Práctica 0: Vectores y Tensores

Problema 1. Delta de Krönecker y densidad tensorial de Levi-Civita. La delta de Krönecker es un tensor isótropo de segundo orden cuyas componentes están dadas

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad ,$$

con $1 \leq i, j \leq 3$. La densidad tensorial de Levi-Civita es un pseudotensor de tercer orden con componentes

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si} & \{i,j,k\} & \text{son una permutación par de} & \{1,2,3\} \\ -1 & \text{si} & \{i,j,k\} & \text{son una permutación impar de} & \{1,2,3\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad .$$

(i) Visualice gráficamente la densidad tensorial ϵ_{ijk}. ¿Cuántos elementos tiene?
(ii) Compruebe la identidad:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \quad .$$

(iii) Verifique las siguientes identidades:
(a)$\epsilon_{ijk}\epsilon_{irs} = \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}$
(b)$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$
(c)$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$
(d)$\delta_{mn}\delta_{mn} = 3$
(iv) Si $\{\hat{e}_i, \ \ i = 1,2,3\}$ es una terna de versores ortogonales, verifique que:
(a)$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \hat{e}_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$
(b)$(\vec{\nabla} \times \vec{C}) \cdot \hat{e}_i = \epsilon_{ijk} \partial_j C_k$

Problema 2. Descomposición de un tensor de segundo orden Demuestre que todo tensor de segundo orden σij $(1 \leq i, j \leq n)$ se puede descomponer como

$$\sigma ij = \lambda \delta_{ij} + s_{ij} + a_{ij} \quad ,$$

donde λ es un escalar, s_{ij} es un tensor simétrico de traza nula, y a_{ij} es un tensor antisimétrico.

Problema 3. Tensores cartesianos isótropos Dadas las componentes de un tensor en un sistema de coordenadas, podemos calcular sus componentes en cualquier otro sistema. En general, las componentes en el sistema transformado son distintas de las originales. Cuando las componentes resultan las mismas en cualquier sistema de coordenadas se dice que el tensor es isótropo. Con esta definición, busque mostrar las siguientes afirmaciones:
(i) No existen vectores (ni pseudovectores) isótropos.
(ii) Los únicos tensores isótropos de segundo orden son los múltiplos del tensor de Kronecker.
(iii) En el espacio bidimensional, los únicos pseudotensores isótropos de segundo orden son los múltiplos del tensor de Levi-Civita.
(iv) En el espacio tridimensional, no hay ningún tensor isótropo de orden 3.

(v) En el espacio tridimensional, los únicos pseudotensores isótropos de orden 3 son los múltiplos del pseudotensor de Levi-Civita.

Problema 4. Identidades vectoriales empleando notación indicial Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ y $\vec{s}$ cuatro vectores, y ψ y ϕ dos funciones escalares. Utilizando notación indicial, verifique las siguientes identidades:

(i) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$

(ii) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{w}) - \vec{w}(\vec{u} \cdot \vec{v})$

(iii) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{w} \times \vec{s}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})(\vec{v} \cdot \vec{s}) - (\vec{u} \cdot \vec{s})(\vec{v} \cdot \vec{w})$

(iv) $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$, donde $\vec{r} = (x, y, z)$

(v) $\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$

(vi) $\vec{\nabla}|\vec{r}| = \frac{\vec{r}}{r}$, donde $r = |\vec{r}|$

(vii) $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

(viii) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0$

(ix) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0$

(x) $\nabla^2\psi = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\psi)$

(xi) $\nabla^2(\phi\psi) = \phi\nabla^2\psi + \psi\nabla^2\phi + 2\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi$

(xii) $\vec{\nabla}(\phi\psi) = \phi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\phi$

(xiii) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) - \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v})$

(xiv) $\vec{\nabla} \cdot (\phi\vec{u}) = \phi\vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla\phi$

(xv) $\vec{\nabla} \times (\phi\vec{u}) = \phi\vec{\nabla} \times \vec{u} + \vec{\nabla}\phi \times \vec{u}$

(xvi) $\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$

(xvii) $\vec{\nabla}(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})$

(xviii) $\nabla^2\vec{u} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u}$

(xix) $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})$

Problema 5. Descomposición de Helmholtz Supongamos que tenemos un campo vectorial $\vec{u}$ definido en una región acotada V del espacio tridimensional, cuya superficie frontera es S. Vamos a asumir que este campo es suficientemente suave (dos veces continuamente diferenciable) en dicha región. En estas condiciones,

(i) Muestre que u puede descomponerse en una componente irrotacional y otra solenoidal, i.e.: $\vec{u} = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Ayuda: puede serle útil recordar la definición de la función delta en el espacio tridimensional (función de

Green para el laplaciano),

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad ,$$

y emplear las identidades (xiv), (xv) y (xviii) del ejercicio anterior.

(ii) Si V es no acotado (es decir, si $V = \mathbb{R}^3$) piense qué condición adicional debe satisfacer $\vec{u}$ para garantizar la descomposición anterior.