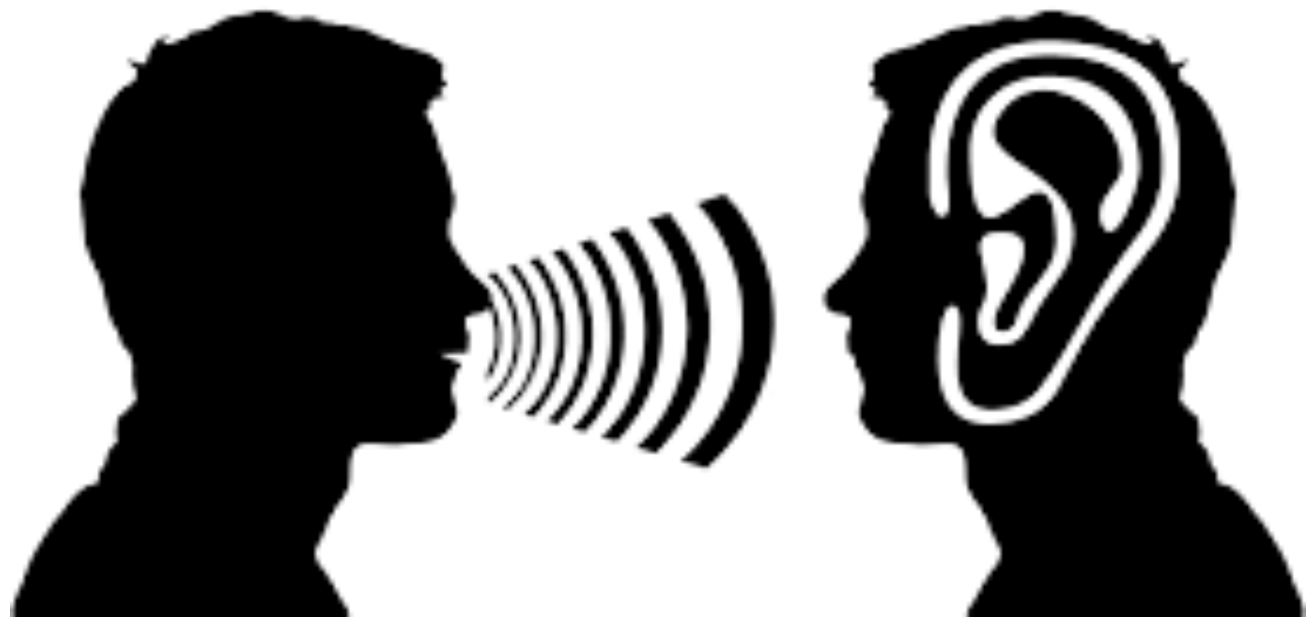
Repaso de Clase 12

- Flujos compresibles >>> Ecuación de continuidad.



- Propagación de ondas acústicas >>> Ondas no dispersivas.

- Generación de ondas de choque >>> $\partial_t u + u\partial_x u = 0$

- Método de las características

Método de las características

Veamos los efectos no lineales en la evolución de flujos ideales en 1D, a lo largo de x:

Ec. cont: $\partial_t \rho + u\,\partial_x \rho + \rho\,\partial_x u = 0$

Ec. mov: $\partial_t u + u\,\partial_x u + \frac{1}{\rho}\,\partial_x p = 0$

Polítropa: $p = cte.\,\rho^\gamma$

Def. la variable:

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{\gamma p}{\rho} \qquad c = c(x,t)$$

Reemplazamos $p = cte.\,\rho^\gamma$ en la ec. movimiento:

$$\frac{1}{\rho}\,\partial_x p = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\,\partial_x \rho = c^2\,\frac{\partial_x \rho}{\rho}$$

y ahora ponemos $\rho(x,t)$ en términos de $c(x,t)$:

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = cte.\,\gamma\,\rho^{\gamma-1} \longrightarrow \rho = \left(\frac{c^2}{cte.\,\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \longrightarrow \frac{\partial_x \rho}{\rho} = \frac{2}{\gamma-1}\,\frac{\partial_x c}{c}$$

Entonces:

Ec. cont.: $\frac{2}{\gamma-1}\left(\partial_t c + u\,\partial_x c\right) + c\,\partial_x u = 0$

Ec. mov.: $\partial_t u + u\,\partial_x u + \frac{2}{\gamma-1}\,c\,\partial_x c = 0$

Son dos ecs. acopladas para los campos de velocidades $u(x,t)$ y $c(x,t)$. Podemos reescribirlas como:

$$\partial_t\left(\frac{u}{2}\right) + u\,\partial_x\left(\frac{u}{2}\right) + c\,\partial_x\left(\frac{c}{\gamma-1}\right) = 0$$

$$\partial_t\left(\frac{c}{\gamma-1}\right) + u\,\partial_x\left(\frac{c}{\gamma-1}\right) + c\,\partial_x\left(\frac{u}{2}\right) = 0$$

Sumando y restando estas ecuaciones:

$$\boxed{\left[\partial_t + (u \pm c)\,\partial_x\right]\left(\frac{u}{2} \pm \frac{c}{\gamma-1}\right) = 0}$$

Estas dos ecuaciones no lineales son de la forma $\left[\partial_t + u\,\partial_x\right] u = 0$. Veamos como resolverlas.

Curvas características e invariantes de Riemann

Dada una función $F(x,t)$ y una curva $(x(t),t)$ en el plano (x,t), la variación de F sobre la curva está dada por

$$F(t) = F(x(t),t) \longrightarrow \frac{dF}{dt} = \partial_t F + \frac{dx}{dt}\partial_x F$$

En particular, si $F = cte$ sobre $x(t)$ entonces:

$$\frac{dF}{dt} = \partial_t F + \frac{dx}{dt}\partial_x F = 0$$

Noten que las ecuaciones

$$\Big[\partial_t + \underbrace{(u\pm c)}_{\frac{dx}{dt}}\,\partial_x\Big]\underbrace{\left(\frac{u}{2}\pm\frac{c}{\gamma-1}\right)}_{F} = 0$$

tienen esta forma.

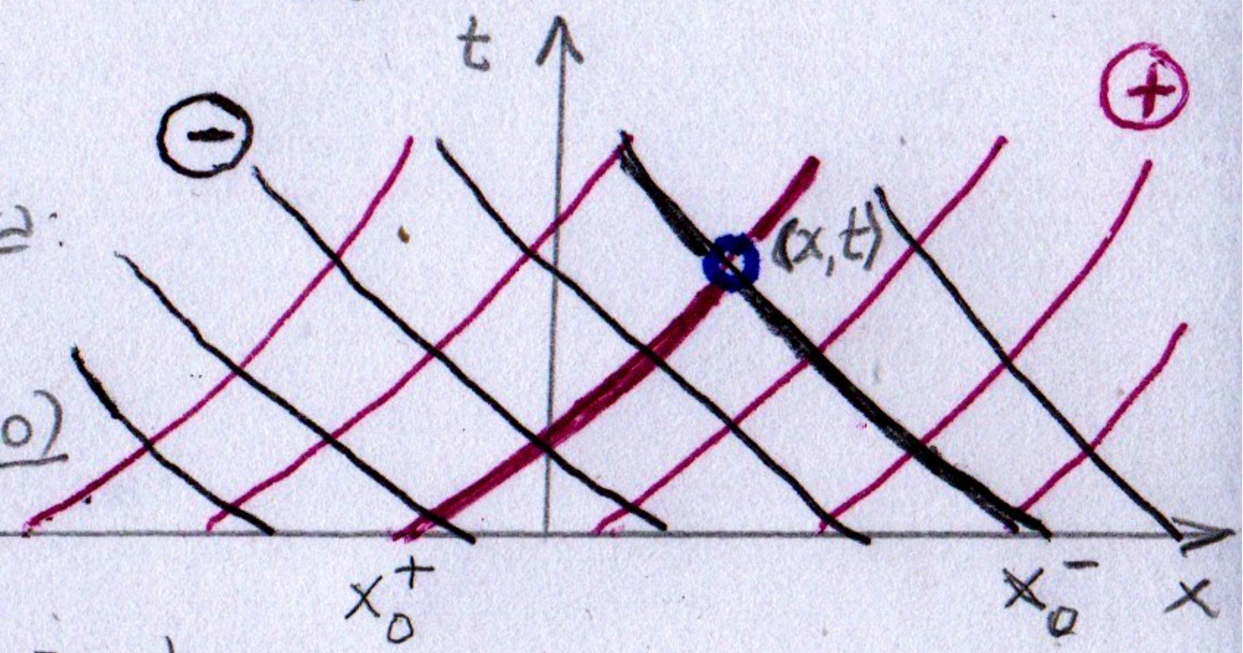
- Las curvas $\frac{dx^\pm}{dt} = u \pm c$ se llaman características.
- Las funciones $F^\pm = \frac{u}{2} \pm \frac{c}{\gamma-1}$ que permanecen constantes sobre ellas, se llaman invariantes de Riemann

Es decir que:

$F^+ = \frac{u}{2} + \frac{c}{\gamma-1} = cte^+$ sobre $x^+(t)$ tq $\frac{dx^+}{dt} = u + c$ (curvas $\oplus$)

$F^- = \frac{u}{2} - \frac{c}{\gamma-1} = cte^-$ sobre $x^-(t)$ tq $\frac{dx^-}{dt} = u - c$ (curvas $\ominus$)

Entonces, para cualquier punto (x,t) como el de la figura:



$$F^+ = \frac{u(x,t)}{2} + \frac{c(x,t)}{\gamma-1} = \frac{u(x_0^+,0)}{2} + \frac{c(x_0^+,0)}{\gamma-1}$$

$$F^- = \frac{u(x,t)}{2} - \frac{c(x,t)}{\gamma-1} = \frac{u(x_0^-,0)}{2} - \frac{c(x_0^-,0)}{\gamma-1}$$

donde $u_0^\pm = u_0(x_0^\pm,0)$ y $c_0^\pm = c(x_0^\pm,0)$ son condiciones iniciales. De las ecs. anteriores, obtenemos $u(x,t)$ y $c(x,t)$ en función de las cond. iniciales:

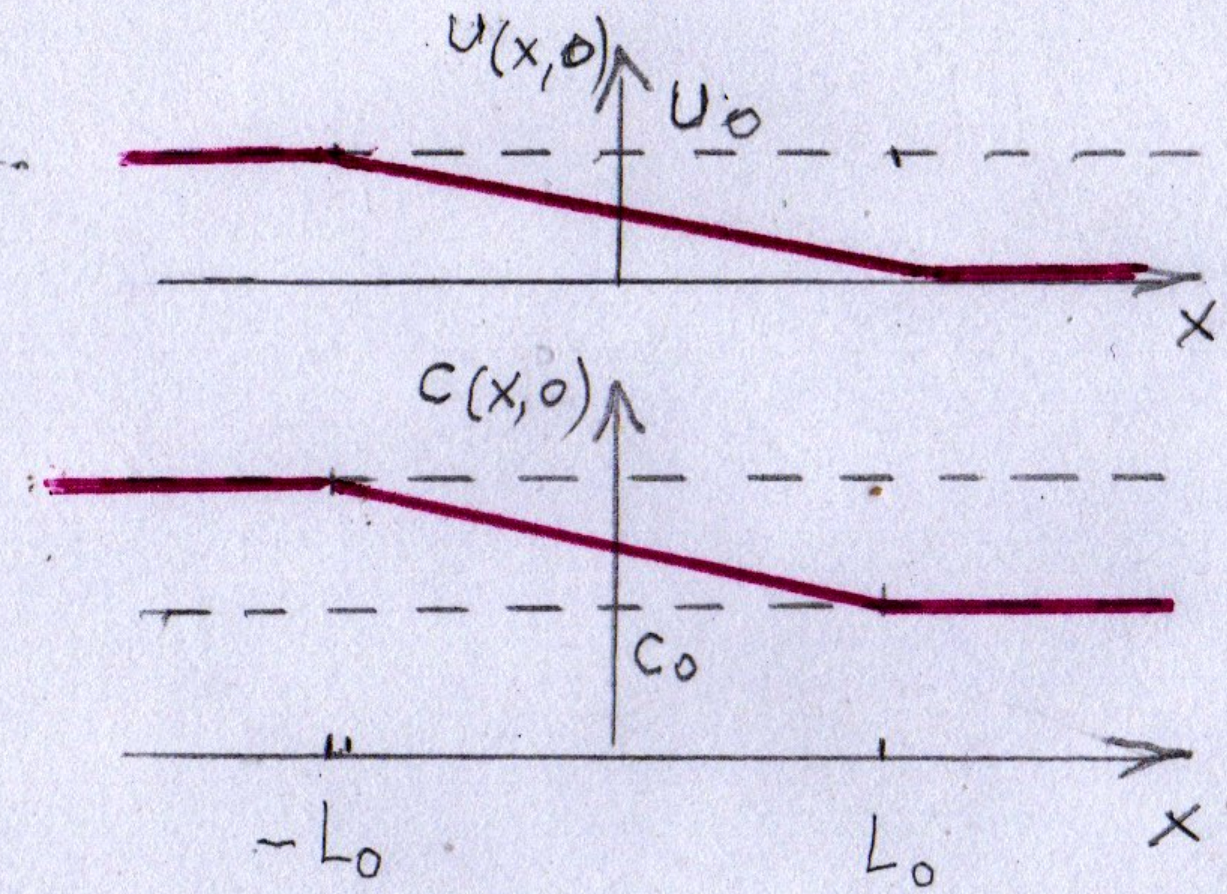
$$\boxed{\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{u_0^+ + u_0^-}{2} + \frac{c_0^+ - c_0^-}{\gamma-1} \\ \frac{2\,c(x,t)}{\gamma-1} &= \frac{u_0^+ - u_0^-}{2} + \frac{c_0^+ + c_0^-}{\gamma-1} \end{aligned}}$$

Hemos resuelto parte del problema. Debemos todavía obtener las curvas $x^\pm(t)$ tq $\frac{dx^\pm}{dt} = u \pm c$

Formación y propagación de ondas de choque

Veamos un ejemplo que muestra la formación de una onda de choque.

Sean las cond. iniciales:



$$u(x,0) = \frac{u_0}{2}\left(1 - tgh\left(\frac{x}{L_0}\right)\right)$$

$$c(x,0) = c_0 + \frac{\gamma-1}{2}\, u(x,0)$$

Calculemos $F^-(x,0)$:

$$F^-_{(x,0)} = \cancel{\frac{u(x,0)}{2}} - \frac{1}{\gamma-1}\left(c_0 + \cancel{\frac{\gamma-1}{2}\, u(x,0)}\right) = -\frac{c_0}{\gamma-1} = cte$$

Noten que F^- no solo es cte en cada curva ⊖ sino que es indep. de x en $t=0$

Entonces : $F^-(x,t) = -\dfrac{c_0}{\gamma-1} = cte \;,\; \forall\, (x,t)$

Como evoluciona $c(x,t)$?

$$F^+ - F^- = \frac{2}{\gamma-1}\, c \longrightarrow c(x,t) = \frac{\gamma-1}{2}\big(\overbrace{F^+}^{cte\,\oplus} - \overbrace{F^-}^{cte}\big) = cte\,\oplus$$

Y $u(x,t)$?

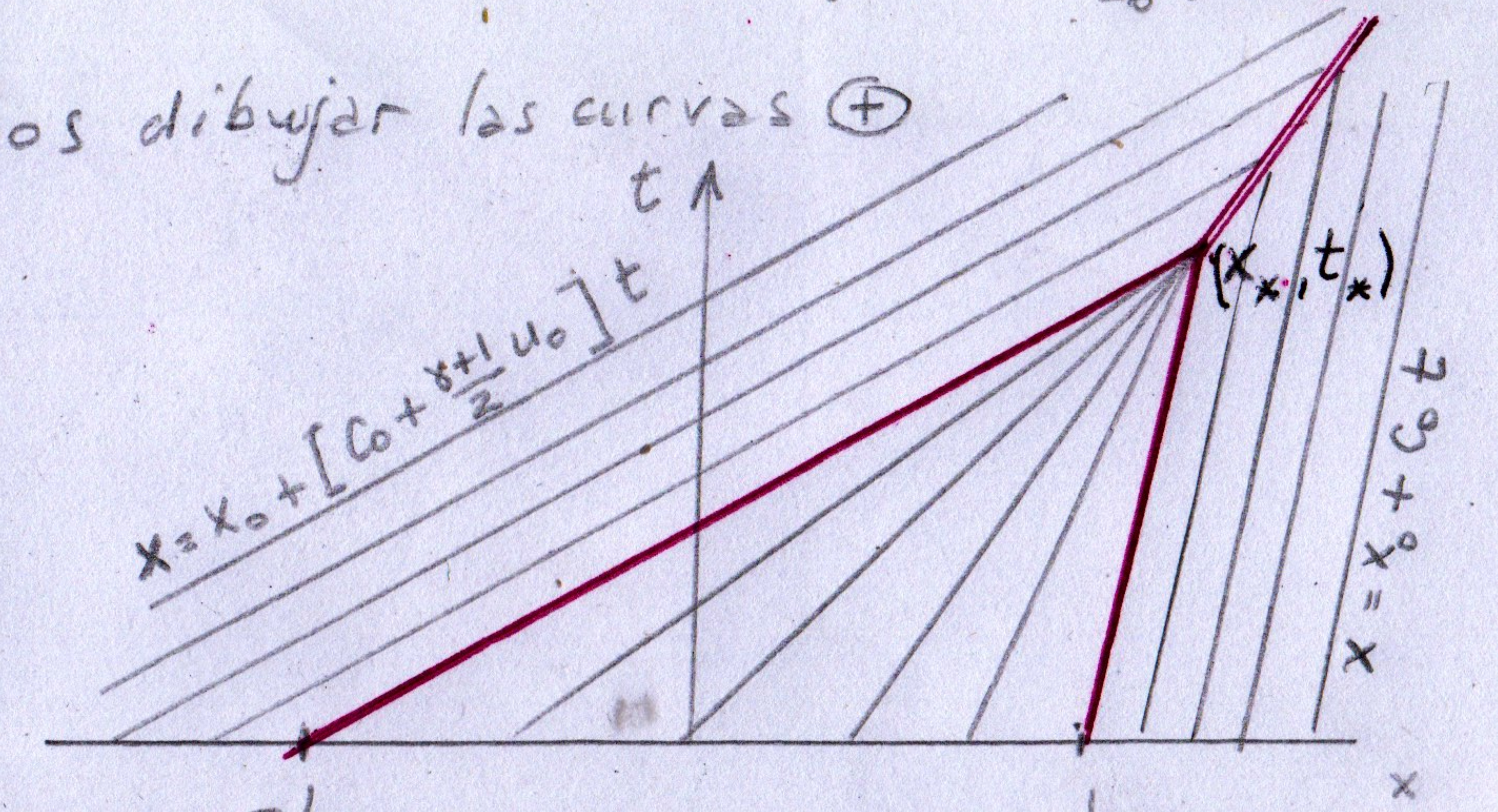
$$\underbrace{F^+_{(x,t)}}_{cte\,\oplus} = \frac{u(x,t)}{2} + \underbrace{\frac{c(x,t)}{\gamma-1}}_{cte\,\oplus} \longrightarrow u(x,t) = cte\,\oplus$$

Que forma tienen las curvas ⊕ ? rectas!

$$\frac{dx^+}{dt} = \underbrace{u}_{cte\,\oplus} + \underbrace{c}_{cte\,\oplus} \longrightarrow x^+ = x_0^+ + \left[u(x_0,0) + c(x_0,0)\right] t$$

Si aproximamos $tgh\left(\dfrac{x}{L_0}\right) \simeq \begin{cases} 1 & x > L_0 \\ x/L_0 & -L_0 < x < L_0 \\ -1 & -L_0 > x \end{cases}$

Podemos dibujar las curvas ⊕



Formación y propagación de ondas de choque

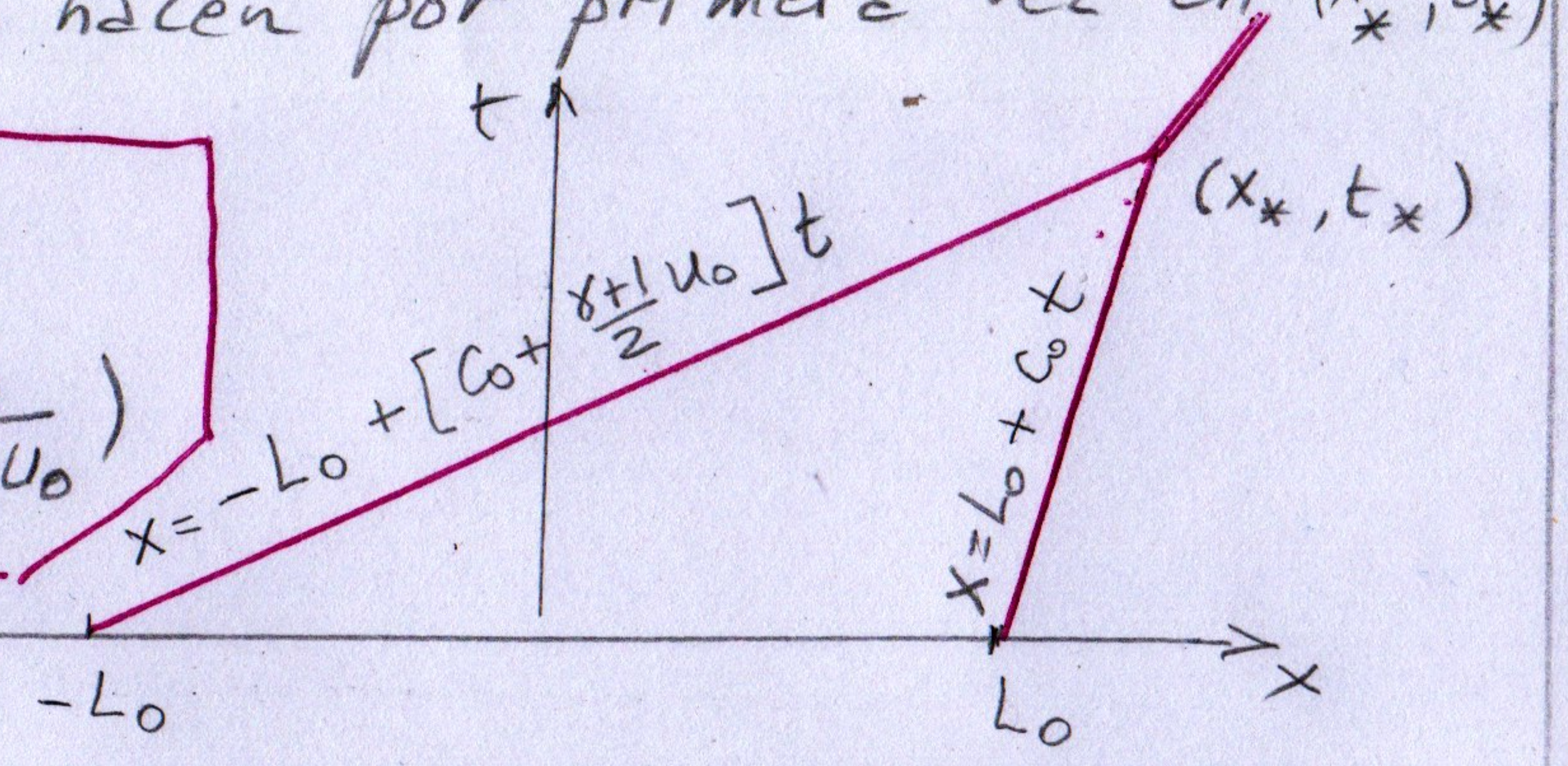
• Para $x < -L_0 \rightarrow tgh\left(\frac{x}{L_0}\right) \sim -1$ $\rightarrow u(x,0) \simeq U_0$; $\rightarrow c(x,0) \simeq c_0 + \frac{\gamma-1}{2} U_0$

• Para $x > L_0 \rightarrow tgh\left(\frac{x}{L_0}\right) \sim 1$ $\rightarrow u(x,0) \simeq 0$; $\rightarrow c(x,0) \simeq c_0$

• Para $-L_0 < x < L_0$ las pendientes de las rectas van variando de manera aprox. lineal $\left(tgh\left(\frac{x}{L_0}\right) \simeq \frac{x}{L_0} \right)$ entre $-L_0$ y L_0.

• Noten que las rectas características se cortan. Lo hacen por "primera vez" en (x_*, t_*)

$$\boxed{t_* = \frac{4 L_0}{(\gamma+1) U_0} \qquad x_* = L_0\left(1 + \frac{4 c_0}{(\gamma+1) U_0}\right)}$$

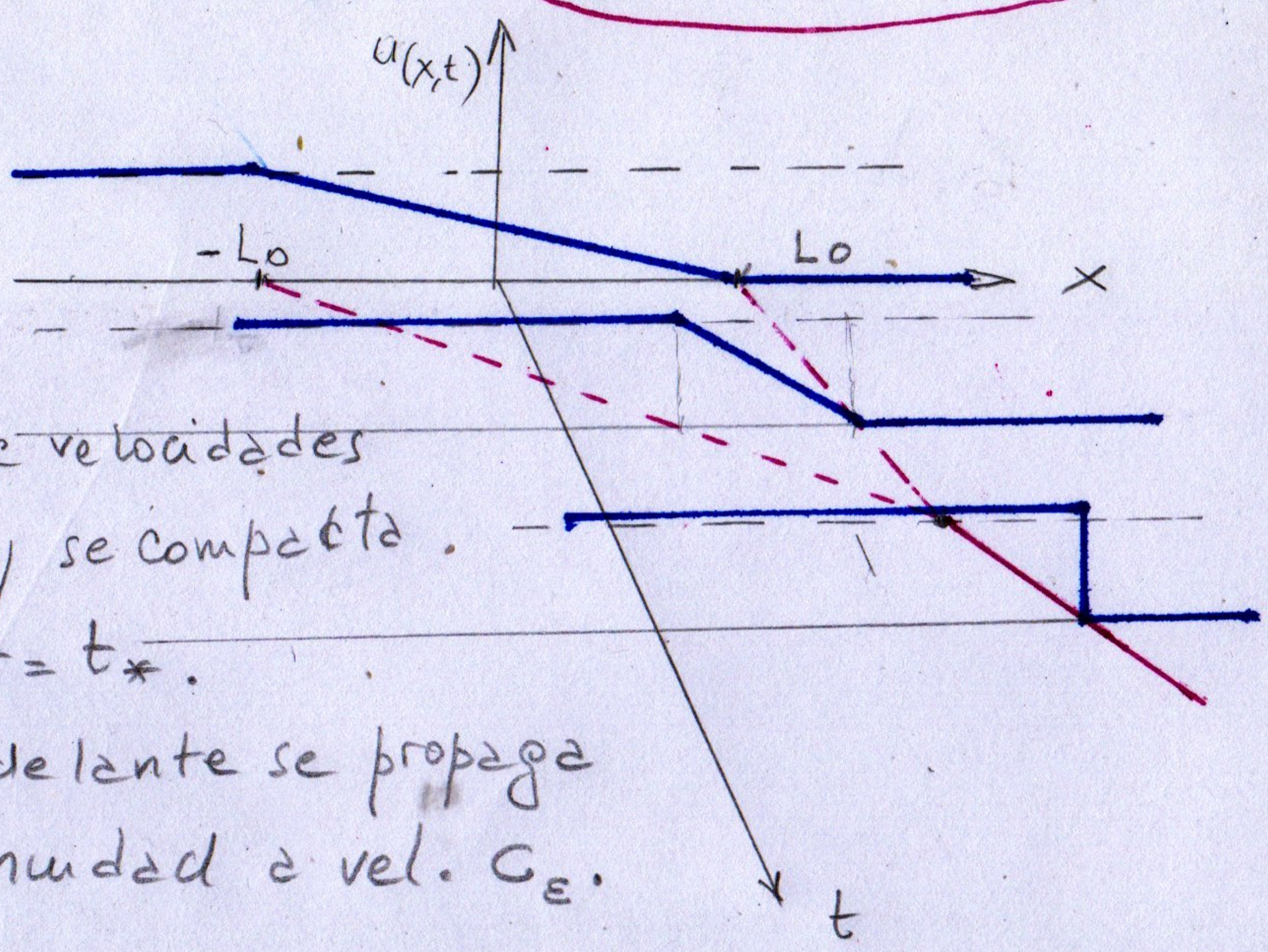


Las sucesivas rectas con $x_0^{\pm} = \pm(L_0 + \varepsilon)$ se cruzan en

$$t_\varepsilon = \frac{4(L_0+\varepsilon)}{(\gamma+1) U_0} \qquad x_\varepsilon = (L_0+\varepsilon)\left(1 + \frac{4 c_0}{(\gamma+1) U_0}\right)$$

De modo que la velocidad del choque $(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$ resulta simplemente:

$$c_\varepsilon = \frac{x_\varepsilon}{t_\varepsilon} \longrightarrow c_\varepsilon = c_0 + \frac{\gamma+1}{4} U_0$$



El perfil de velocidades se propaga y se compacta de $t=0$ a $t = t_*$.

De t_* en adelante se propaga una discontinuidad a vel. c_ε.