

## Práctica 6: Ondas de Gravedad

**Problema 1. Ondas de superficie en aguas profundas** Considere un fluido ideal incompresible con superficie libre en equilibrio en  $z = 0$  como se indica en la figura. El campo de velocidades está dado por  $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$ , donde el potencial  $\phi$  satisface las ecuaciones

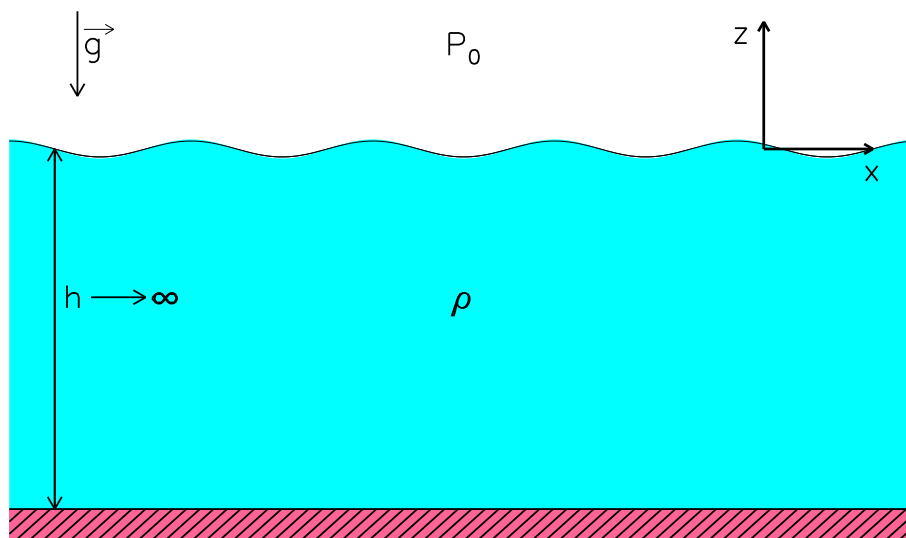
$$\nabla^2\phi = 0 \quad , \quad \left. \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \right) \right|_{z=0} = 0 \quad .$$

- (i) Obtenga la relación de dispersión  $\omega = \omega(k)$  para ondas de superficie que se propagan en la dirección  $x$ , asumiendo simetría de traslación en  $y$  y que el fluido tiene profundidad infinita.  
 (ii) Halle soluciones para el potencial de velocidades de la forma

$$\phi(x, z, t) = f(z) \cos(kx - \omega t) \quad ,$$

y halle el campo de velocidades  $\vec{v}$  para todo tiempo.

- (iii) Calcule la trayectoria de las partículas de fluido en la onda.  
 (iv) Calcule la velocidad de grupo y la de fase de las ondas.



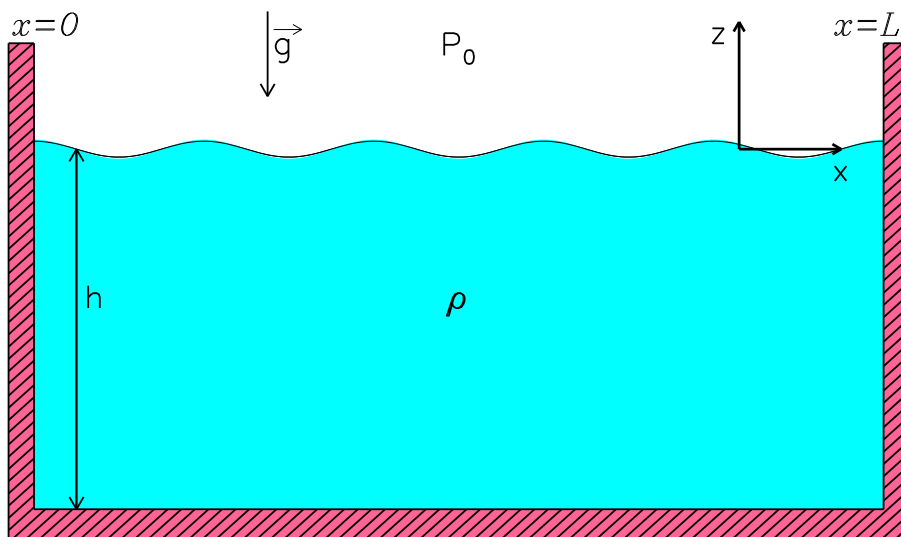
**Problema 2. Ondas de superficie en aguas poco profundas** Considere un estanque con profundidad finita  $h$ .

- (i) Obtenga la solución para  $\phi$  en este caso, tomando la condición de contorno en el fondo

$$v_z(z = h) = \left. \frac{\partial\phi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0 \quad .$$

- (ii) Obtenga la relación de dispersión, para ello:  
 (a) Tome el límite  $h \rightarrow \infty$  y recupere el caso anterior (estanque muy profundo).  
 (ii) Tome el límite para profundidad pequeña,  $h \ll \lambda$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la perturbación. Vea en qué casos es dispersivo o no el medio.

**Problema 3. Modos de oscilación** Considere un estanque con profundidad  $h$  y con paredes laterales separadas por una distancia  $L$  como se muestra en la figura. Halle la solución para el potencial de velocidad  $\phi$  en este caso.



Note que tiene que imponer condiciones de contorno adicionales en las paredes laterales,

$$v_x(x = 0) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} = v_x(x = L) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad .$$

¿Qué tipo de soluciones obtiene? Encuentre las posibles frecuencias de oscilación de las ondas que se generan en la superficie.

**Problema 4. Ondas interfaciales entre dos fluidos no miscibles** Se tienen dos fluidos ideales incompresibles en contacto. En el estado de equilibrio, la superficie de separación entre ambos es plana (los fluidos no se mezclan ni reaccionan) y corresponde al plano  $z = 0$ . El fluido superior tiene densidad  $\rho'$  y profundidad  $h'$ , y está en contacto con una atmósfera tenue a presión  $p_0$ . El fluido inferior tiene densidad  $\rho$  y profundidad  $h$  (que puede ser infinita).

(i) Verifique que las ecuaciones para los potenciales de velocidad son

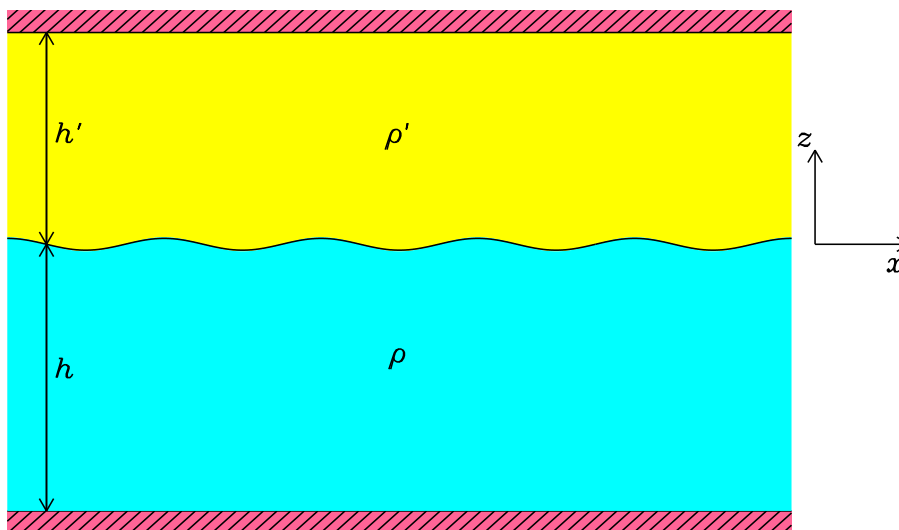
$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi' &= 0 \quad , \quad \nabla^2 \phi = 0 \quad , \\ \left( \frac{\partial \phi'}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} \right) \Big|_{z=h'} &= 0 \quad , \\ \left[ g(\rho - \rho') \frac{\partial \phi}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \rho' \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} \right] \Big|_{z=0} &= 0 \quad . \end{aligned}$$

(ii) Observe que además deben darse condiciones de contorno y de empalme por continuidad de los potenciales de velocidad para cada fluido. Escriba estas condiciones de contorno cuando alguno de los fluidos se encuentra limitado (superior o inferiormente) por un plano infinito paralelo a la superficie en reposo.

(iii) Obtenga la expresión de las funciones que representan la forma de la superficie de contacto entre los fluidos,  $\xi = \xi(x, t)$ , y de la superficie libre del fluido superior,  $\eta = \eta(x, t)$ .

**Problema 5. Ondas interfaciales entre dos fluidos limitados verticalmente**

(i) Determine la relación de dispersión de las ondas de gravedad que se propagan en la superficie de contacto entre dos líquidos ideales si el sistema está limitado exteriormente por dos planos horizontales infinitos como se muestra en la figura. La densidad y la profundidad del líquido inferior son  $\rho$  y  $h$  respectivamente, y las del superior  $\rho'$  y  $h'$  ( $\rho > \rho'$ ).



(ii) Considere el caso límite  $kh \gg 1$  y  $kh' \gg 1$  (ambos fluidos con profundidad infinita).

(iii) Considere el caso límite  $kh \ll 1$  y  $kh' \ll 1$  (ondas largas).

**Problema 6.** Para la configuración del ejercicio 5, resuelva el caso en que el fluido superior posee su superficie libre de moverse y el inferior tiene profundidad infinita. Discuta la posibilidad de existencia de modos que se propagan en la interfase cuando la perturbación en la superficie es imperceptible (aguas muertas).

**Problema 7.** Para la configuración del ejercicio 5, resuelva el caso en que el fluido inferior se encuentra limitado por el fondo a una distancia  $h$ , y el superior tiene su superficie libre.

**Problema 8. (\*)** Considere las ondas de gravedad interfaciales para la configuración del problema 5, donde ahora tendremos en cuenta los efectos de la tensión superficial en la interfase. En un tratamiento linealizado, puede adicionarse el aporte de la tensión superficial considerando que en interfase se produce una discontinuidad en la presión dada por  $(p - p')|_{z=\xi} = -\sigma \partial_{xx}^2 \xi$ , donde  $\sigma$  es la tensión superficial interfacial y  $z = \xi(x, t)$  corresponde a la superficie interfacial.

(i) Escriba las condiciones de empalme que deben cumplir los potenciales  $\phi(x, z, t)$  y  $\phi'(x, z, t)$  en  $z = \xi$ .

(ii) Halle la relación de dispersión para las ondas interfaciales. Según el resultado obtenido, estime un valor umbral de los modos para los cuales los efectos de la tensión superficial se tornan más importantes que los debidos a la gravedad.