Práctica 1: Cinemática e Hidrostática

Problema 1. Descripciones euleriana y lagrangiana Se tiene un campo de velocidades que escrito en variables eulerianas es:

$$v_x = v_y = o \quad , \quad v_z = f(z) \quad ,$$

para $t \geq 0$ y $z \geq 0$. Encuentre la descripción lagrangiana de este movimiento.

Problema 2. Considere la temperatura en un túnel dada por

$$T = T_0 - \alpha\, e^{-x/L} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \quad ,$$

donde T_0, α, L y τ son constantes positivas. Una partícula se mueve en el túnel con velocidad U constante.
(i) Halle la variación de la temperatura por unidad de tiempo que experimenta la partícula bajo una descripción euleriana. Grafique la temperatura para instantes próximos e interprete geométricamente las componentes de la derivada total.
(ii) Repita el punto (i) para una descripción lagrangiana.
¿Coinciden las dos descripciones realizadas?

Problema 3. Trayectorias, líneas de corriente y líneas de trazas Halle las trayectorias, las líneas de corriente y las trazas de una partícula ubicada en (x_0, y_0) a $t = 0$, para los siguientes campos de velocidades:
(i) Una corriente uniforme $\vec{u}(x, t) = U\hat{x}$.
(ii) Una fuente lineal de caudal constante $\vec{u}(r, \theta) = \frac{Q}{2\pi r}\hat{r}$.
(iii) Un torbellino con circulación constante $\vec{u}(r, \theta) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\hat{\theta}$.
(iv) Una corriente uniforme constante superpuesta a otra corriente uniforme ortogonal a la primera. La velocidad U' de la segunda corriente está modulada en forma armónica en el tiempo con período τ.
(v) $(*)$ Una fuente lineal de caudal constante superpuesta a una corriente uniforme cuya velocidad U aumenta linealmente con el tiempo.

Problema 4. Determine las líneas de corriente, las trayectorias y las líneas de traza correspondientes al campo de velocidades bidimensional

$$v_x(x, y, t) = \frac{\alpha x}{1 + \beta t} \quad , \quad v_y(x, y, t) = c \quad ,$$

donde α, β y c son constantes con las dimensiones apropiadas.

Problema 5. Deformación de una partícula de fluido Calcule las deformaciones longitudinales, de corte y volumétricas para los flujos del problema 3.

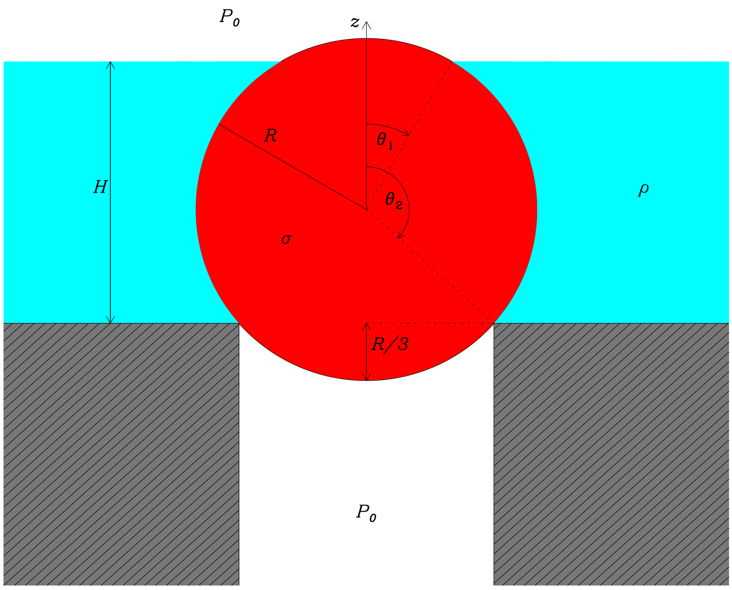
Problema 6. Vector 'Remolino' Muestre que para un fluido rotante con velocidad angular $\vec{\Omega}$, la vorticidad es $\vec{\omega} = 2\vec{\Omega}$.

Problema 7. Cálculo de la vorticidad Calcule la vorticidad de los siguientes campos de velocidades (considere coordenadas polares o cilíndricas con simetría de traslación en z):
(i) $v_\theta = v_0(1 - rt/\alpha)$
(ii) $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$
(iii) $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left[1 - e^{r^2/(4\nu t)}\right]$
(iv) $v_x = v_0 y/L$

Problema 8. Utilizando los teoremas de Gauss o de Stokes según corresponda, determine:
(i) El campo de velocidades con simetría esférica, cuya divergencia es constante.
(ii) El campo de velocidades con simetría cilíndrica, con sólo componente azimutal, que verifica que su rotor es un vector constante en la dirección $\hat{z}$.
(iii) Idem (ii) pero ahora tal que el flujo de su rotor, a través de cualquier superficie abierta que se apoya sobre el plano (x, y) y contiene al origen, es el mismo.

Problema 9. (∗) En el semiplano superior $(y > 0)$ se tiene un fluido ideal que se mueve acorde con el campo de velocidades $\vec{v} = \alpha x\hat{x} - \alpha y\hat{y}$.
(i) Calcule la trayectoria del elemento de fluido que inicialmente se encuentra en (x_0, y_0). Encuentre una expresión $y = y(x)$ para las líneas de corriente.
(ii) Si inicialmente la distribución de densidades del fluido es $\rho_0(x, y) = \lambda x^2 y$, calcule $\rho(x, y, t)$ *(ayuda: considere que la función densidad es separable en su dependencia temporal y espacial).*
(iii) ¿Cuál es, en el instante t_1, la densidad del elemento de fluido que inicialmente estaba en (x_0, y_0)? ¿A qué se debe el resultado obtenido?
(iv) Encuentre la distribución de presiones si sobre el fluido actúa una fuerza $\vec{F}^M = \alpha^2\vec{r}$ (fuerza por unidad de masa) y la presión en (x_0, y_0)? es p_0.

Problema 10. Tapón de pileta Una esfera sólida de densidad σ uniforme está apoyada sobre el desagüe de una pileta. Un líquido incompresible de densidad ρ, en equilibrio hidrostático con el ambiente, alcanza una altura H desde el fondo de la pileta. Analice bajo qué condiciones la esfera obtura el desagüe. Para ello:
(i) Calcule la fuerza de empuje debida al líquido como función de H (tenga en cuenta que el líquido puede tapar o no totalmente a la esfera).
(ii) Grafique el empuje como función de H e interprete cualitativamente.
(iii) Si $\sigma = \alpha\rho$, verifique que el valor mínimo de α para el cual se obtiene obturación para todo H es $\alpha = 8/27$.



Problema 11. Taquímetro hidrostático Un recipiente cilíndrico de eje vertical, de radio R y altura $2H$, inicialmente lleno hasta la mitad con un líquido incompresible, gira alrededor de su eje con velocidad angular uniforme Ω y bajo acción de la gravedad.
(i) ¿Cuál es la forma de la superficie libre del líquido?
(ii) ¿Para qué velocidad angular de rotación la superficie libre empieza a tocar el fondo?
(iii) ¿Para qué velocidad angular de rotación el agua empieza a desbordar, si $R = 5$ cm, $H = 7{,}5$ cm, $g = 9,8$ m/s^2? Calcule el valor numérico de la frecuencia hallada.
(iv) Si el recipiente tiene las dimensiones dadas en (iii), grafique la distribución de presiones sobre las paredes y sobre el fondo en los casos:
 (a) En reposo.
 (b) Cuando el recipiente rota con frecuencia $\nu = 90$ rpm.
(v) Piense un método que le permita medir velocidades angulares con el taquímetro.

Problema 12. Modelo de ciclón Considere el campo de velocidades de un fluido consistente en un núcleo cilíndrico muy alargado de base circular con radio a, que rota rígidamente sobre su eje principal con velocidad angular constante Ω. Fuera del núcleo, el campo de velocidades es también azimutal, pero con vorticidad nula. El campo de velocidades es continuo en $r = a$, donde r es la coordenada radial cilíndrica con el eje z coincidente con el eje del núcleo. Justifique por què no resulta necesario incluir a la gravedad. Para la resolución de este problema se puede prescindir de la gravedad. ¿Por qué?
(i) Determine el campo de velocidades para todo valor de r.
(ii) Determine la distribución de la presión y de la vorticidad para todo r, en función de la presión muy lejos del eje p_∞. Encuentre qué condición debe satisfacer Ω respecto del valor de la presión p_∞. Interprete qué significa que la presión en el infinito sea no nula.

Problema 13. (∗) Placa plana en el seno de un fluido Una placa plana delgada se encuentra sumergida completamente en un fluido estático dedensidad ρ, de manera que forma un ángulo α con la horizontal. Asuma que la placa tiene una superficie S y que su espesor es despreciable (es decir que, a todos los efectos prácticos, la placa es simplemente una superficie). La forma de dicha superficie es arbitraria. En estas condiciones,
(i) Calcule la fuerza total (y el punto de aplicación de la misma) que sufre una de las (dos) caras de la placa. Sugerencia: utilice un sistema de coordenadas con origen en S y con uno de sus ejes perpendicular a dicha superficie.
(ii) Elija un sistema de coordenadas centrado en el centro de masa de la placa. Al calcular el punto de aplicación de la fuerza, suponga que la placa tiene una densidad superficial uniforme σ y exprese el resultado en función de los momentos de inercia de la placa.

Problema 14. El comportamiento del agua a una dada temperatura se modela bien por la relación $p = K(\rho - \rho_0)/\rho_0$, donde ρ_0 es la densidad en ausencia de presión y K una constante.
(i) Si el agua se encuentra en reposo bajo la acción de la fuerza por unidad de masa y de volumen $\vec{F} = g\hat{z}$, determine la distribución de presión y de densidad del agua en función de la profundidad sabiendo que en $z = 0$ es $\rho = \rho_0$.
(ii) Repita suponiendo ahora al agua estrictamente incompresible ($K \to \infty$). Calcule el error que se comete al suponer al agua incompresible al determinar la densidad y la presión de la misma a una profundidad de 1000 m, ($K = 2 \times 10^9$ N/m^2, $\rho_0 = 1000$ kg/m^3). Desprecie la presión en la superficie.
(iii) Considere ahora un gas ideal con ecuación de estado $p = \rho RT/m$, con R la constante universal de los

gases y m la masa molecular media. Muestre que si el gas está en reposo en el campo de fuerzas $\vec{F} = -g\hat{z}$, la presión a una altura z está dada por

$$p = p_0 \exp\left\{-\frac{mg}{R}\int_0^z \frac{dz'}{T(z')}\right\} \quad .$$

(iv) Muestre que si T depende de x, y y z, no existe solución hidrostática posible y debe haber por lo tanto movimiento del gas.

Problema 15. Modelo simplificado de la atmósfera terrestre Halle y grafique la presión, la densidad y la temperatura de la atmósfera como función de la altura z sobre la superficie, si se sabe que sobre ella dichas magnitudes toman los valores p_0, ρ_0 y T_0 respectivamente. Suponga que la Tierra es plana, la gravedad es constante y que la atmósfera está en reposo. Considere al aire como un gas ideal y que la presión y la densidad se relacionan mediante la relación $p\rho^{-\gamma} = \text{cte.}$ (atmósfera adiabática).

Problema 16. (∗) Estrellas Autogravitantes Este problema tiene como objetivo modelar la estructura básica de una estrella. Para ello, pensemos que la estrella se compone de una masa de fluido auto-gravitante cuyos elementos se encuentran en equilibrio hidrostático, la presión evitando que la atracción gravitatoria los lleve al colapso. Asumiremos que la configuración posee simetría esférica.
(i) Muestre que, para el fluido que compone la estrella, la ecuación de Euler puede escribirse como

$$\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = -\frac{GM(r)}{r^2}\hat{r} \quad ,$$

siendo $M(r) = \int_0^r \rho 4\pi r^2\, dr$ y $\hat{r}$ el versor radial en coordenadas esféricas. *Ayuda:* puede resultarle útil recordar que un cascarón esférico de densidad de masa uniforme no ejerce fuerza gravitatoria sobre un punto interno (este resultado, de demostración sencilla, es un teorema debido a Newton).
(ii) Asuma una ecuación de estado politrópica para el gas que compone la estrella, de forma tal que $p = K\rho^{(n+1)/n}$, siendo n el índice politrópico y K una constante. Obtenga una ecuación diferencial para el campo de densidad de la estrella (pero no la resuelva aún).
(iii) A fin de simplificar la resolución, proponga la siguiente adimensionalización de las variables:

$$r = a\xi \quad , \quad \rho = \rho_c\theta^n \quad ,$$

introduciendo la coordenada radial adimensional ξ y la función adimensional $\theta(\xi)$ que representa la densidad de masa normalizada por su valor en el centro de la estrella, ρ_c. En término de estas nuevas variables, derive una ecuación diferencial para $\theta(\xi)$. Simplifique la expresión que obtuvo elegiendo $a^2 = K(n+1)/(4\pi G\rho_c^{1-1/n})$.
(iv) Mediante argumentos físicos, determine cuáles son las (dos) condiciones de contorno sobre $\theta(\xi)$.
(v) Asumiendo que dispone de una solución $\theta(\xi)$ a la ecuación, responda qué condición física emplearía para determinar el radio R de la estrella. Encuentre una expresión para la masa total de la estrella, M, y otra para el radio R de la misma.