Repaso de Clase 11

- Ondas de gravedad

- Fluido de presión p_A sobre fluido incompresible, irrotacional e ideal

- Caso de profundidad infinita >>> $\omega^2 = gk$

- Caso de profundidad finita >>> $\omega^2 = gk\tanh(kd)$ >>> Baja profundidad: $\omega^2 \simeq gd\,k^2$

- Combinación lineal de todas las ramas ($\omega = \pm \ldots$) y modos $\left(\sum_k (\ldots)\right)$, y parte real de $\left(\frac{1}{2}(\ldots + c.c.)\right)$

Flujos compresibles

En flujos compresibles, sabemos que debemos usar la ecuación de continuidad

$$\partial_t \rho + \underline{\nabla}\cdot(\rho \underline{u}) = 0$$

Las ondas acústicas son un ejemplo palpable (o mejor dicho audible) de la compresibilidad de un fluido como el aire.

Haremos un planteo 1D e ideal partiendo de un equilibrio:

$$\left.\begin{array}{l}\rho = \rho_0 \\ p = p_0 \\ \underline{u} = 0\end{array}\right\} \text{Equilibrio} \longrightarrow \text{Perturbación} \left\{\begin{array}{l}\rho = \rho_0 + \delta\rho \\ p = p_0 + \delta p \\ \underline{u} = \delta\underline{u}\end{array}\right.$$

Linealizamos las ecuaciones en $\delta\rho$, δp, $\delta\underline{u} = \hat{x}\,\delta u$

$$\partial_t \rho + \underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{u}) = 0 \longrightarrow \partial_t \delta\rho + \rho_0 \partial_x \delta u = 0$$

$$\rho\left[\partial_t \underline{u} + (\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u}\right] = -\underline{\nabla} p \longrightarrow \rho_0 \partial_t \delta u = -\partial_x \delta p$$

Las incógnitas son $\delta\rho(x,t)$, $\delta p(x,t)$ y $\delta u(x,t)$.

Falta una ecuación!

Planteamos una relación politrópica entre p y ρ, es decir $\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cte}$. Entonces:

$$\frac{p_0 + \delta p}{(\rho_0 + \delta\rho)^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \longrightarrow \delta p = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\delta\rho$$

Definimos: $c^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$ $\quad$ c: velocidad del sonido

Para el sistema de ecuaciones recuadradas proponemos:

$$\delta\rho, \delta p, \delta u \sim e^{ikx - i\omega t} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -i\omega\delta\rho + ik\rho_0 \delta u = 0 \\ -i\omega\rho_0 \delta u + ik\delta p = 0 \\ \delta p = c^2 \delta\rho \end{array}\right.$$

La relación de dispersion resultante es $\boxed{\omega^2 = c^2 k^2}$

- Las ondas acústicas son no dispersivas, lo cual es indispensable para podernos comunicar.
- Es un modo longitudinal, ya que $\delta\underline{u} \parallel \underline{k}$.

Generación de ondas de choque

El término convectivo (no lineal) conduce a la formación de superficies de discontinuidad en el seno del fluido, conocidas como <u>ondas de choque</u>.

Veamos un caso muy simple, 1D y sin fuerzas de corto ni largo alcance:

$$\partial_t u + u\,\partial_x u = 0$$

Comprobemos que la solución (implícita) de esta ecuación es

$$u = F(x - ut). \qquad \text{donde} \begin{cases} u = u(x,t) \\ F \text{ arbitraria} \end{cases}$$

Para verificarlo, definimos

$$\xi(x,t) = x - u(x,t)\,t$$

Entonces:
- $\partial_t u = \frac{dF}{d\xi}\,\partial_t \xi = F' . (-\partial_t u . t - u)$
- $\partial_x u = \frac{dF}{d\xi}\,\partial_x \xi = F' . (1 - \partial_x u . t)$

$$\partial_t u = (-\partial_t u . t - u)\,F' \longrightarrow \partial_t u = -\frac{u F'}{1 + t F'}$$

$$\partial_x u = (1 - \partial_x u . t) . F' \longrightarrow \partial_x u = \frac{F'}{1 + t F'}$$

que desde luego satisface $\partial_t u + u\,\partial_x u = 0$

Quien es F ?

Si planteamos que la condición inicial es $u_0(x)$:

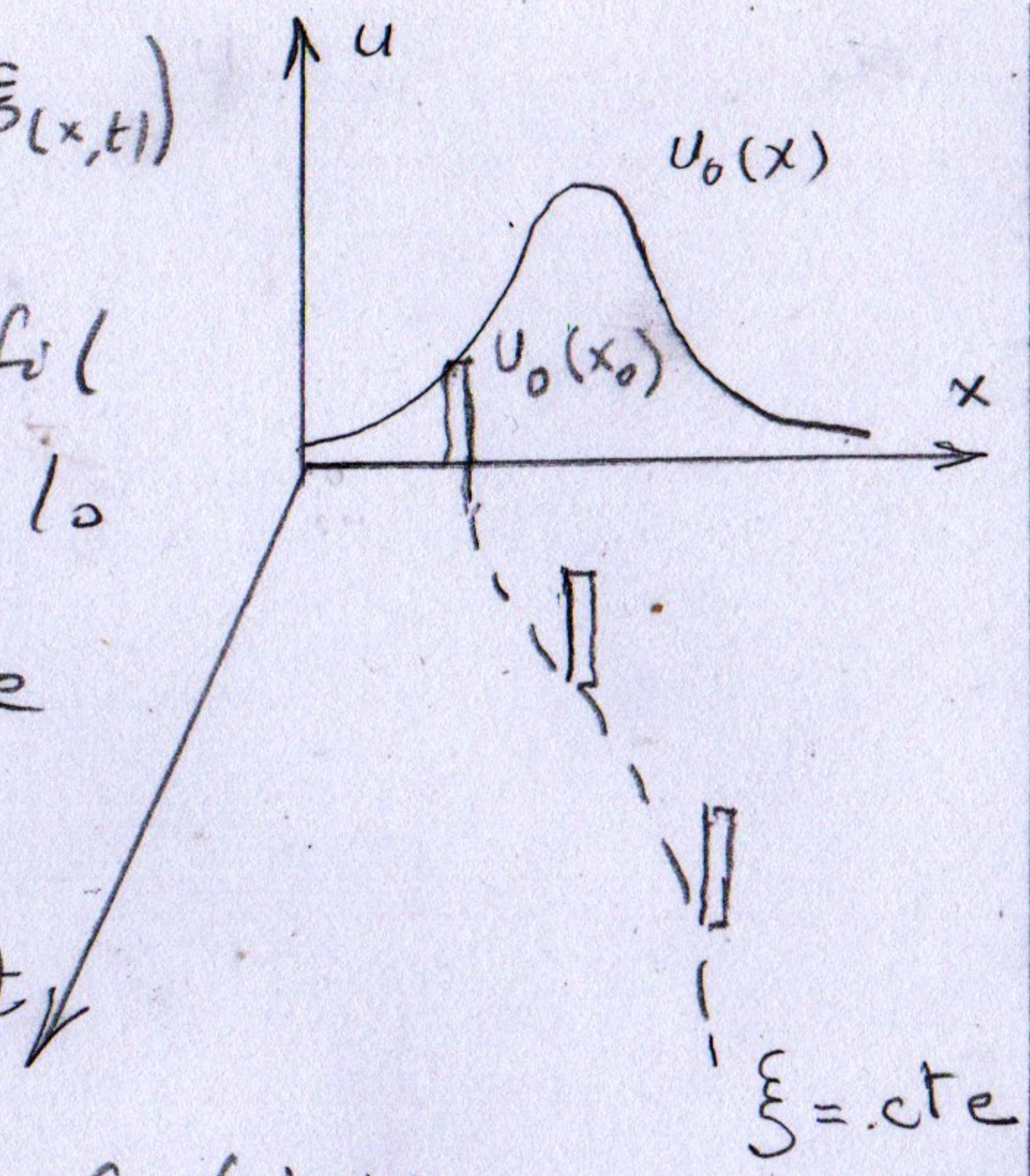
$$t = 0 \longrightarrow u(x,0) = F(x) = u_0(x) \longrightarrow F \equiv u_0$$

$$\therefore\ u(x,t) = u_0(x - u(x,t) . t)$$

- Esta solución implícita dice que toda la información sobre la evolución está en el perfil inicial $u_0(x)$, ya que la velocidad en $u(x,t)$ es la velocidad que inicialmente tenía el punto $x - u(x,t)\,t$.
- Lo anterior es conceptualmente cierto, pero muy poco práctico.

Curvas características

- La solución formal $U(x,t) = u_0(\xi_{(x,t)})$ con $\xi(x,t) = x - u(x,t)\,t$ permite imaginar que el perfil inicial $u_0(x)$ se propaga a lo largo de curvas $\xi(x,t) = cte$ en el plano (x,t).



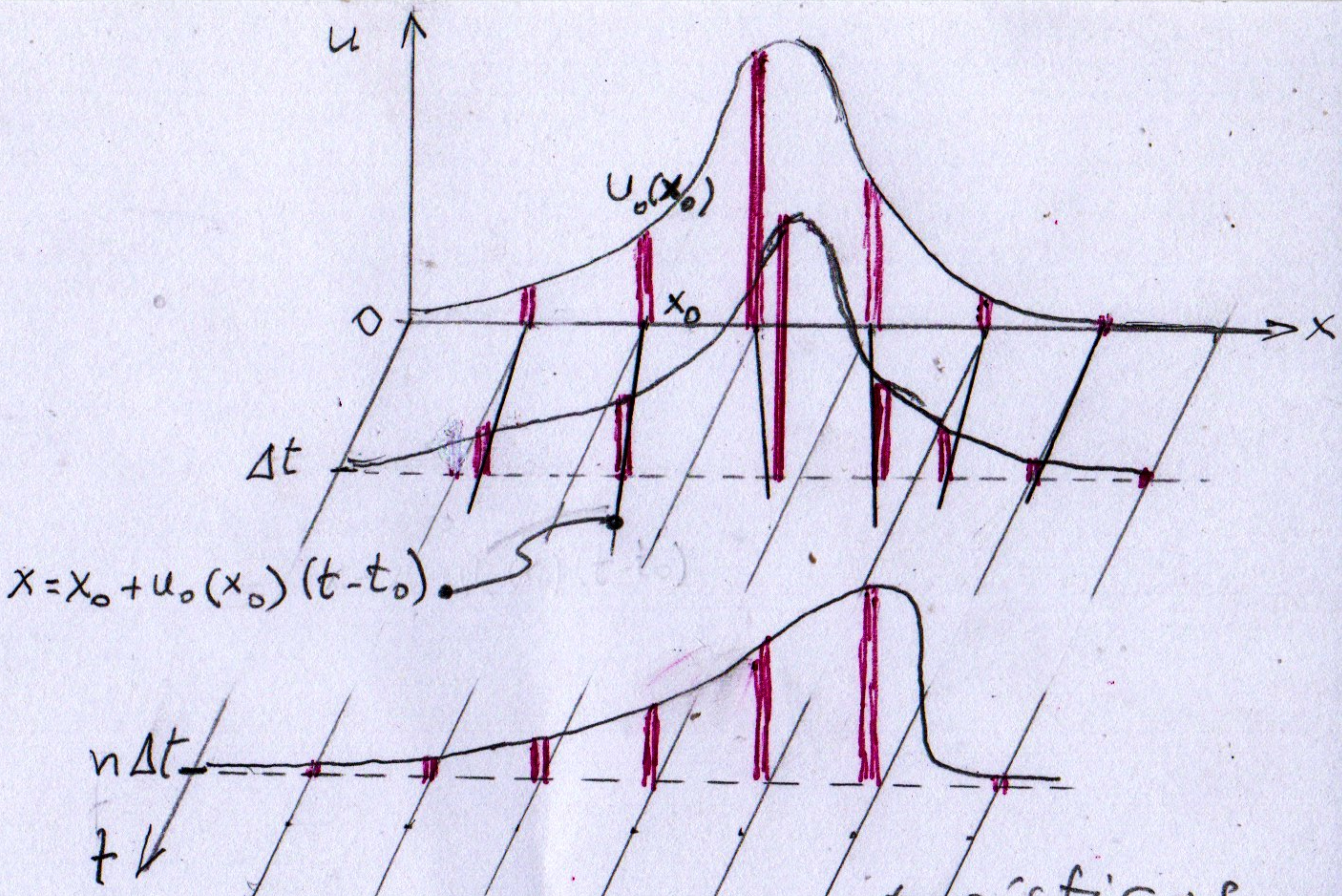
- A las curvas $\xi(x,t) = cte$ las llamamos curvas características.

- No conocemos esas curvas, pero podemos intentar un método perturbativo para ir de $t=0$ a $t=\Delta t$:

$$\xi(x,t) = x - u(x,t)\,t = cte$$

$$t=0 \to t=\Delta t \Rightarrow \Delta\xi = 0 = \Delta x - u_0(x_0)\,\Delta t$$

$$x = x_0 + u_0(x_0)(t-t_0)$$



- Es decir que entre 0 y Δt las características son (aprox.) rectas de pendiente $u_0(x_0)$ en (x,t)

- De Δt a $2\Delta t$ repetimos el procedimiento y vemos que la región $u_0' > 0$ se dispersa, mientras que la $u_0' < 0$ se concentra.

- Eventualmente, la cresta del perfil da origen a una estructura con $\partial_x u \sim -\infty$ (choque)