Clase 1 - Repaso

- Estados de la materia >>> **Fluidos**: gases / líquidos / plasmas

- Aplicaciones a Ingeniería, Astrofísica, Biología, Geología, Oceanografía, Meteorología, ...

- Modelo de **medio contínuo** >>> Determinación de **elemento de fluido** (E.F.)

- Ecuación de movimiento de un E.F. genérico: fuerzas de corto y largo alcance

- Fuerzas de corto alcance >>> Tensor de esfuerzos >>> Simetría del tensor

- Modelo de fluido ideal >>> Presión de un fluido

- Hidrostática >>> Ejemplos

Hidrostática

En situaciones en las cuales el fluído puede considerarse en reposo:

$$\underline{u}(\underline{r},t)=0\ ,\ \forall \underline{r},t \longrightarrow \underline{a}(\underline{r},t)=0$$

Entonces:

$$0 = \underset{\sim}{f} - \frac{1}{\rho}\underset{\sim}{\nabla} p$$

Ecuación de equilibrio hidrostático

Veamos dos ejemplos sencillos.

Ejemplo 1: Pileta con agua

El agua se encuentra en reposo.

$\rho = cte$ ($\forall$ líquido)

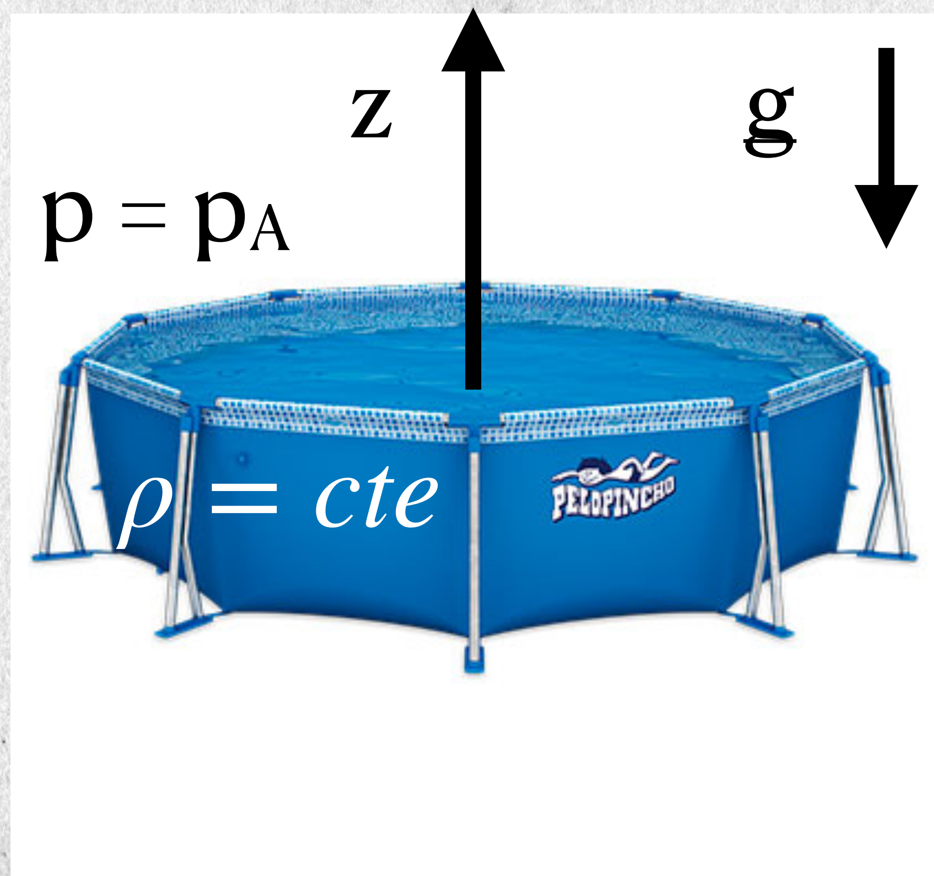
$$\underline{f} = -g\hat{z}$$

$$g\hat{z} = -\frac{1}{\rho}\underset{\sim}{\nabla} p \longrightarrow \underline{\nabla}_{\perp} p = 0$$

$$\downarrow$$

$$g = -\frac{1}{\rho}\partial_z p \longrightarrow p = cte - \rho g z$$

$$p(z=0) = p_A \longrightarrow p = p_A - \rho g z$$



Ejemplo 2: Atmósfera isotérmica

- El aire sobre la pileta es otro fluído, tambien en reposo.
- Suponemos un gas ideal (y tambien un fluido ideal) e isotérmico, de modo que

$$p = \frac{\rho\, k_B T_0}{m_M}$$

m_M: masa molecular media

$k_B = 1.38\times 10^{-16}\,\frac{erg}{K}$; Boltzmann

$T_0 = cte$

- La presión del aire cerca del piso es la llamada presión atmosférica

$$p_A = 1013\ hPa \qquad Pa = \frac{N}{m^2}$$

$$-g = \frac{1}{\rho}\partial_z p = \frac{kT_0}{m_M}\frac{\partial_z \rho}{\rho}$$

$$\therefore\ \rho(z) = \rho_A\, e^{-z/H} \qquad H = \frac{kT_0}{m_M\, g}$$

escala de alturas

$$p(z) = p_A\, e^{-z/H}$$

Variables hidrodinámicas

Para describir cuantitativamente el estado de un fluido, que es un objeto extendido espacialmente, definimos varios campos escalares, vectoriales y tensoriales:

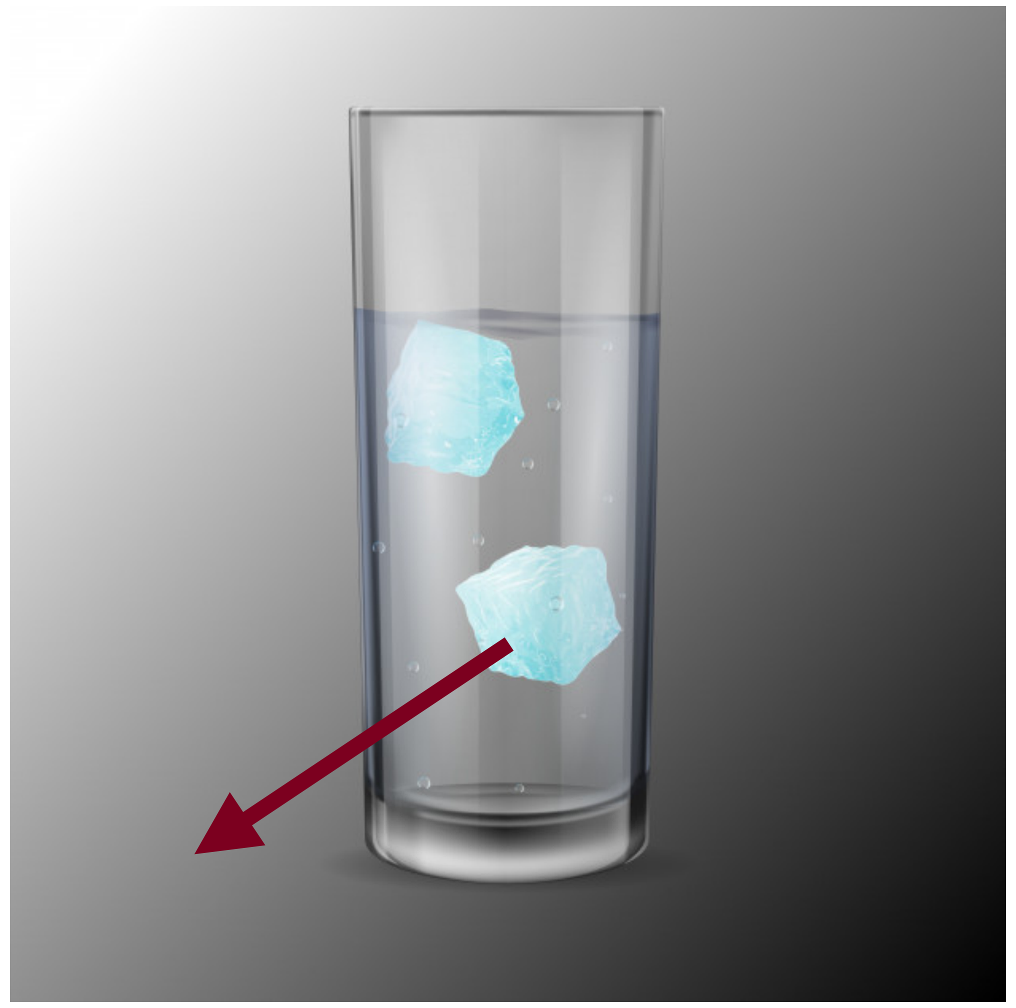
- densidad de masa $$\rho(\underline{r}, t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Noten que $\rho = n m_M$

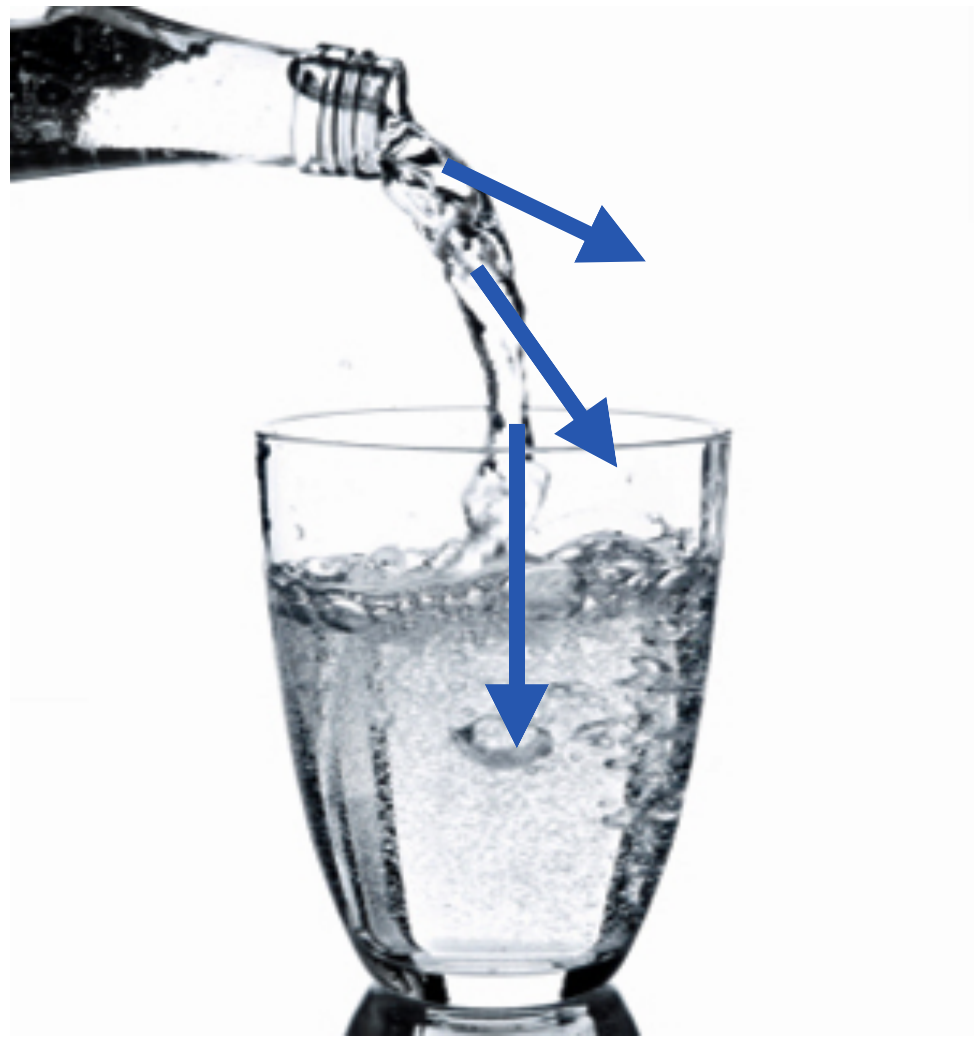
- densidad de partículas $$n(\underline{r}, t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta V}$$

- presión $$p(\underline{r}, t)$$

- campo de velocidades $$\underline{u}(\underline{r}, t)$$



$$d\underline{F} = -\ p \cdot d\underline{S}$$

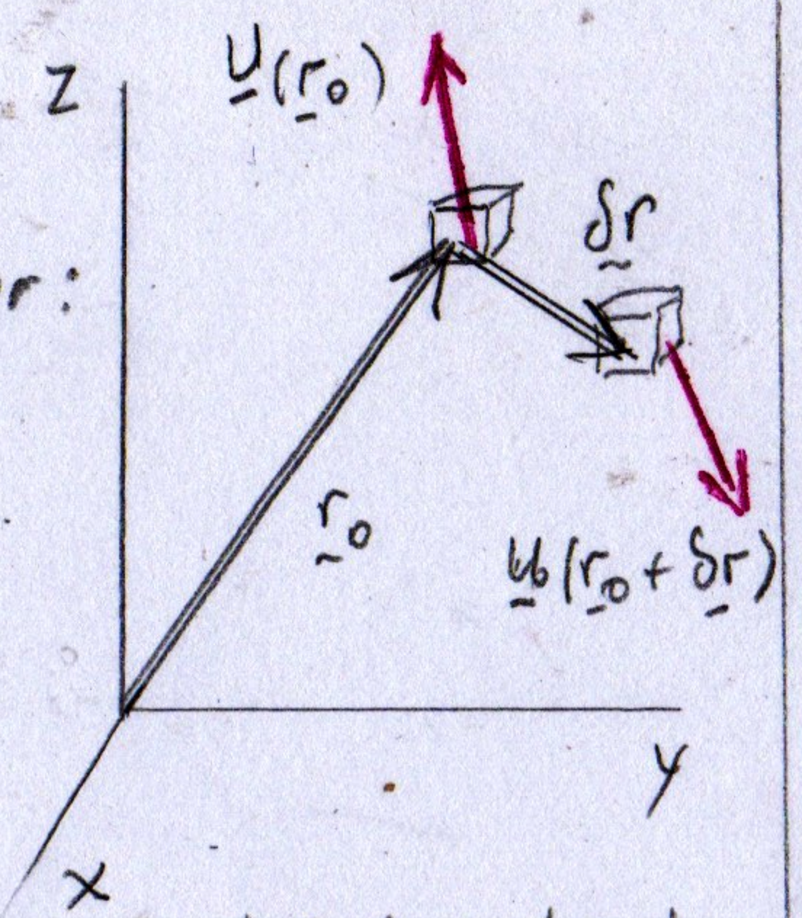


$$\underline{u}(\underline{r}, t)$$

Campo de velocidades local

- Para explorar $\dot{\underline{u}}(\underline{r})$ en el entorno de un punto $\underline{r}_0$, desarrollamos Taylor:

$$u_i(\underline{r}_0+\delta\underline{r}) \simeq u_i(\underline{r}_0) + \underbrace{\left.\frac{\partial u_i}{\partial r_k}\right|_{\underline{r}_0}\delta r_k}_{\delta u_i}$$



$|\delta\underline{r}| \ll |\underline{r}_0|$

- Descomponemos el tensor $\frac{\partial u_i}{\partial r_k}$ en su parte simétrica y anti-simétrica:

$$\frac{\partial u_i}{\partial r_k} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_k}+\frac{\partial u_k}{\partial r_i}\right)}_{S} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_k}-\frac{\partial u_k}{\partial r_i}\right)}_{A} \rightarrow \delta\underline{u} = \delta\underline{u}^S + \delta\underline{u}^A$$

Ejercicio: Mostrar que $\frac{\partial u_i}{\partial r_k} - \frac{\partial u_k}{\partial r_i} = \varepsilon_{ilk}\, w_l$, donde $\underline{w} = \underline{\nabla}\times\underline{u}$ (vorticidad)

En cuanto a la parte "S" definimos:

$$e_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_k}+\frac{\partial u_k}{\partial r_i}\right)$$: tensor de velocidad de deformación

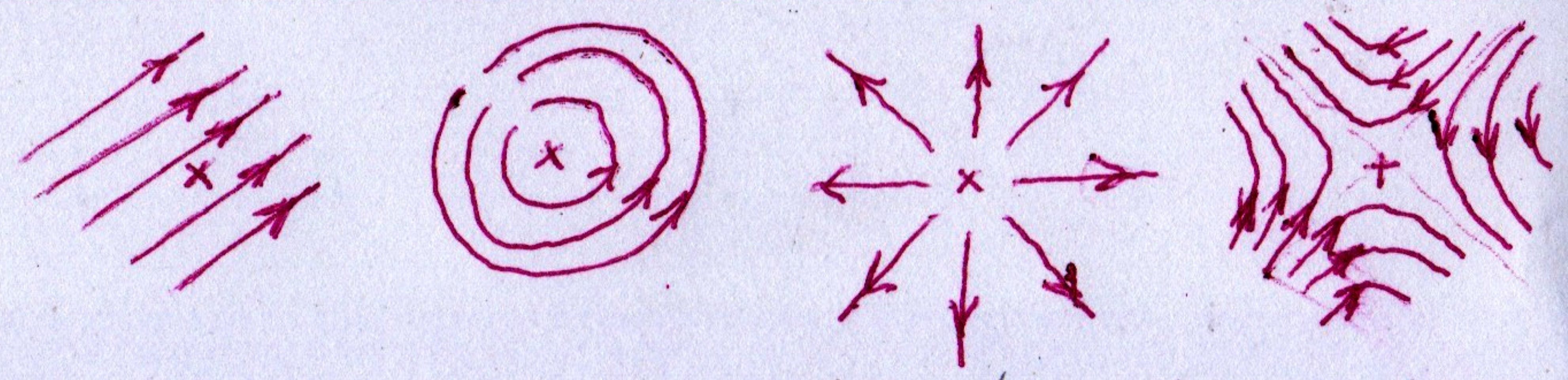
Descomponemos el tensor $\underline{\underline{e}}$ a su vez en:

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{3}Tr(\underline{\underline{e}})\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \underbrace{\left(\underline{\underline{e}} - \frac{1}{3}Tr(\underline{\underline{e}})\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}\right)}_{\underline{\underline{e}}' \text{ (traza nula)}}$$

Noten que $Tr(\underline{\underline{e}}) = \frac{\partial u_i}{\partial r_i} = \underline{\nabla}\cdot\underline{u}$

En síntesis, entonces:

$$\boxed{\underline{u}(\underline{r}_0+\delta\underline{r}) = \underline{u}(\underline{r}_0) + \frac{1}{2}\underline{w}_0\times\delta\underline{r} + \frac{(\underline{\nabla}\cdot\underline{u})_0}{3}\delta\underline{r} + \underline{\underline{e}}'_0\cdot\delta\underline{r}}$$



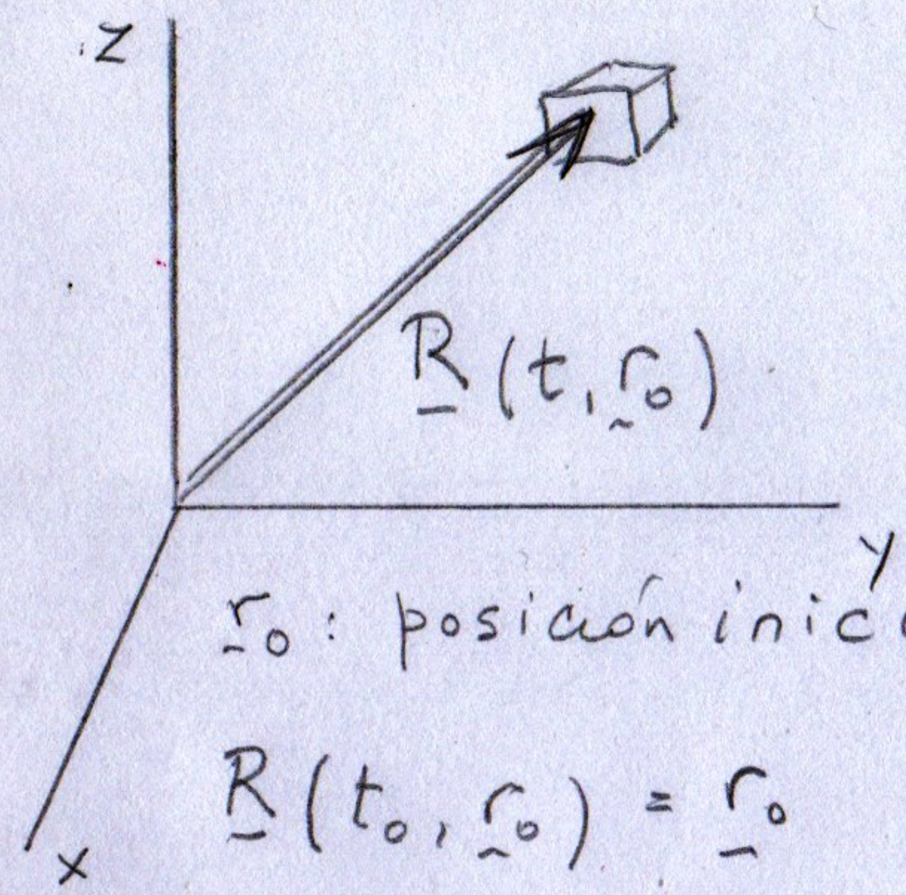
Estos son todos los movimientos posibles en el entorno de cualquier punto para cualquier medio continuo.

NOTA: Lo anterior es cierto $\forall\,\underline{r}_0$ en el cual $\underline{u}(\underline{r})$ es derivable

Descripciones lagrangiana y euleriana

La llamada descripción **lagrangiana** es la adoptada en cinemática de partículas, que consiste en "seguir" a los E.F. Nosotros, en cambio, utilizaremos la descripción euleriana, que trata a los E.F. como indistinguible y busca calcular el estado del fluido en cada ($\mathbf{r}$, t).

Lagrangiana



$\mathbf{r}_0$: posición inicial

$\mathbf{R}(t_0, \mathbf{r}_0) = \mathbf{r}_0$

Variable indep.: t

$\mathbf{R}(t, \mathbf{r}_0)$: posición en t del E.F. que estaba en $\mathbf{r}_0$ a t_0.

$\mathbf{U}(t, \mathbf{r}_0) = \dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}$: velocidad en t del E.F. "$\mathbf{r}_0$"

$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}_0) = \dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2}$: aceleración en t del E.F. "$\mathbf{r}_0$"

Esta descripción preserva la identidad de los E.F., que son infinitos (en rigor, tenemos del orden de $(L/\ell)^3$ E.F.).

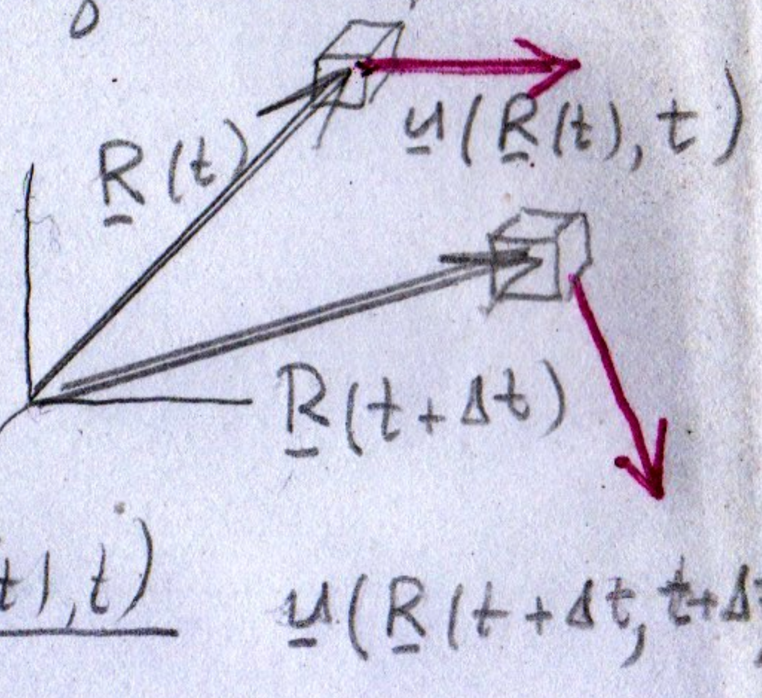
Euleriana

Variables indep.: $\mathbf{r}, t$

Los E.F. son indistinguibles.

$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$: vel. del E.F. en $(\mathbf{r}, t)$, pero $\mathbf{u} \neq \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$

Recurrimos a la descripción lagrangiana para medir $\mathbf{u}$ y $\mathbf{a}$.



$\mathbf{r} \equiv \mathbf{R}(t)$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{R}(t+\Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}$$

y tambien

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{R}(t+\Delta t), t+\Delta t) - \mathbf{u}(\mathbf{R}(t), t)}{\Delta t}$$

Por Taylor:

$$\mathbf{u}(\mathbf{R}(t+\Delta t), t+\Delta t) \simeq \mathbf{u}(\mathbf{R}(t), t) + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{R}}}_{\nabla \mathbf{u}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}}_{\mathbf{u}} \Delta t + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Delta t$$

Entonces: $\boxed{\mathbf{a} = \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}}$

Utilizamos la sig. notación

$$\mathbf{a} = \underbrace{\frac{d\mathbf{u}}{dt}}_{\text{derivada total (en referencial E.F.)}} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}}_{\text{derivada local (en ref. fijo)}} + \underbrace{(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}}_{\text{derivada convectiva}}$$

Para cualquier campo $f(\mathbf{r}, t)$ tambien

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f$$

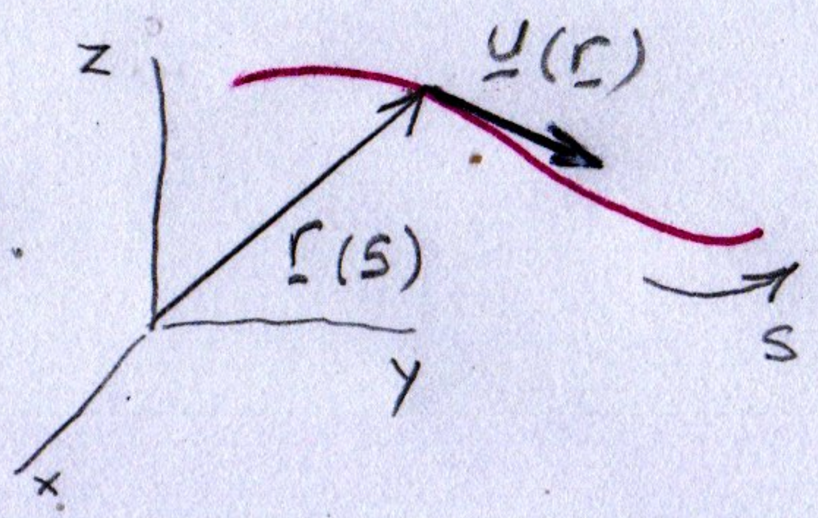
Lineas de corriente y trayectorias

Tenemos al menos dos tipos de lineas para ayudar a visualizar campos de velocidades: **lineas de corriente** y **trayectorias**.

Lineas de corriente son curvas tangentes a $\underline{u}(\underline{r})$ en todo punto (al igual que $\underline{E}(\underline{r})$ ó $\underline{B}(\underline{r})$ en F3).

Se calculan a $t = cte$.

Sea $\underline{r}(s)$ una curva en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por la variable $s \in \mathbb{R}$.



Los vectores $\frac{d\underline{r}}{ds}$ seran tangentes a la curva. La curva $\underline{r}(s)$ tangente en todo punto al campo $\underline{u}(\underline{r})$ deberá satisfacer

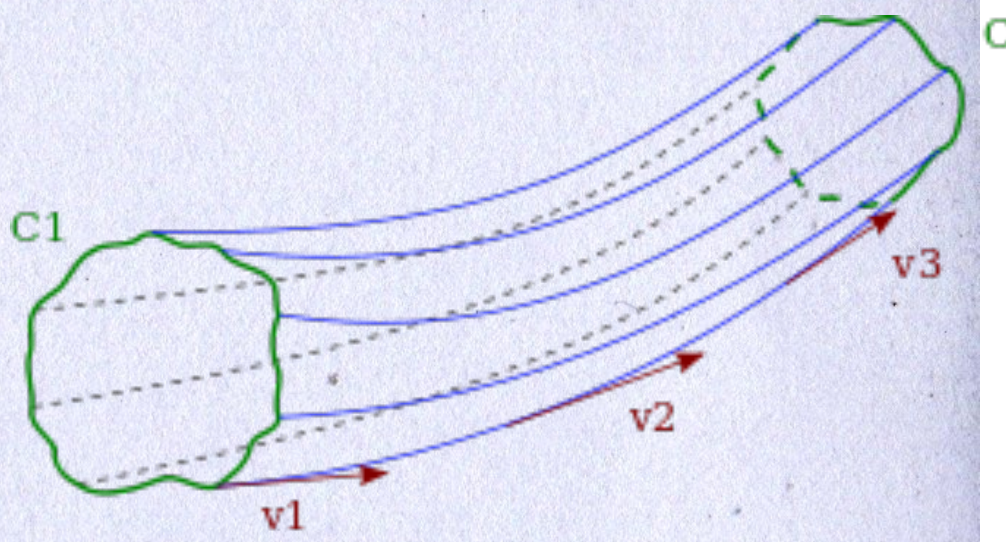
$$\frac{d\underline{r}}{ds} \parallel \underline{u}(\underline{r}) \Longrightarrow \frac{d\underline{r}}{ds} = K\,\underline{u}(\underline{r}, t_0)$$

La incógnita $\underline{r}(s)$ se obtiene de

$$K = \frac{dx/ds}{u_x} = \frac{dy/ds}{u_y} = \frac{dz/ds}{u_z}$$

En 2D $\quad \frac{dx}{u_x(x,y)} = \frac{dy}{u_y(x,y)} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{u_y(x,y)}{u_x(x,y)} \longrightarrow y = y(x)$

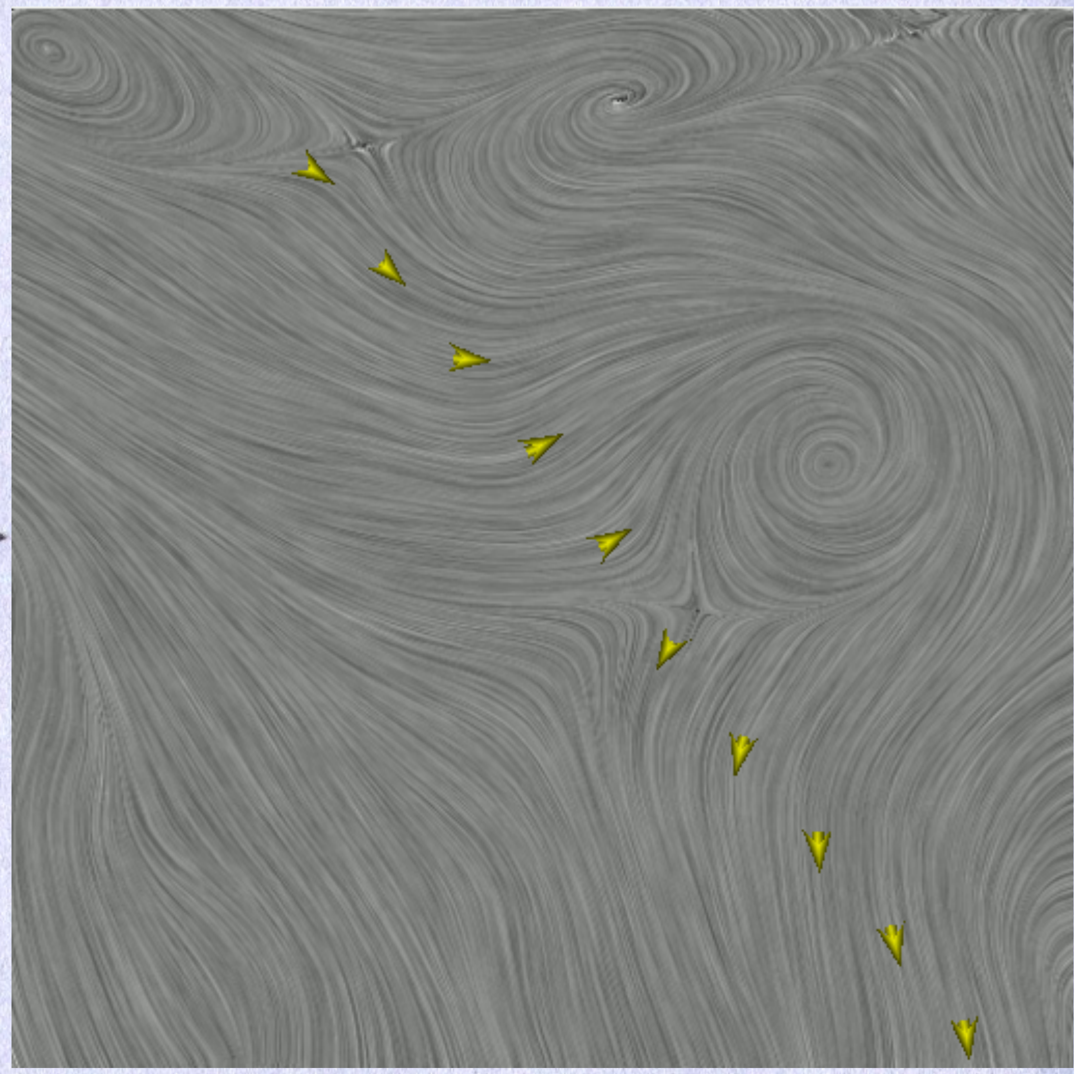
Un manojo de líneas de corriente es un tubo de flujo



Las líneas de corriente son en general distintas de las trayectorias de los E.F., que se calculan como:

$$\frac{d\underline{R}(t)}{dt} = \underline{u}(\underline{R}(t), t)$$

Líneas de corrientes y trayectorias solo coinciden en flujos estacionarios, es decir, si $\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = 0$.



Crédito: Dr. C. Wang, Univ. Notre Dame, USA