Repaso de Clase 4

- Flujos planos ($u_{x,y}(x, y) \;=\; 0$) , incompresibles ($\dfrac{d\rho}{dt} \;=\; 0 \;=\; \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$) e irrotacionales ($\underline{\nabla} \times \underline{u} \;=\; 0$).

- <u>Función potencial</u>: singularidades de $\underline{\nabla} \times \underline{u}$ (vórtices) >>> $\phi(x, y)$ multivaluada

- <u>Función corriente</u>: singularidades de $\underline{\nabla} \cdot \underline{u}$ (fuentes) >>> $\psi(x, y)$ multivaluada

- <u>Potencial complejo</u>: $W(z) \;=\; \phi(x, y) \;+\; i\,\psi(x, y) \qquad z = x + iy$

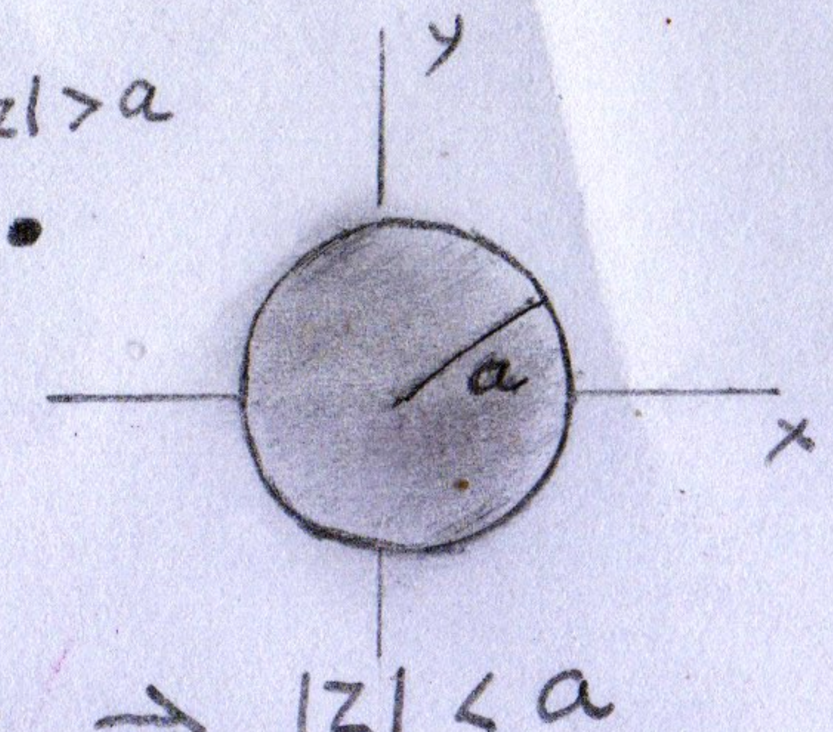
- Flujos simples: uniforme, fuente (sumidero), vórtice, punto de estancamiento.

- Método de imágenes.

Teorema del círculo (Milne-Thomson, 1940)

Sea un flujo con potencial complejo $W = W_0(z)$ con singularidades en $|z| > a$. Entonces, $W = W_0(z) \;+\; W_0^*(\frac{a^2}{z^*})$ es el potencial complejo con las mismas singularidades que W_0 en $|z| > a$ y con $|z| = a$ como linea de corriente.

Demostración



(i) Sing. de $W_0(z)$ en $|z|>a$ (fuera del círculo)

$\Downarrow$

Sing. de $W_0(\frac{a^2}{z^*})$ en $\left|\frac{a^2}{z^*}\right|>a \Rightarrow |z|<a$ (dentro del círculo).

Es decir que $W_0^*(\frac{a^2}{z^*})$ agrega singularidades (virtuales) dentro del círculo.

(ii) En $|z|=a \Rightarrow zz^*=a^2 \Rightarrow \frac{a^2}{z^*}=z$

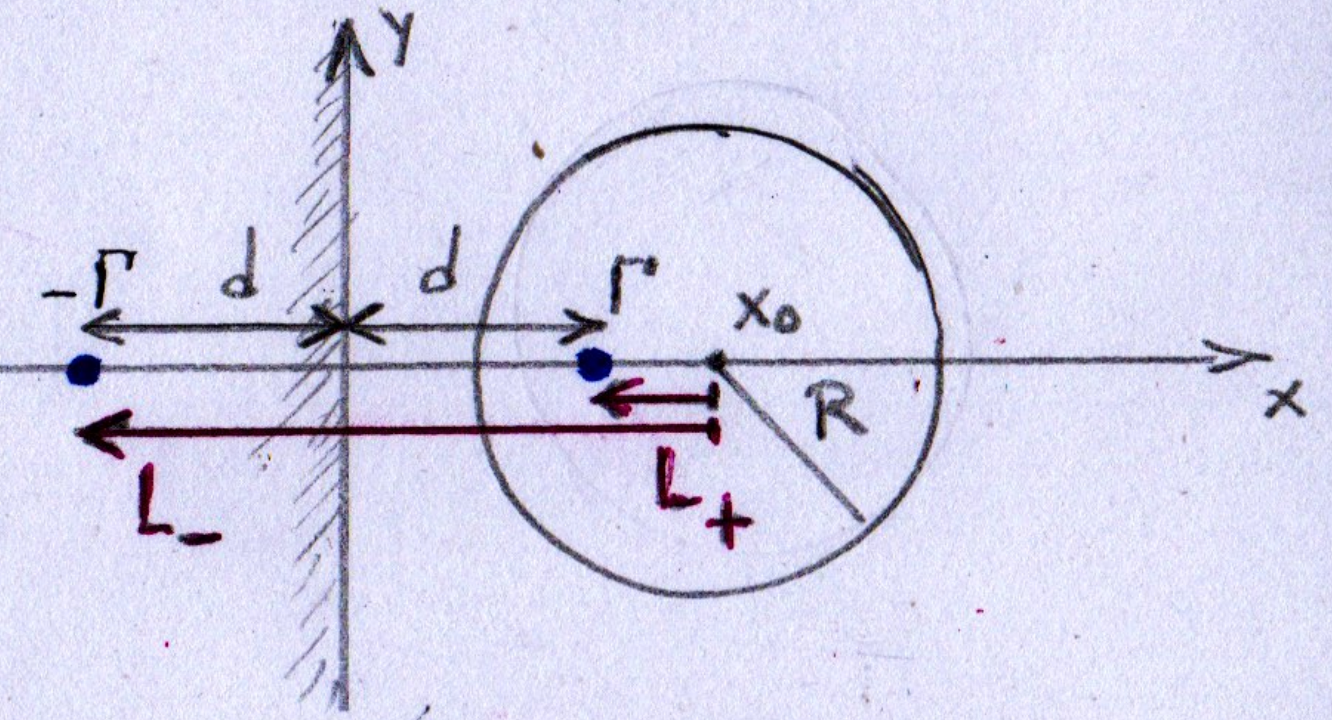
Entonces $W(|z|=a) = W_0(z)+W_0^*(z) \in \mathbb{R}$

$\therefore \mathrm{Im}\left[W(|z|=a)\right]=0=\text{cte} \Rightarrow$ $|z|=a$ es una línea de corriente

NOTA: El teorema es compatible con el agregado de un vórtice Γ en el origen: $W(z) = W_0(z) + W_0^*\left(\frac{a^2}{z^*}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z$

Veamos que con el ejemplo anterior y un poco de ingenio, pudimos haber deducido el teorema.

- El problema original es un vórtice Γ a distancia d de la pared.



- La circunferencia centrada en x_0 de radio R es una línea de corriente.
- Y si colocamos un círculo de radio R y centro x_0 frente a un vórtice $-\Gamma$ a distancia L_-?
- Se requiere un vórtice virtual $+\Gamma$ a distancia L_+

$L_\pm = x_0 \mp d \xrightarrow[\text{ejercicio}]{} L_+ \cdot L_- = R^2 \longrightarrow L_+ = \frac{R^2}{L_-}$

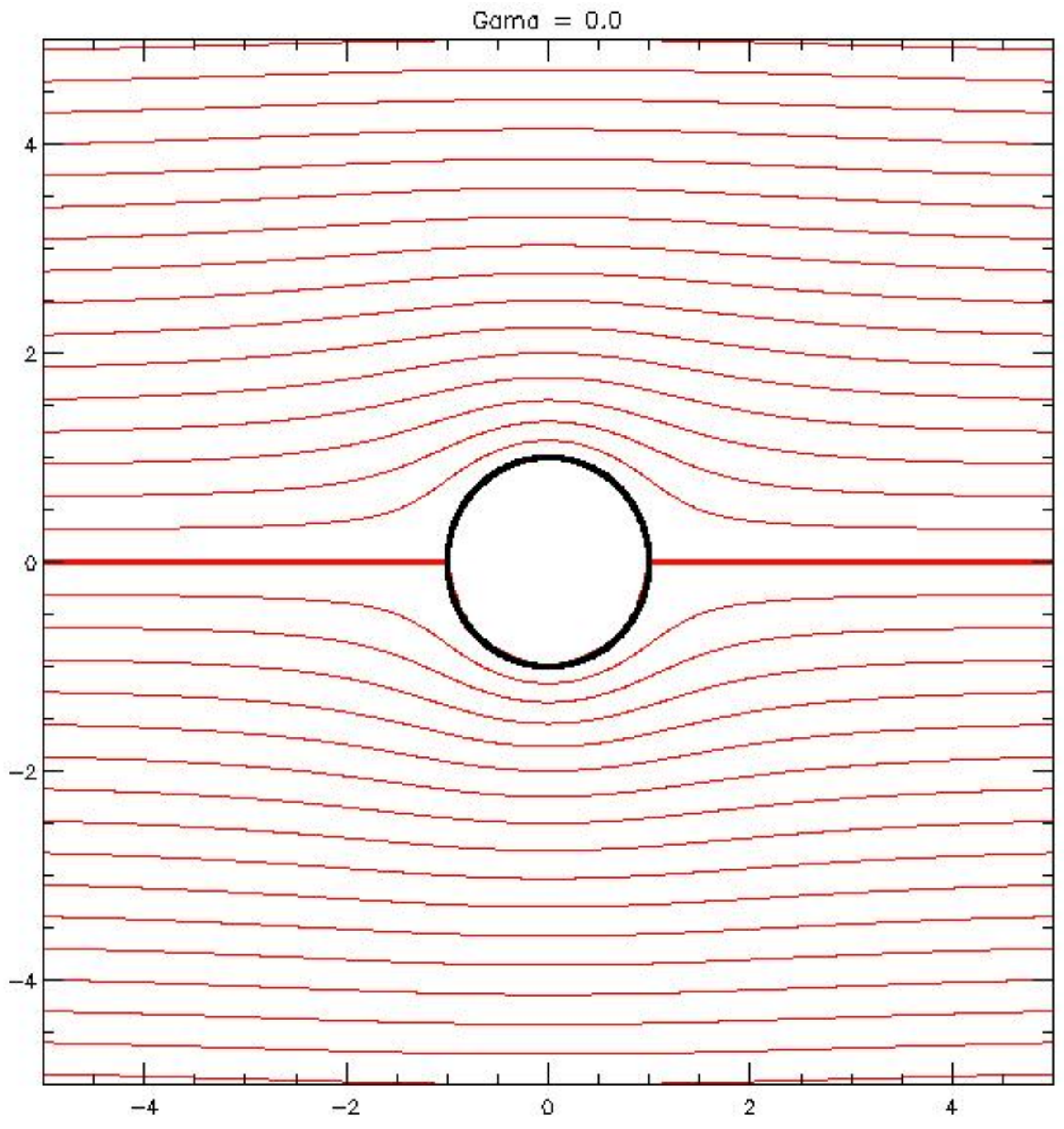
Flujo alrededor de un cilindro

Sea un flujo horizontal y uniforme u_0 sobre un círculo de radio a

$$W_0(z) = u_0 z \Rightarrow W = u_0\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$$

Verifiquen que

$$\psi = 0 \quad \text{en} \quad |z| = a$$



Noten que las líneas de corriente son simétricas respecto de $x \leftrightarrow -x$ y tambien $y \leftrightarrow -y$.

Agregamos ahora un vórtice $-\Gamma$ en el origen:

$$W(z) = U_0 z + U_0 \frac{a^2}{z} + \frac{-\Gamma}{2\pi i} \ln z$$

$$\psi = \Im m(W) = U_0 y - \frac{U_0 a^2 y}{x^2+y^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln\sqrt{x^2+y^2}$$

Utilizamos las constantes U_0 y a para adimensionar el problema.

$$\left.\begin{array}{l} \psi \to u_0 a \psi \\ (x,y) \to a(x,y) \end{array}\right\} \Rightarrow \psi(x,y) = y\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right) + \gamma \ln(x^2+y^2)$$

$$\gamma = \frac{\Gamma}{4\pi u_0 a}$$

Noten que la versión adimensional ya no depende de u_0, Γ, a sino solamente de γ.

El vórtice rompe la simetría $y \leftrightarrow -y$.

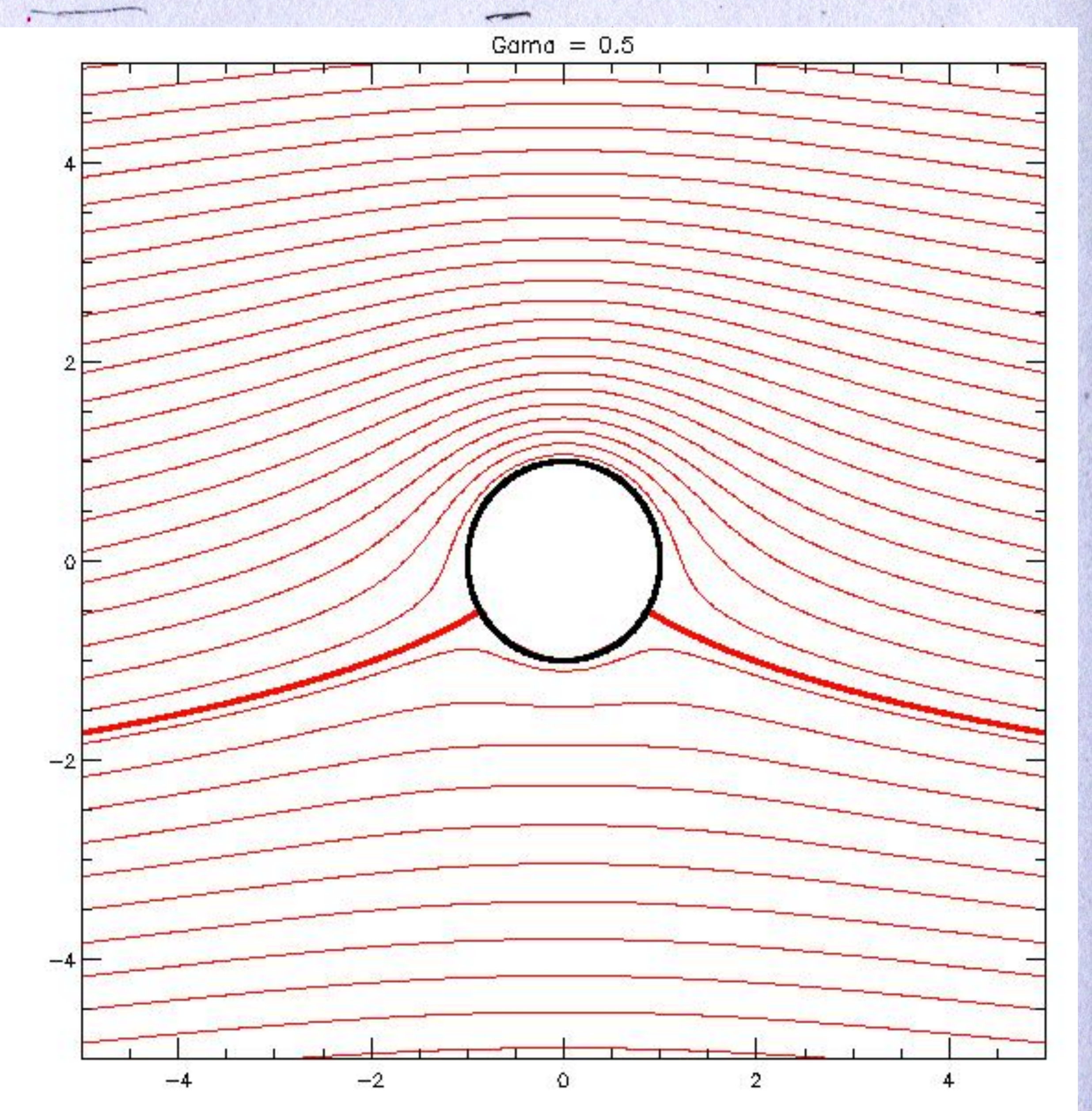
Busquemos puntos de estancamiento sobre $|z| = a$, donde se insertan líneas de corriente que llamamos separatrices.

En polares: $\left\{\begin{array}{l} u_\theta = \partial_r \psi \\ u_r = \frac{1}{r}\partial_\theta \psi \end{array}\right.$

$$\psi(r,\theta) = r\sin\theta\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) + 2\gamma \ln r$$

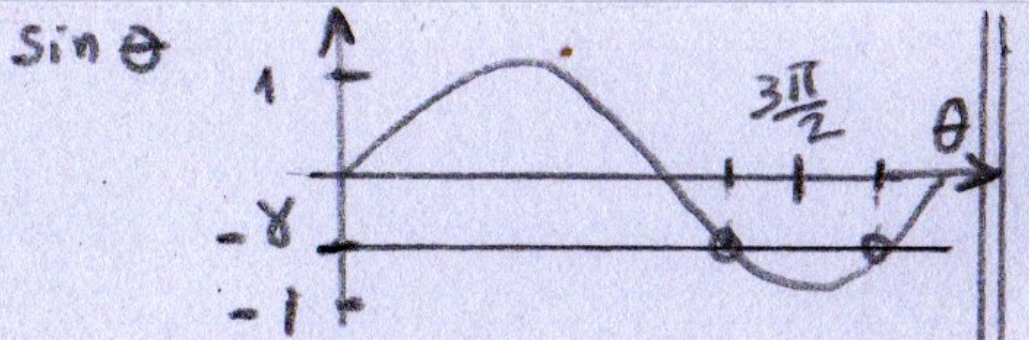
$$u_\theta(r=1) = 2\sin\theta + 2\gamma = 0$$

$\sin\theta = -\gamma$ Ptos. estanc. si $-1 < \gamma < 1$



Flujo alrededor de un cilindro

Noten que las soluciones de $\sin\theta = -\gamma$ equidistan de $\theta = \frac{3\pi}{2}$



Para $\gamma \to 1$, los dos puntos coinciden en $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Para $\gamma > 1$ ya no hay puntos de estancamiento sobre el perímetro. Busquemos ptos. estancamiento fuera del círculo:

$$u_\theta = \partial_r \psi = \sin\theta\left(1 + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{2\gamma}{r} = 0$$

$$u_r = \frac{1}{r}\partial_\theta \psi = \cos\theta\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) = 0 \longrightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

Para satisfacer $u_\theta = 0$ debe ser $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$ y

$$r^2 - 2\gamma r + 1 = 0 \longrightarrow r_0 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

La solución r_- resulta $r_- < 1$ si $\gamma > 1$.

Entonces si $\gamma > 1$ hay un único punto de estancamiento en $\theta = \frac{3\pi}{2}$ y $r_0 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1} > 1$.

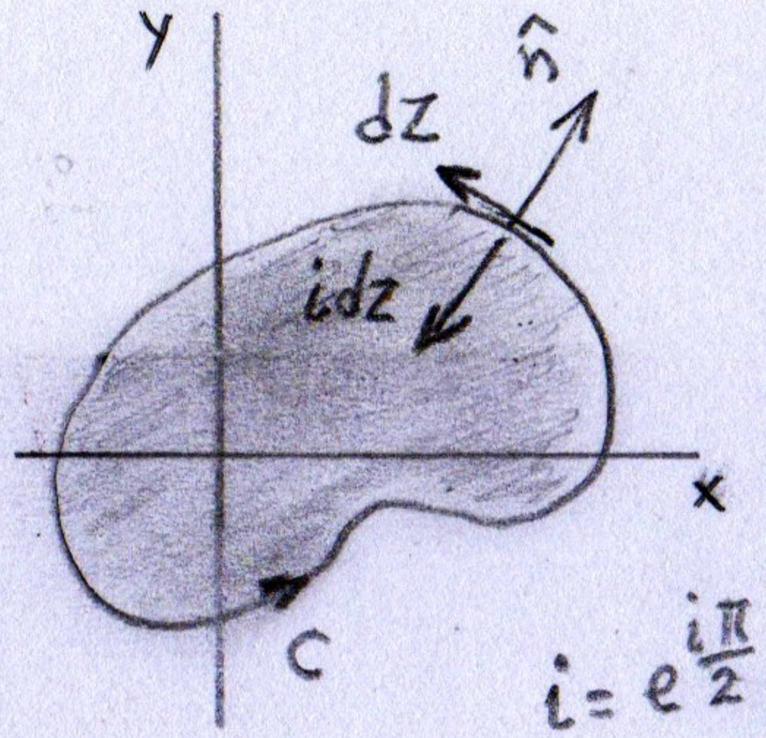
La separatriz tiene la forma de la figura, separando el flujo que evade al círculo por arriba y por abajo, pero también aislando un flujo estanco alrededor del círculo. Ejemplo: $\gamma = 1.5 \longrightarrow r_0 = 2.62$

Teorema de Blasius (1911)

Sea un flujo estacionario con potencial complejo W(z) alrededor de un sólido delimitado por la curva cerrada C. La fuerza del fluído sobre el sólido resulta: $F^* = F_x - iF_y = \dfrac{i\rho}{2}\oint_C dz\left(\dfrac{dW}{dz}\right)^2$

Demostración

La fuerza del fluído al sólido se ejerce a través de la pared y vale $\underline{F} = -\oint_C p\,\hat{n}\,ds$



$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

En notación compleja: $\begin{cases} \hat{n}\,ds \longrightarrow -i\,dz \\ \underline{F} \longrightarrow \mathbb{F} = F_x + iF_y \end{cases}$

Es decir que:

$$\mathbb{F} = F_x + iF_y = i\oint_C p\,dz \;\rightarrow\; \mathbb{F}^* = F_x - iF_y = -i\oint_C p\,dz^*$$

Por Bernoulli 2: $p = p_0 - \rho\dfrac{u^2}{2} = p_0 - \dfrac{\rho}{2}\left|\dfrac{dW}{dz}\right|^2$

$\therefore\; F_x - iF_y = \dfrac{i\rho}{2}\oint_C \left|\dfrac{dW}{dz}\right|^2 dz^*$ (porque $\oint_C p_0\,dz = 0$)

Se parece al resultado, pero no es.

Como sobre C es $\mathrm{Im}(W) = \mathrm{cte} \longrightarrow \mathrm{Im}(dW) = 0$

Sobre C es $dW = dW^* \longrightarrow \dfrac{dW}{dz}dz = \left(\dfrac{dW}{dz}dz\right)^* = \left(\dfrac{dW}{dz}\right)^* dz^*$

Entonces $\left|\dfrac{dW}{dz}\right|^2 dz^* = \dfrac{dW}{dz}\left(\dfrac{dW}{dz}\right)^* dz^* = \left(\dfrac{dW}{dz}\right)^2 dz$ sobre C

$$\therefore\; F^* = F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint_C dz\left(\frac{dW}{dz}\right)^2$$

Ejercicio: Muestren que la fuerza de un flujo $u_0\hat{x}$ sobre un círculo de radio a con vórtice $-\Gamma$ en el origen es

$$\underline{F} = \hat{y}\,\rho u_0 \Gamma$$