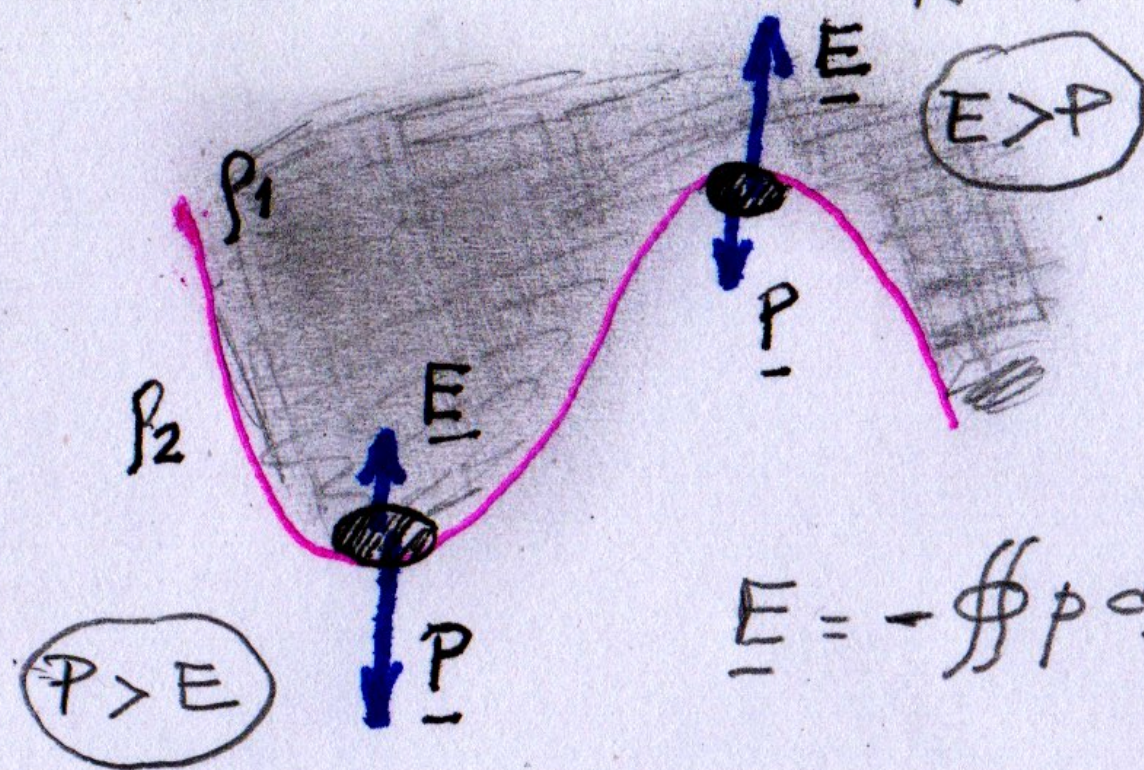
Si ahora suponemos $g \neq 0$ pero el caso estático ($u_0 = \frac{u_1 - u_2}{2} = 0$), la inestabilidad se llama de Rayleigh-Taylor:

$$\omega = \pm \sqrt{-\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} k g}$$

Si $\rho_1 < \rho_2 \rightarrow$ equilibrio estable $\rightarrow \omega_R = \pm \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} k g}$

ondas de gravedad

Si $\rho_1 > \rho_2 \rightarrow$ inestabilidad $\rightarrow \gamma = \pm \sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} k g}$



$$\underline{E} = - \oint p d\underline{s}$$

• Veamos el desbalance de fuerzas de cada gota

• El empuje es igual al peso del fluido desalojado (Arquímedes).

- En la gota izquierda $E < P$ porque el fluido desalojado es mayormente ρ_2 (menos denso).
- En la gota derecha es al revés, pero en ambos casos el desbalance promueve la inestabilidad.

