

# Repaso de Clase 5

- Método de imágenes para contornos circulares:

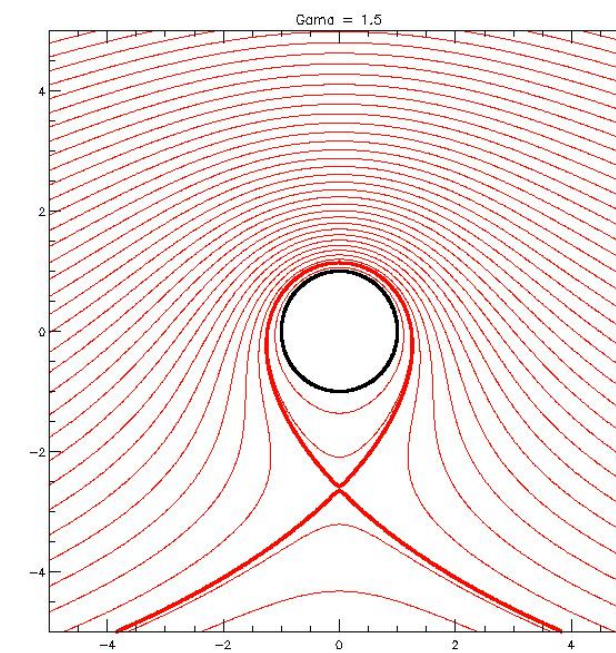
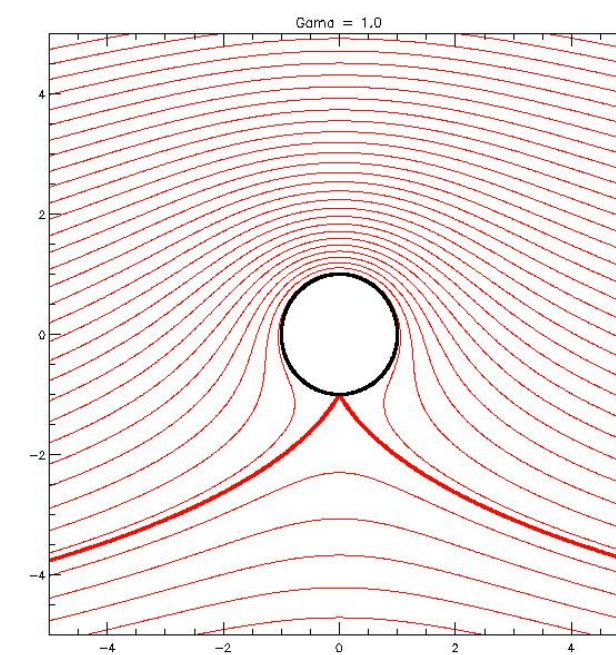
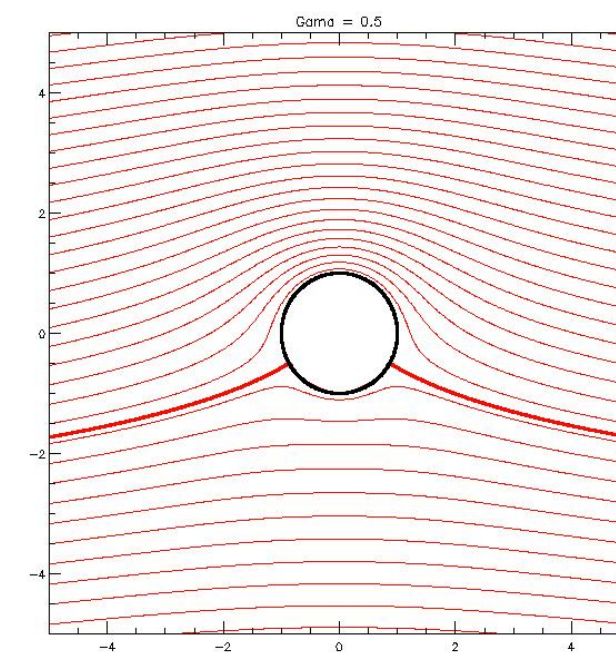
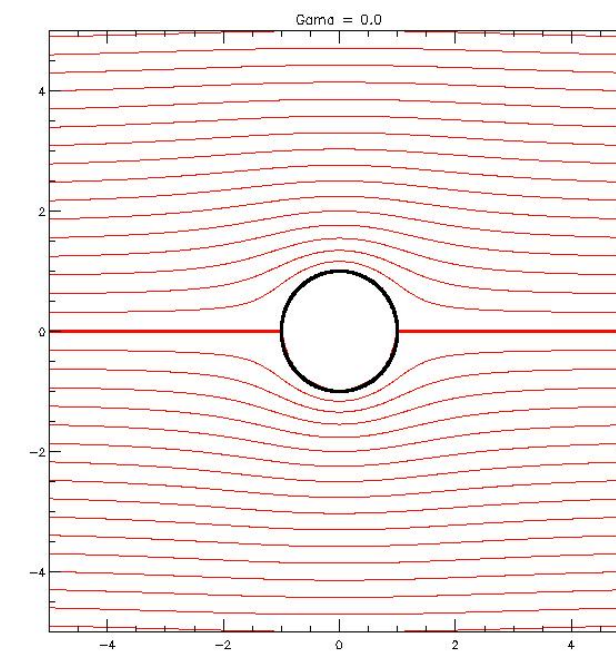
- Teorema del círculo  $\ggg W = W_0(z) + W_0^*\left(\frac{a^2}{z^*}\right)$

- Agregado de vórtice en el origen  $\ggg$  Flujo alrededor de un cilindro

- Puntos de estancamiento, separatrices

- Fuerza sobre un contorno:

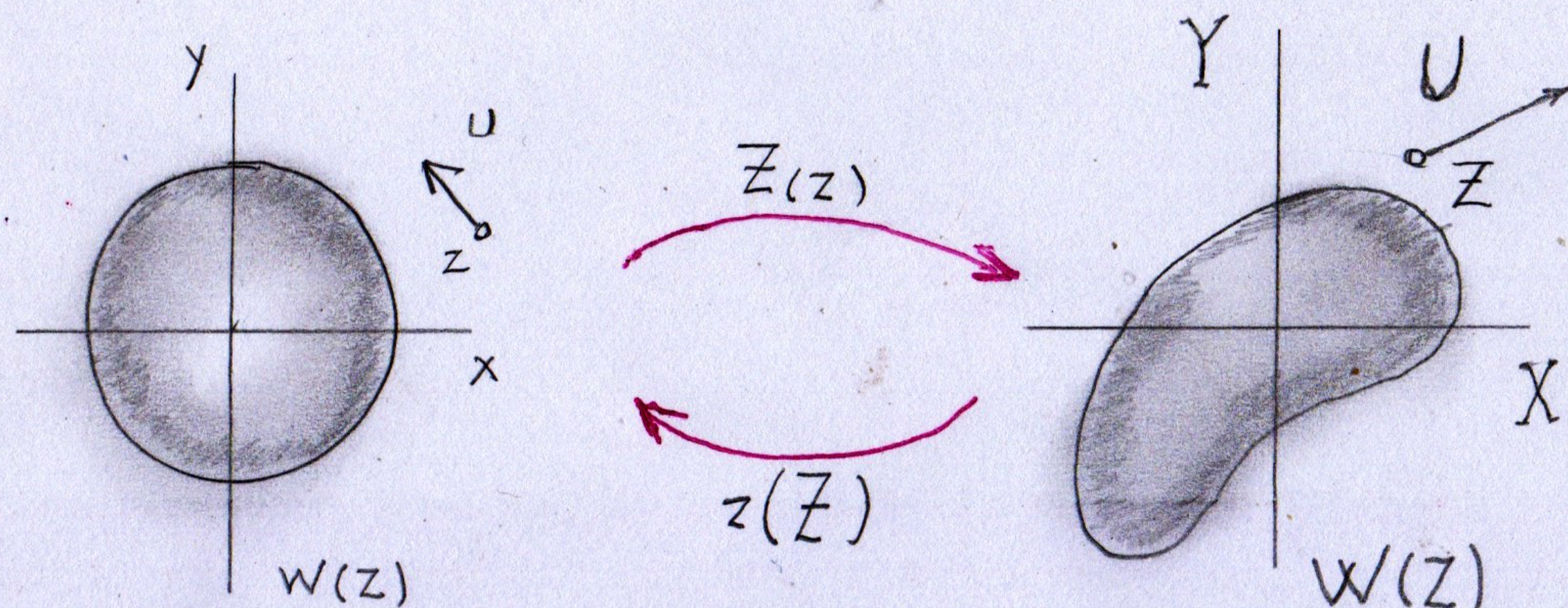
- Teorema de Blasius  $\ggg F^* = F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C dz \left( \frac{dW}{dz} \right)^2$





# Transformaciones conformes

Una transformación  $Z = Z(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  se dice **conforme** si es **analítica** (desarrollable en Taylor), salvo en unos pocos puntos singulares.



Definimos  $W(Z)$  tq.  $W(Z) \equiv w(z(Z))$

Entonces

$$U^* = \frac{dW}{dZ} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dZ} \longrightarrow \frac{dW}{dZ} = \frac{dw/dz}{Z'(z)}$$

$$\frac{dz}{dZ} = \frac{1}{Z'(z)}$$

Es decir que:

$$U_x - iU_y = \frac{u_x - iu_y}{Z'(z)}$$

## Teorema de Riemann

Todo contorno cerrado y derivable en el plano  $Z = X + iY$  puede mapearse en una circunferencia en  $z = x + iy$  a través de alguna transf. conforme  $z(Z)$ .

NOTA: Las transf. conformes conservan los ángulos, para todo  $z_0$  tq.  $Z'(z_0) \neq 0$ .

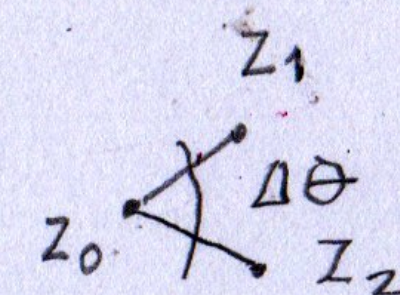
$Z(z)$  analítica:

$$Z - Z_0 \approx Z'(z_0)(z - z_0) + \dots$$

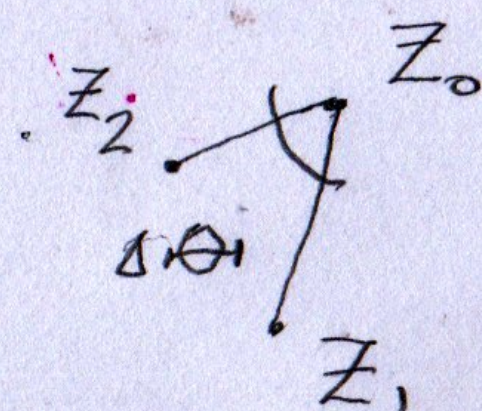
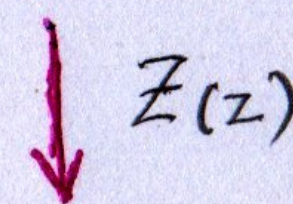
Para todo par  $z_1, z_2$  próximo a  $z_0$ :

$$\frac{Z_1 - Z_0}{Z_2 - Z_0} = \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \quad \text{si } Z'(z) \neq 0$$

$$e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = e^{i(\Theta_1 - \Theta_2)} \longrightarrow \Delta\Theta = \Delta\theta$$



(z)



(Z)

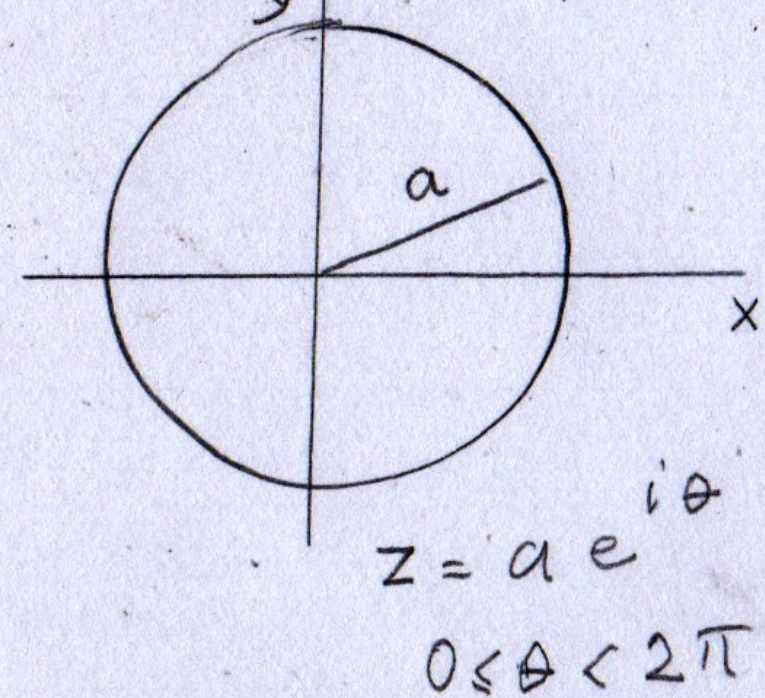


# Transformación de Zhukovsky (1910)

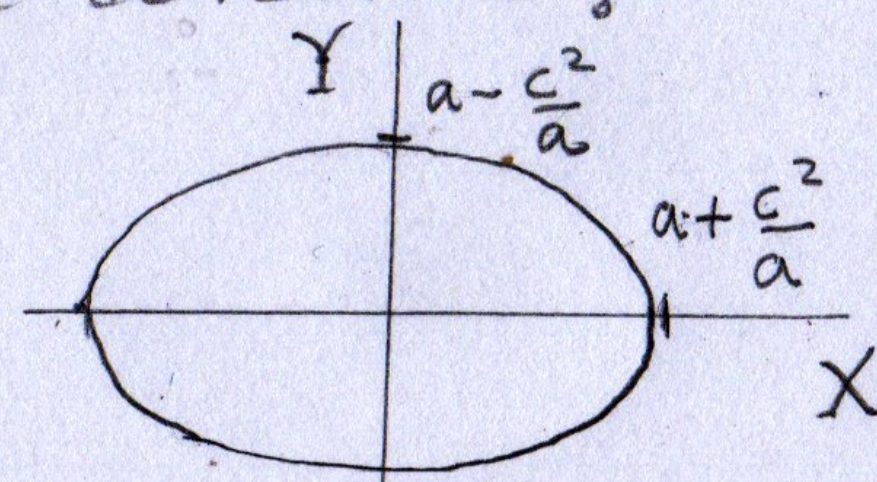
Estudiemos las transf. conformes

$$Z = z + \frac{c^2}{z} \quad c \in \mathbb{R}$$

Como se mapea una circunferencia de radio  $a$ ?



$$Z = a e^{i\theta} + \frac{c^2}{a e^{i\theta}}$$

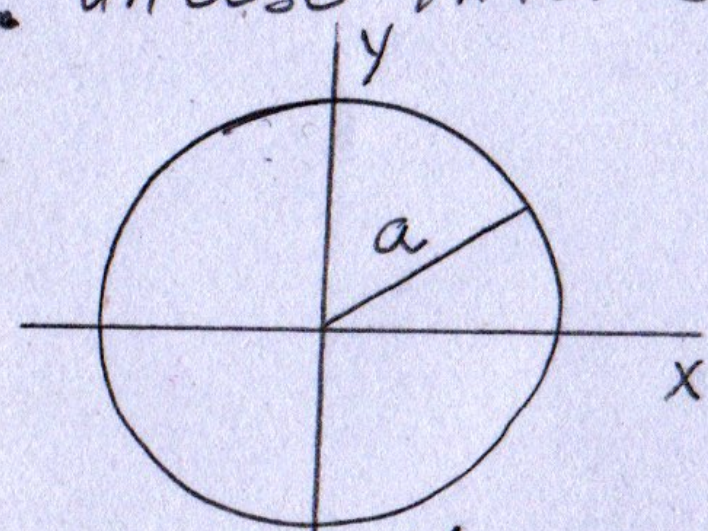


$$X = \operatorname{Re} Z = \left(a + \frac{c^2}{a}\right) \cos \theta$$

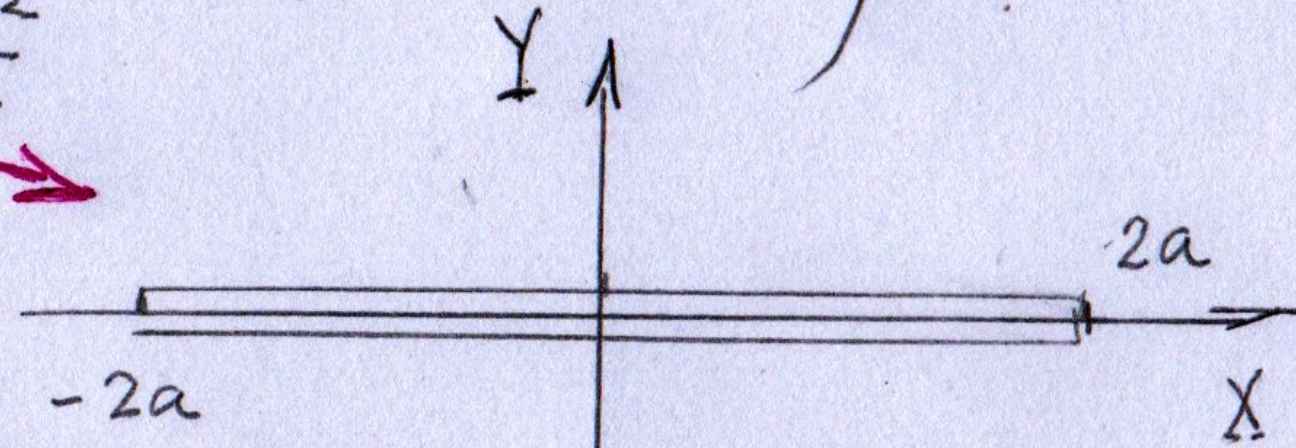
$$Y = \operatorname{Im} Z = \left(a - \frac{c^2}{a}\right) \sin \theta$$

$$\frac{X^2}{\left(a + \frac{c^2}{a}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(a - \frac{c^2}{a}\right)^2} = 1$$

- Se mapea en elipses con mayor o menor elongación, según el valor del parámetro  $c$  de la transformación.
- Un caso interesante es la transf. Zhukovsky con  $c = a$ .



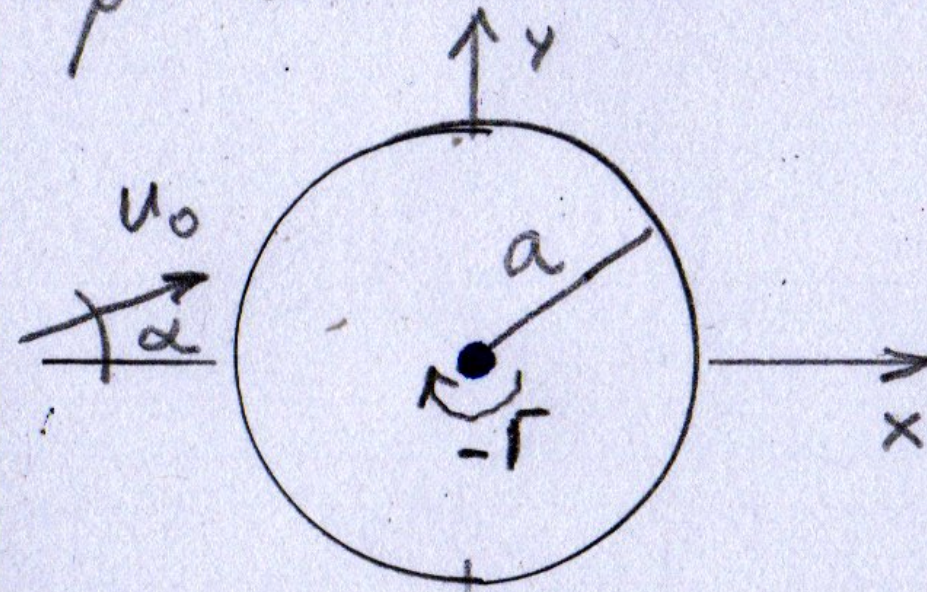
$$Z = z + \frac{a^2}{z}$$



Vamos a suponer que el nuevo contorno corresponde a un corte de un ala plana de avión.

Ejemplo: Ala plana de avión (avión de papel)

Planteamos un flujo uniforme incidendo sobre un círculo con un vórtice en el origen. Y luego aplicamos Zhukovsky con  $c = a$



$\alpha$ : ángulo de ataque

$$w(z) = u_0 \left( z e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z} e^{i\alpha} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$$

Si transformamos Zhukovsky con  $c = a$ , el campo de velocidades transformado:

$$U_x - iU_y = \frac{dW}{dZ} = \frac{dw/dz}{Z'(z)} = \frac{u_0 \left( e^{-i\alpha} - \frac{a^2}{z^2} e^{i\alpha} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z}}{1 - \frac{a^2}{z^2}}$$

Si calculamos la velocidad en el contorno del ala:

$$\left. \begin{array}{l} z = a e^{i\theta} \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{array} \right\} \rightarrow U_x - iU_y = \frac{u_0 \left( e^{-i\alpha} - e^{i(\alpha-2\theta)} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$$

$$U_x - iU_y = \frac{u_0 \left( e^{i(\theta-\alpha)} - e^{i(\alpha-\theta)} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi a}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$$



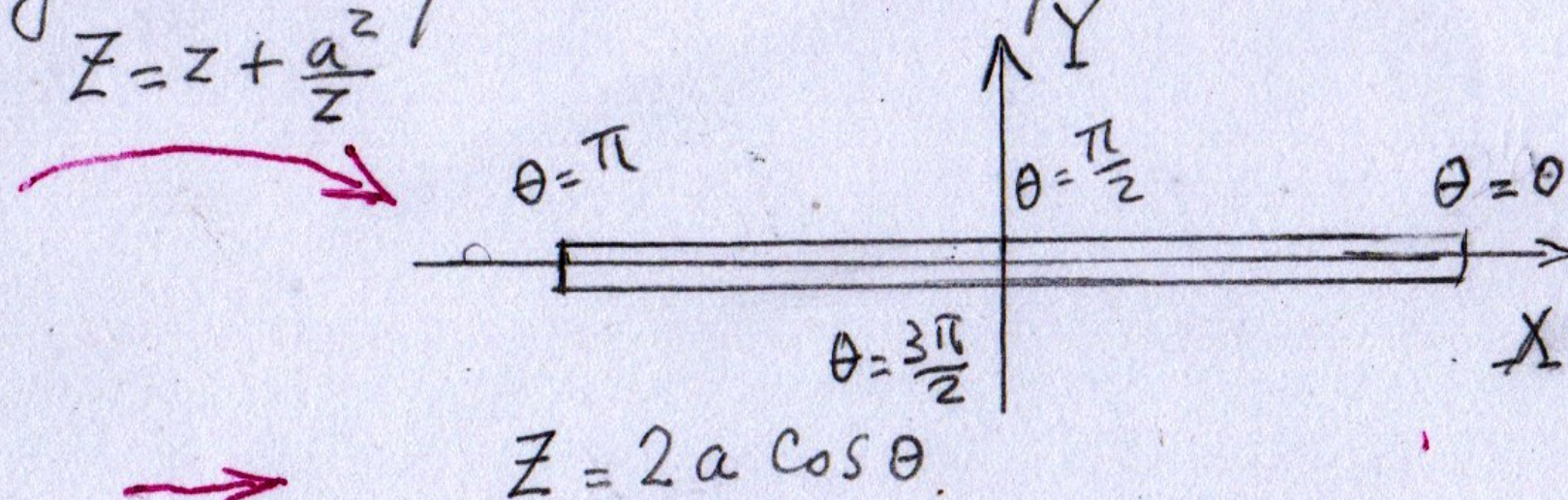
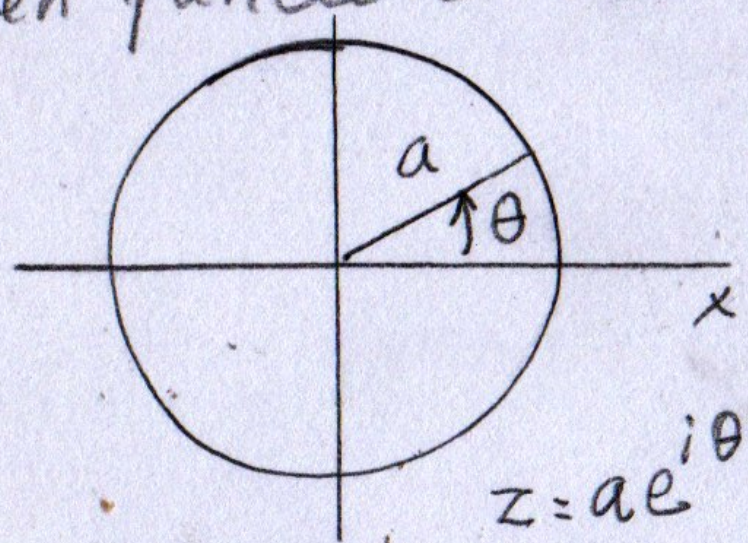
# Ala plana de avión

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\rightarrow U_x - iU_y = \frac{U_0 \sin(\theta - \alpha) + \frac{\Gamma}{4\pi a}}{\sin \theta}$$

$$\gamma = \frac{\Gamma}{4\pi U_0 a} \rightarrow U_x - iU_y = U_0 \frac{\sin(\theta - \alpha) + \gamma}{\sin \theta} \rightarrow \underline{U_y = 0}$$

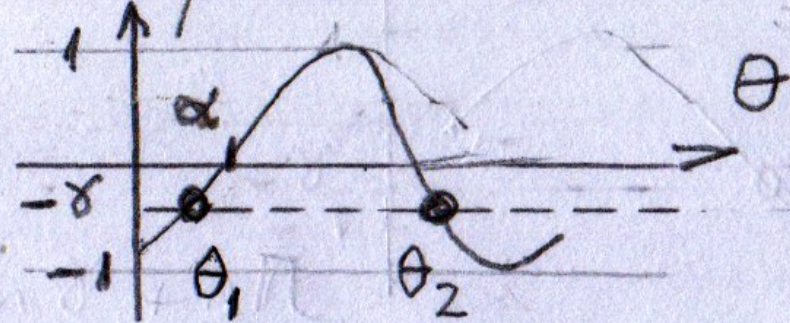
Obtenemos la velocidad en el contorno transformado, en función del ángulo de polares en el plano  $Z$ .



• Los puntos de estancamiento cumplen

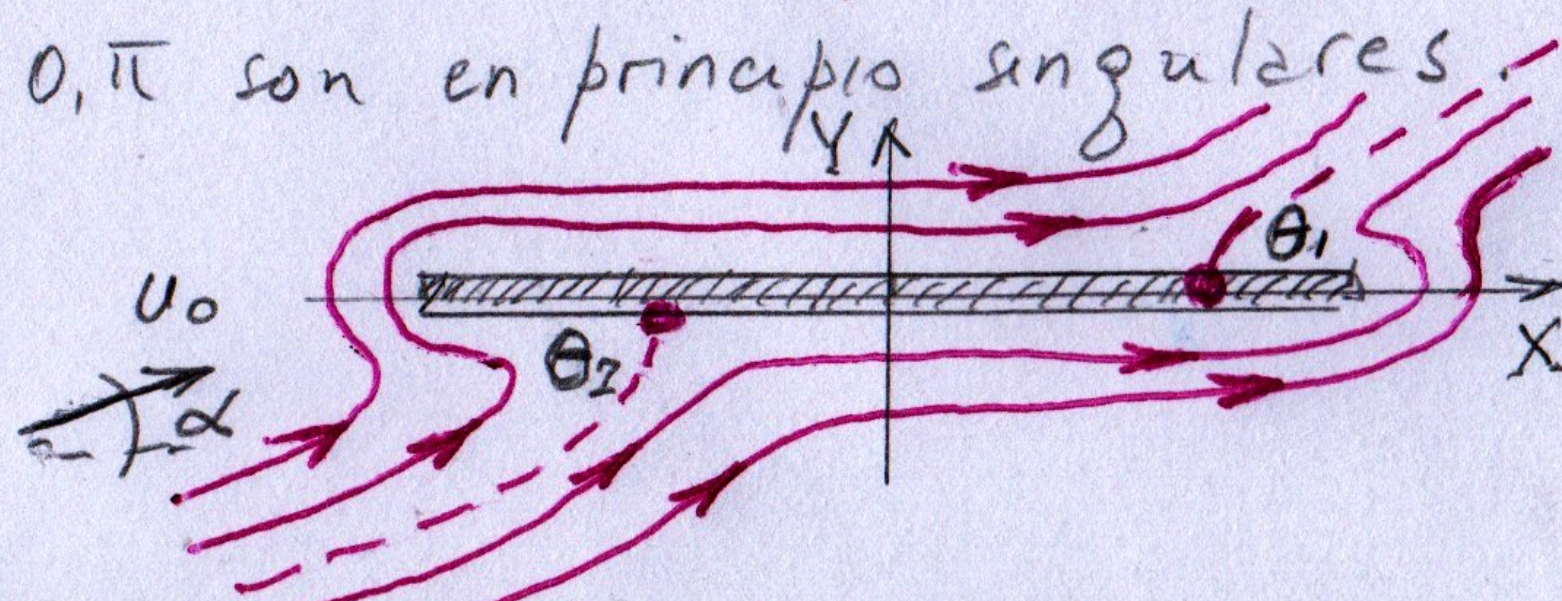
$$U_x = 0 \rightarrow \sin(\theta - \alpha) = -\gamma$$

$$\therefore \theta = \alpha - \arcsin \gamma + n\pi$$

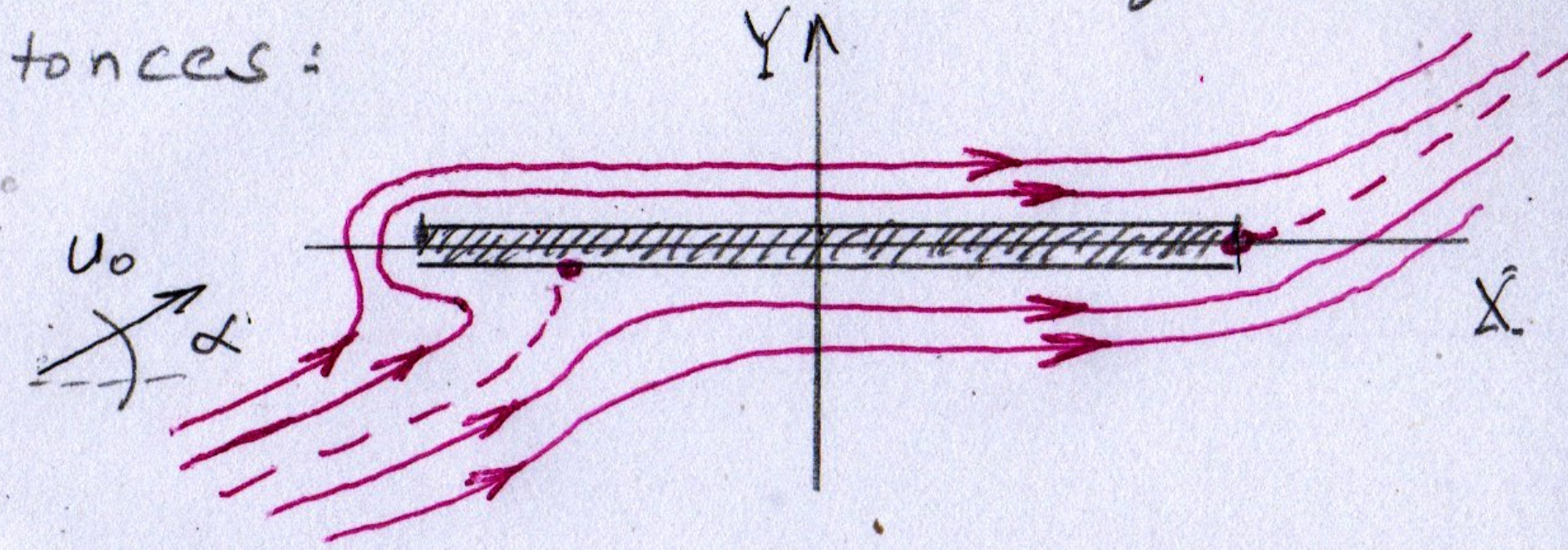


• Los puntos  $\theta = 0, \pi$  son en principio singulares.

• Las líneas de corriente son



Ejercicio: Mostrar que existe un valor del ángulo de ataque  $\alpha$  para el cual se evita la singularidad en  $\theta = 0$  y entonces:



$$\gamma = \sin \alpha : \overline{\alpha + \pi}$$

Podemos usar Blasius para obtener la fuerza de sustentación sobre el ala plana:

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint \left( \frac{dW}{dz} \right)^2 dz = \frac{i\rho}{2} \oint \frac{\left( \frac{dW}{dz} \right)^2}{Z'^2} Z' dz$$

Aplicando el Teorema de los

$$\text{Residuos} \left( \oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}\{f, z_k\} \right)$$

obtenemos

$$\underline{F = F_x - iF_y = \rho U_0 \Gamma e^{-i(\alpha + \frac{\pi}{2})}}$$

