Práctica 5: Inestabilidades Hidrodinámicas

Problema 1. $(*)$ Considere el flujo general de un fluido incompresible plano de viscosidad cinemática ν, en ausencia de fuerzas externas; tal que el campo de de velocidades resulta $\vec{u} \perp \hat{z} \quad \forall \ (x, y, t)$.
(i) Muestre que si se considera la componente $\hat{z}$ del rotor de la ecuación de Navier-Stokes, se llega a la siguiente ecuación para la evolución temporal de la vorticidad:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = [\psi, \omega] + \nu \, \nabla^2 \omega \quad ,$$

donde $\vec{\omega} = \omega \hat{z} = -\nabla^2 \psi \hat{z}$, y

$$[A, B] = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x} \quad ,$$

denota el corchete de Poisson clásico.
(ii) Estudie ahora el flujo plano de un fluido ideal e incompresible, de densidad uniforme ρ_0, en ausencia de fuerzas externas, dado por un campo de velocidades bidimensional (de equilibrio) dado por $\vec{u} = U(y)\hat{x}$.
a) Considere un campo de velocidades ligeramente perturbado mediante una perturbación lineal de la forma

$$\psi(x, y, t) = \psi_0(y) + \delta\psi(x, y, t) \quad .$$

Muestre que la evolución temporal de la perturbación introducida a la vorticidad ($\delta\omega$), puede escribirse, a primer orden, como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\omega) = [\delta\psi, \omega_0] + [\psi_0, \delta\omega] \quad .$$

Ayuda: Note que puede utilizar, como punto de partida para este inciso, el resultado que obtuvo en el inciso precedente para el caso general de un fluido viscoso.
b) Proponga ahora perturbaciones de la forma

$$\delta\psi(x, y, t) = \Phi(y) \exp\{i[kx - 2\pi f(k)t]\}$$

y verifique que el coeficiente de la perturbación, $\Phi(y)$, satisface

$$\Phi''(y) + \left[\frac{kU''(y)}{2\pi f(k) - kU(y)} - k^2\right] \Phi(y) = 0 \quad .$$

Aclaración para los problemas siguientes

En los Problemas siguientes, cada vez que el enunciado propone (de manera general) analizar la estabilidad del flujo, debe entenderse que se pide:

1. determinar para que valores de k resulta inestable el flujo de base considerado, y
2. para el caso en que efectivamente resulte inestable el flujo de base, determinar el valor de k que corresponde a la mayor tasa de crecimiento de la inestabilidad.

Problema 2. Considere un fluido ideal incompresible con densidad uniforme ρ_0 , y con un campo de velocidades bidimensional $\vec{u} = U(y)\hat{x}$ donde

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y > 0 \\ -1 & \text{si} \quad y < 0 \end{cases} .$$

Analice la estabilidad del flujo resolviendo la ecuación de Rayleigh en cada tramo y pidiendo continuidad de la presión y de la velocidad perpendicular a la interfaz.

Problema 3. Para un fluido ideal homogeneo analice la estabilidad de un perfil lineal en contacto con una pared en $y = 0$, dado por $\vec{u} = U(y)\hat{x}$ con

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y > L \\ 1 - y/L & \text{si} \quad 0 < y < L \end{cases} .$$

Recuerde que sobre el contorno sólido debe cumplirse $0 = \delta u_y = -\partial_x \delta\psi$. Muestre que esto implica $\Phi = 0$.

Problema 4. Usando la ecuación de Rayleigh, analice la estabilidad del flujo ideal bidimensional $\vec{v} = U(y)\hat{x}$, donde

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y > L \\ y/L & \text{si} \quad -L < y < L \\ -1 & \text{si} \quad y < -L \end{cases} .$$

Note que cuando $L \to 0$, el sistema se reduce al del Problema 2.

Problema 5. Considere el flujo del Problema 4, pero agregando un contorno sólido en $y = L + d$. Verifique que recupera los mismos resultados para $d \to \infty$.

Problema 6. (∗) Para un fluido ideal homogeneo analice la estabilidad de un chorro sumergido triangular, dado por $\vec{u} = U(y)\hat{x}$ con

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y > L \\ 1 - y/L & \text{si} \quad 0 < y < L \\ 1 + y/L & \text{si} \quad -L < y < 0 \\ 0 & \text{si} \quad y < -L \end{cases} .$$