

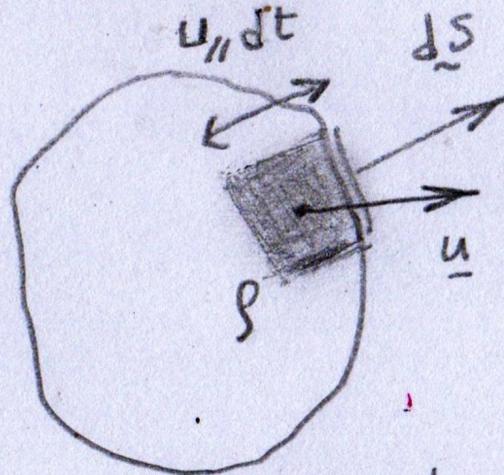
Repaso de Clase 2

- Hidrostática >>> Ejemplos
- Variables hidrodinámicas: $\underline{u}(\underline{r}, t)$, $\rho(\underline{r}, t)$, $p(\underline{r}, t)$, ...
- Campo de velocidades local: traslación + rotación + expansión (compresión) + deformación (vol. cte.)
- Descripciones lagrangiana y euleriana
- $\underline{a} = \partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} = \underline{f} - \frac{1}{\rho} \underline{\nabla} p$ >>> Mas incógnitas que ecuaciones
- Líneas de corriente de $\underline{u}(\underline{r})$ y trayectorias de E.F.

Ecuación de continuidad

Veamos que los fluidos, en su movimiento, satisfacen leyes de conservación.

Empecemos por la conservación de masa, que da lugar a la ecuación de continuidad.



Sea el volumen \$V = \text{cte}\$ de la figura del que ingresa y egresa materia a través de las paredes. \$M(t)\$, \$V = \text{cte}\$

La masa que sale a través de \$d\vec{S}\$ en \$dt\$ es:

$$dM = -\rho \underline{u}_{||} dt dS = -\rho \underline{u} \cdot d\vec{S} dt$$

La variación de masa en todo el volumen:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho d^3r = - \oint_S \rho \underline{u} \cdot d\vec{S}$$

Por el Teorema de Gauss:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho d^3r = - \int_V \nabla \cdot (\rho \underline{u}) d^3r$$

Como \$V = \text{cte} \rightarrow \frac{d}{dt} \int_V \rho d^3r = \int_V \partial_t \rho d^3r\$

Entonces $\int_V (\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \underline{u})) d^3r = 0$, $\forall V$
Ec. continuidad

y por lo tanto

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

densidad de masa + flujo de masa

$$\underbrace{\partial_t \rho + \underline{u} \cdot \nabla \rho}_{\frac{d\rho}{dt}} + \rho \nabla \cdot \underline{u} = 0 \rightarrow \frac{-1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\nabla \cdot \underline{u}}{\rho}$$

- Un flujo se dice incompresible si $\frac{d\rho}{dt} = 0$
- Un flujo homogéneo satisface $\nabla \rho = 0$
- Incompresible + homogéneo $\rightarrow \rho = \text{cte}$

Conservación de impulso lineal

Si el impulso lineal de una partícula es $m \underline{v}$, el impulso de un E.F. por unidad de volumen será $\rho \underline{u}$.

Para estudiar su conservación, partimos de la ecuación de movimiento:

$$\rho \partial_t \underline{u} + \rho (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = \rho \underline{f} - \nabla p$$

A fin de obtener una ecuación para $\partial_t(\rho \underline{u})$, recurrimos a la ecuación de continuidad:

$$\underline{u} \partial_t \rho + \underline{u} \cdot \nabla (\rho \underline{u}) = 0$$

Sumamos ambas ecuaciones:

$$\partial_t(\rho \underline{u}) + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \underline{u}) = \rho \underline{f} - \nabla \cdot (p \underline{1})$$

Definimos el tensor de flujo de impulso $\underline{\pi}$

$$\underline{\pi} = \rho \underline{u} \underline{u} + p \underline{1} \quad \text{para un fluido ideal}$$

En el caso general

$$\underline{\pi} = \rho \underline{u} \underline{u} - \underline{\sigma}$$

Entonces:

$$\partial_t(\rho \underline{u}) = \rho \underline{f} - \nabla \cdot \underline{\pi}$$

densidad de impulso

flujo de impulso

En ausencia de fuerzas de volumen ($\underline{f} = 0$), el impulso lineal total de un volumen $V = \text{cte}$ solo varía por flujo de impulso a través de las paredes.

$$\underline{P} = \int_V d^3r \rho \underline{u} \quad \rightarrow \quad \frac{d\underline{P}}{dt} = \int_V d^3r \rho \underline{f} - \oint_{S_V} \underline{\pi} \cdot d\underline{S}$$

Conservación de energía: teoremas de Bernoulli (1738)

Veremos 4 versiones de teoremas de Bernoulli, que difieren parcialmente en las hipótesis. Todas ellas expresan la conservación de energía y suponen

H1 Fluido ideal: $\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}}$

H2 Fuerzas de volumen conservativas: $\underline{\underline{f}} = -\underline{\underline{\nabla}}\phi$

Utilizamos la identidad $(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} = \underline{\omega} \times \underline{u} + \underline{\nabla}(\frac{u^2}{2})$

en la ec. movimiento:

$$\partial_t \underline{u} + \underline{\omega} \times \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \underline{\nabla} p - \underline{\nabla}(\phi + \frac{u^2}{2})$$

Bernoulli 1

H3 Incompresible y homogéneo: $\rho = cte$

H4 Estacionario: $\partial_t = 0$

$$\therefore \underline{\omega} \times \underline{u} = -\underline{\nabla}(\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{u^2}{2})$$

Entonces $\underline{u} \cdot \underline{\omega} \times \underline{u} = 0 = -\underline{u} \cdot \underline{\nabla}(\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{u^2}{2})$

B1 $\frac{u^2}{2} + \phi + \frac{p}{\rho} = cte$ (línea) A lo largo de cada línea de corriente ($\underline{u} \cdot \underline{\nabla}$)

Bernoulli 2

H5 Irrotacional: $\underline{\omega} = \underline{\nabla} \times \underline{u} = 0$

$$\underline{\nabla}(\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{u^2}{2}) = 0 \rightarrow \frac{u^2}{2} + \phi + \frac{p}{\rho} = cte$$

En todo el fluido

B2

Bernoulli 3

H1 **H2** **H3** ~~**H4**~~ **H5** No estacionario: $\partial_t \neq 0$

$$\underline{\omega} = \underline{\nabla} \times \underline{u} = 0 \rightarrow \underline{u} = \underline{\nabla} \psi \rightarrow \partial_t \underline{u} = \underline{\nabla}(\partial_t \psi)$$

$$\underline{\nabla}(\partial_t \psi + \frac{p}{\rho} + \phi + \frac{u^2}{2}) = 0 \rightarrow \frac{u^2}{2} + \phi + \frac{p}{\rho} + \partial_t \psi = F(t)$$

B3

Bernoulli 4

~~**H3**~~ $\rho \neq cte$

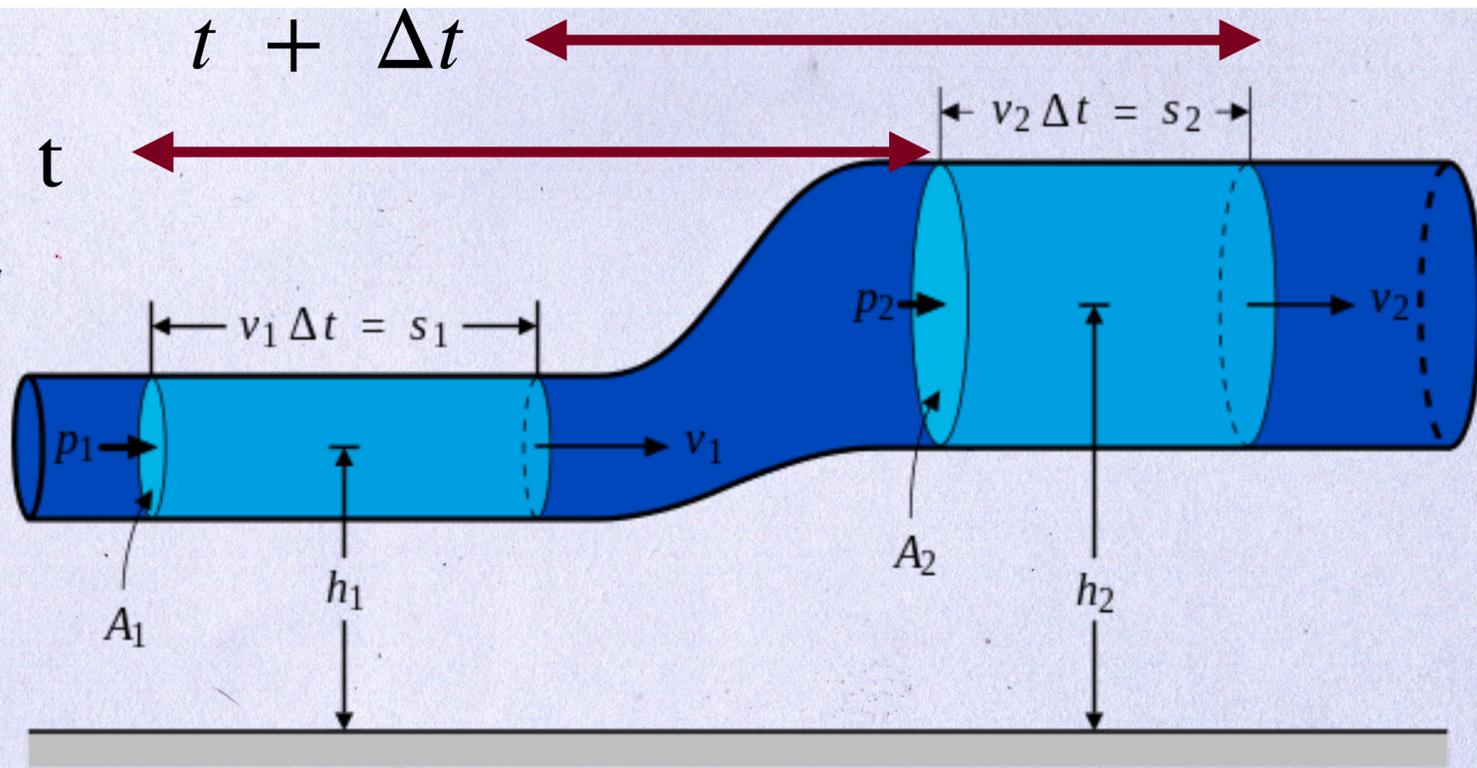
H6 Politrópico: $p = K \rho^\gamma$

$$\frac{1}{\rho} \underline{\nabla} p \neq \underline{\nabla}(\frac{p}{\rho}) \text{ pero } \frac{1}{\rho} \underline{\nabla} p = \frac{\gamma K \rho^{\gamma-1}}{\rho} \underline{\nabla} \rho = \frac{\gamma K}{\gamma-1} \underline{\nabla} \rho^{\gamma-1}$$

$$\therefore \frac{1}{\rho} \underline{\nabla} p = \underline{\nabla}(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}) \rightarrow \frac{u^2}{2} + \phi + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = cte$$

B4

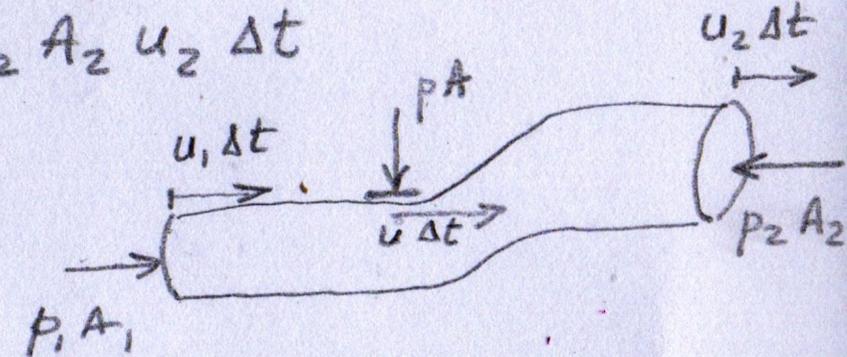
Conservación de energía: teoremas de Bernoulli (1738)



$t + \Delta t$, debe igualarse al trabajo de fuerzas no conservativas. Consideremos (por las dudas) no conservativo el trabajo de la presión en la superficie:

$$W = p_1 A_1 u_1 \Delta t - p_2 A_2 u_2 \Delta t$$

ya que el trabajo es nulo en la superficie lateral.



$$W = \Delta(E_1 + E_2)$$

$$\therefore \left(\frac{u_2^2}{2} + g h_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) \rho A_2 u_2 \Delta t = \left(\frac{u_1^2}{2} + g h_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) \rho A_1 u_1 \Delta t$$

Como el flujo es incompresible: $A_2 u_2 \Delta t = A_1 u_1 \Delta t$ y los extremos "1" y "2" son arbitrarios:

$$\frac{u^2}{2} + g h + \frac{p}{\rho} = \text{cte (línea)} \quad \text{tubo de espesor infinitesimal}$$

energía cinética energía potencial ? (energía interna)

Para el flujo estacionario e incompresible del tubo de flujo de la figura, la porción de fluido entre t y $t + \Delta t$ gana una energía

$$\Delta E_2 = \left(\frac{u_2^2}{2} + g h_2 \right) \rho A_2 u_2 \Delta t$$

y pierde

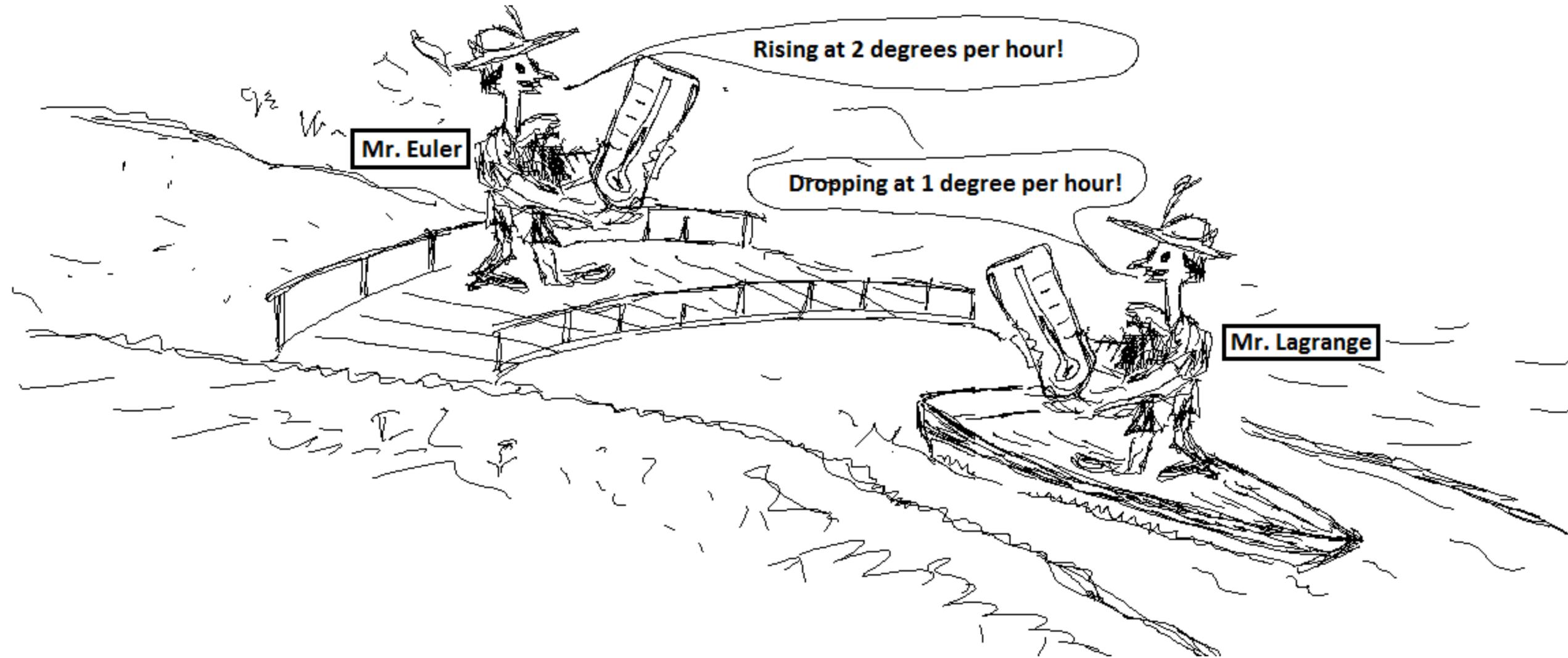
$$\Delta E_1 = - \left(\frac{u_1^2}{2} + g h_1 \right) \rho A_1 u_1 \Delta t$$

La variación de energía $\Delta E_1 + \Delta E_2$ entre t y

Derivadas total, parcial y convectiva

Mr. Euler, parado sobre un puente, mide la variación de temperatura del río, mientras que **Mr. Lagrange** lo hace desde un bote a la deriva.

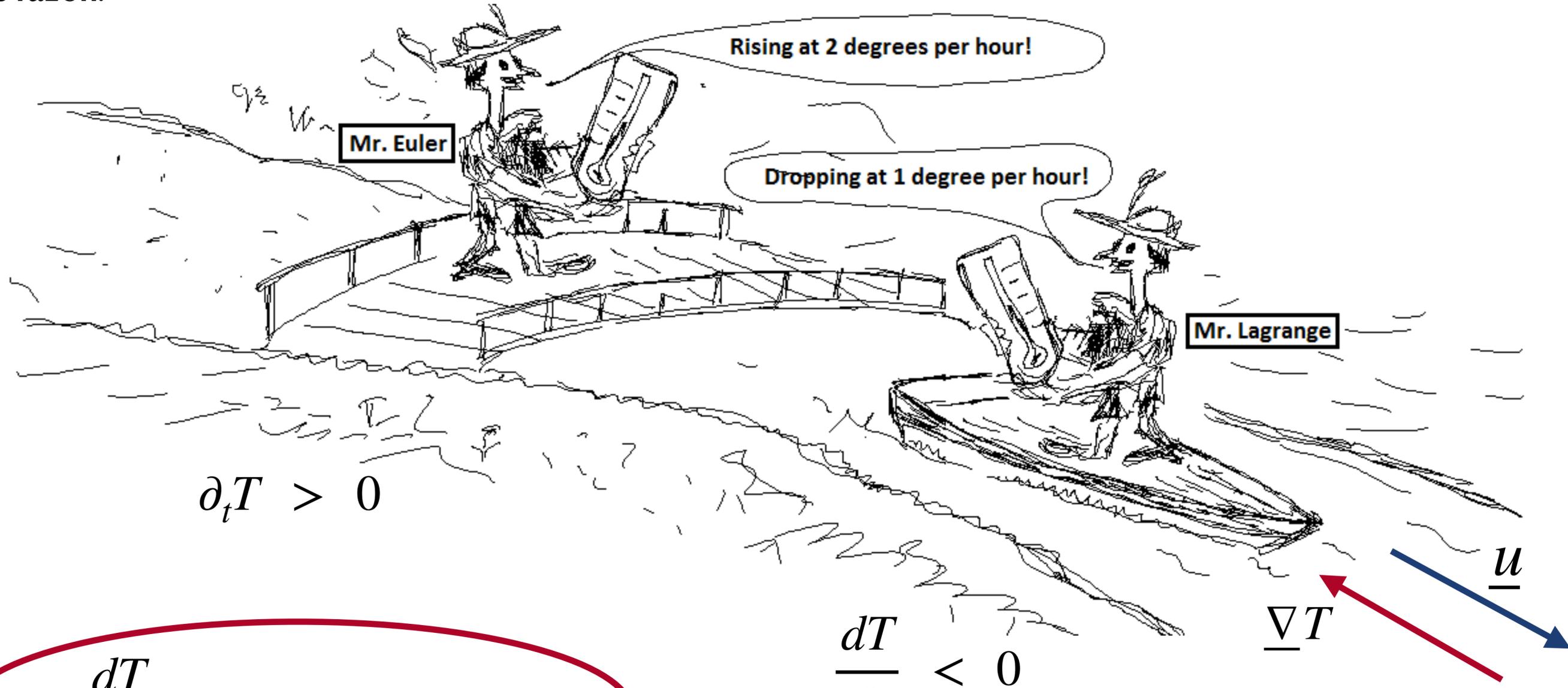
Quien tiene razón?



Derivadas total, parcial y convectiva

Mr. Euler, parado sobre un puente, mide la variación de temperatura del rio, mientras que **Mr. Lagrange** lo hace desde un bote a la deriva.

Quien tiene razón?



$$\frac{dT}{dt} = \partial_t T + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} T$$