

# Repaso de Clase 14

- Ondas de choque >>> Superficies de discontinuidad que se propagan en el fluido
- Conservación de flujo de masa, impulso y energía
- Relaciones de Rankine-Hugoniot
- Choques con o sin flujo de masa

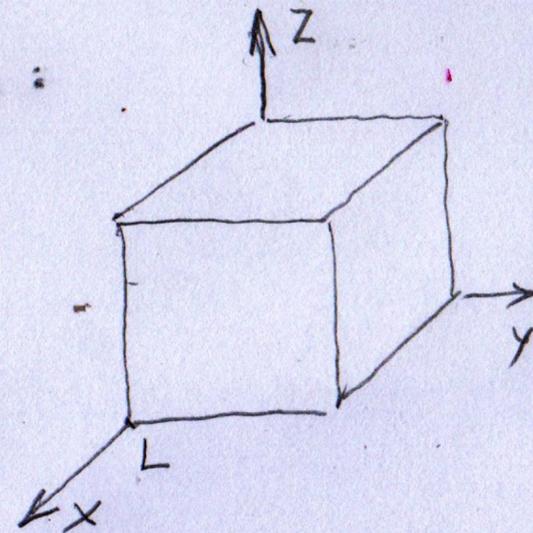
# Flujos turbulentos

- La dinámica de fluidos es descrita por ecuaciones en derivadas parciales. Es decir, son sistemas con infinitos grados de libertad.

- Los GL son descritos por las autofunciones del recinto. Por ejemplo los modos de Fourier en el caso de un cubo:

$$\underline{u}(\underline{r}, t) = \sum_{\underline{k}} \underline{u}_{\underline{k}}(t) e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}}$$

$$\underline{k} = \frac{2\pi}{L} (n_x, n_y, n_z)$$

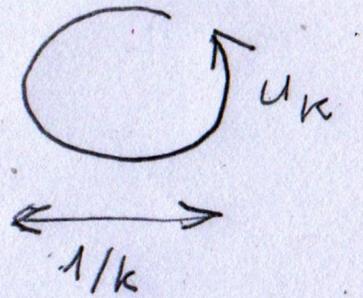


- En fenómenos lineales cada GL evoluciona independientemente de los demás.

- Los efectos no lineales acoplan GL.

- La turbulencia es fuertemente no lineal y  $Re \gg 1$ . Los GL están fuertemente acoplados.

- Un modo  $\underline{k}$  puede asociarse con vórtices de tamaño  $\lambda = \frac{1}{|\underline{k}|}$ , velocidad azimutal  $u_k$  y periodo  $\tau_k \sim \frac{1}{k u_k}$ .



- La turbulencia es la superposición de vórtices de todos los tamaños y con todas las orientaciones.

- La ecuación de Navier-Stokes para flujos incompresibles en el espacio de Fourier resulta:

$$\rho [\partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}] = -\rho \underline{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \underline{u}$$

⇓ transformo Fourier

$$\partial_t \underline{u}_{\underline{k}} = \underline{f}_{\underline{k}} + \underline{N}_{\underline{k}} - \nu k^2 \underline{u}_{\underline{k}}$$

NOTA: En el caso incompresible no necesito una ecuación para  $p$ , ya que:

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \rightarrow \nabla \cdot (NS) \rightarrow \rho \nabla \cdot [(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}] = -\nabla^2 p \quad \text{Ec. Poisson para } p$$

# Espectro de energía

Vimos que el balance de energía de un flujo incompresible resulta:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V d^3r \frac{\rho |\underline{u}|^2}{2}}_E = \underbrace{- \oint_{S_V} d\underline{s} \cdot (\dots)}_{=0} - \underbrace{2\mu \int_V d^3r \frac{|\nabla \times \underline{u}|^2}{2}}_{\text{Disipación viscosa}} + \underbrace{\int_V d^3r \rho \underline{u} \cdot \underline{f}}_{\text{Potencia de } \underline{f}}$$

Segun el teorema de Parseval:

$$E = \rho \int_V d^3r \frac{|\underline{u}|^2}{2} = \rho \int d^3k \frac{|\underline{u}_k|^2}{2}$$

Si podemos suponer que la distribución de energía es isotropa en el espacio de Fourier (distribución de vórtices en todas las direcciones:

$$E = \rho \int d^3k \frac{|\underline{u}_k|^2}{2} = \rho \int dk \underbrace{4\pi k^2 \frac{|\underline{u}_k|^2}{2}}_{E_k : \text{espectro}}$$

• En 1941 el matemático ruso Andrei Kolmogorov propuso lo siguiente para describir turbulencia incompresible:

- estacionariedad
  - homogeneidad
  - isotropía
- El número de vórtices es independiente del tiempo, de la posición y de la orientación

- supone que  $\underline{f}_k$  se concentra en escalas macro (bajo  $k$ )

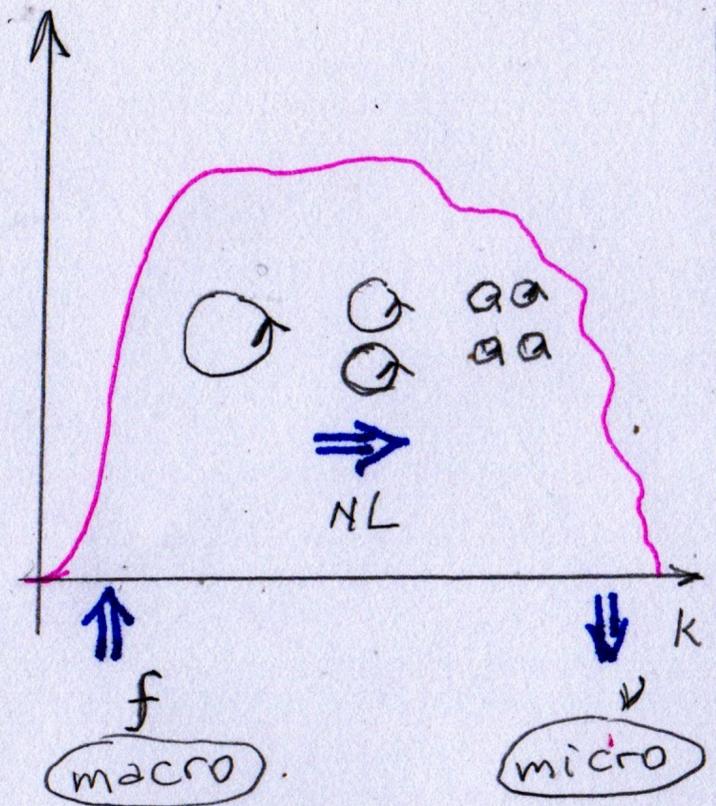
- los esfuerzos viscosos se concentran en la escala micro (alto  $k$ )  $\rightarrow \partial_t \underline{u}_k = \dots - \nu k^2 \underline{u}_k$

- Las NL no alteran la energía del sistema, sino que solo la redistribuyen en espacio  $k$ .

- Con estas supuestas, podemos construir una descripción para turbulencia homogénea, estacionaria e isotropa.

# Cascada de energía

- Podemos interpretar el espectro  $E_k \cdot dk$  como la energía en vórtices con tamaños entre  $k$  y  $k+dk$
- En las escalas macro inyectamos energía a través de  $\underline{f}$ .



- En escalas intermedias, la energía se transporta debido al fraccionamiento de vórtices en vórtices más chicos.
- En escalas micro, la energía de esos vórtices se disipa por fricción viscosa.
- En turbulencia fuerte, estimamos el tiempo de fraccionamiento  $\tau_k^{NL} \sim \tau_k \sim \frac{1}{kU_k}$

- Kolmogorov (1941) propone que en el límite  $Re \rightarrow \infty$  el transporte NL de energía es independiente de la viscosidad  $\nu$ .
- Podemos obtener la forma funcional del espectro?
- Veamos que es posible hacerlo con un simple análisis dimensional. Como  $\rho = cte$ , trabajemos con la energía por unidad de masa.
- Definimos la tasa de inyección de energía  $\epsilon = \frac{\text{energía}}{\text{masa} \times \text{tiempo}}$  que es la potencia entregada por  $\underline{f}$ .
- En estado estacionario,  $\epsilon = cte$ , y coincide con la tasa de disipación y con la de transferencia NL de  $k$  a  $k+dk$ ,  $\neq k$ .

# Espectro de Kolmogorov (1941)

- Procedamos entonces con nuestro análisis dimensional, proponiendo:

$$E_k = E_k(k, \varepsilon)$$

es decir, que el espectro depende de la tasa de inyección  $\varepsilon$  y por supuesto de  $k$ .

- Y siguiendo a Kolmogorov, no depende de  $\nu$ .

$$[E] = \frac{L^2}{T^2} \rightarrow [E_k] = \frac{L^3}{T^2} \quad \left. \begin{array}{l} n=2 \\ k=2 \end{array} \right\} \rightarrow n-k+1=1$$

$$\varepsilon = \frac{L^2}{T^3} \quad [k] = \frac{1}{L} \quad [u_k] = \frac{L}{T}$$

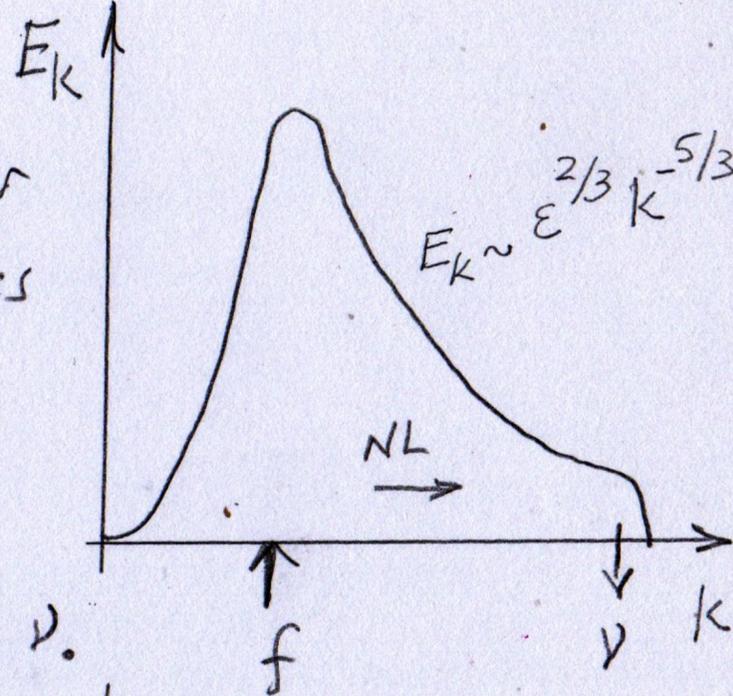
$$E_k \sim k^\alpha \varepsilon^\beta$$

$$\frac{L^3}{T^2} \sim \left(\frac{1}{L}\right)^\alpha \left(\frac{L^2}{T^3}\right)^\beta \rightarrow \begin{array}{l} \textcircled{L} \quad 3 = -\alpha + 2\beta \\ \textcircled{T} \quad 2 = 3\beta \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta = \frac{2}{3} \\ \alpha = -5/3 \end{array} \right\} \rightarrow E_k \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad \text{Espectro de Kolmogorov}$$

- Este espectro ha sido confirmado ampliamente por experimentos, flujos naturales y simulaciones.

- Se confirma el hecho anti-intuitivo de que la tasa de disipación  $\varepsilon$  es indep  $\nu$ . Al cambiar  $\nu$ , no cambia  $\varepsilon$  sino  $k_\nu$ .



- Para determinar la escala de disipación  $k_\nu$ :

$$k_\nu = k_\nu(\varepsilon, \nu) \quad k_\nu \sim \varepsilon^a \nu^\beta$$

$$\frac{1}{L} \sim \left(\frac{L^2}{T^3}\right)^a \left(\frac{L}{T}\right)^b$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{L} \quad -1 = 2a + 2b \\ \textcircled{T} \quad 0 = 3a + b \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} a = 1/4 \\ b = -3/4 \end{array} \rightarrow k_\nu \sim \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3}\right)^{1/4}$$

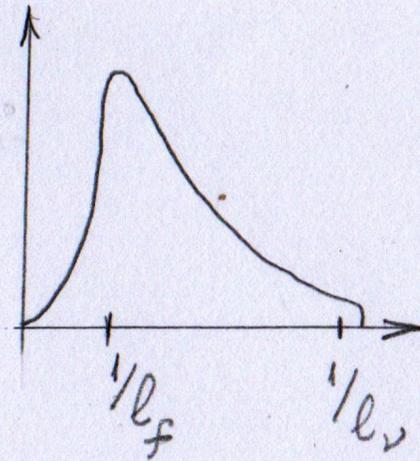
FIN DEL CURSO

# Turbulencia y número de Reynolds

Un comentario final. Los sistemas turbulentos siempre corresponden a  $Re \gg 1$

Para el sistema global, la long. característica es  $l_f$  y la vel.  $U_f$ .

$$\text{Entonces: } Re = \frac{U_f l_f}{\nu}$$



$$\text{Vimos que } k_\nu \sim \frac{1}{l_\nu} \sim \left(\frac{\epsilon}{\nu^3}\right)^{1/4}$$

$$\epsilon \sim \frac{U_f^2}{l_f / U_f} \sim \frac{U_f^3}{l_f} \rightarrow \frac{1}{l_\nu} \sim \left(\frac{U_f^3}{l_f \nu^3}\right)^{1/4}$$

$$\text{Es decir que: } \frac{1}{l_\nu^4} \sim \frac{U_f^3}{l_f \nu^3} \cdot \frac{l_f^3}{l_f^3} \sim \frac{Re^3}{l_f^4}$$

$\therefore \frac{l_f}{l_\nu} \sim Re^{3/4} \gg 1$  La separación entre las escalas de forzado y disipación es muy grande

