

# 1. Problema 1

## 1.1. Inciso a

Cuando pensamos en una solución hidrostática, lo primero que surge es tomar la ecuación de Euler en el caso  $\vec{u} = 0$ . En este caso, tenemos

$$\nabla P = \vec{f}^{(V)} = -\rho g \hat{z} \implies \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \implies P(z) = A - \rho g z$$

Cómo vemos, esta solución tiene una constante libre, que debemos determinar con las condiciones de contorno. El plural es correcto, pues tenemos dos interfaces con la atmósfera pero una única constante, lo cual puede ser problemático. Escribamos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} P(z_0) = P_0 &\implies A - \rho g z_0 = P_0 \\ P(z_1) = P_1 &\implies A - \rho g z_1 = P_1 \end{aligned}$$

No es difícil ver que restando ambas ecuaciones nos sacamos de encima la constante  $A$  y obtenemos una ecuación para  $H = z_1 - z_0$

$$\rho g (z_1 - z_0) = P_0 - P_1 \implies H = \frac{P_0 - P_1}{\rho g}$$

Sin embargo, por construcción debe ser  $H > 0$  (pues vemos del dibujo que  $z_1 > z_0$ ), lo que implica  $P_0 > P_1$ . Esto es razonable, para que haya la más mínima posibilidad de sostener al fluido, la presión por debajo debe ser mayor.

## 1.2. Inciso b

Hasta ahora solo obtuvimos  $H = z_1 - z_0$ , pero nos faltaría una ecuación más para terminar de determinar  $z_0$  y  $z_1$ . Para esto, usamos la incompresibilidad del fluido, que sabemos tiene un volumen  $V$ . Dados  $z_0$  y  $z_1$  es sencillo calcular el volumen de fluido que tenemos, dado que podemos descomponerlo en dos prismas. El primero ( $0 < z < z_1$ ) tiene base  $A_1$  y altura  $z_1$  mientras que el segundo ( $z_0 < z < 0$ ) tiene base  $A_0$  y altura  $-z_0$ . Su volumen es entonces

$$V = A_1 z_1 + A_0 (-z_0) = A_1 (H + z_0) - A_0 z_0 = A_1 H + (A_1 - A_0) z_0$$

De aquí podemos trivialmente despejar el valor de  $z_0$  y, luego, el valor de  $z_1$

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{V - A_1 H}{A_1 - A_0} \\ z_1 = H + z_0 &= \frac{V - A_0 H}{A_1 - A_0} \end{aligned}$$

Respecto a las condiciones que surgen, si volvemos a usar que  $z_0 < 0$  y  $z_1 > 0$ , podemos obtener inecuaciones para los denominadores (dado que  $A_1 > A_0$ ).

$$\begin{aligned} V - A_1 H &< 0 & V - A_0 H &> 0 \\ \frac{V}{A_1} &< H & H &> \frac{V}{A_0} \end{aligned}$$

Encadenando las inecuaciones y expresando  $H$  en términos de datos, llegamos finalmente a

$$\frac{V}{A_1} \rho g < P_0 - P_1 < \frac{V}{A_0} \rho g$$

Esta desigualdad es interesante pues no solo nos especifica que tan alto debe ser  $P_0$  para poder “sostener” al fluido sino que además pone un tope. Superar este tope implicaría que el gas por debajo hace suficiente fuerza cómo para superar la presión del gas superior y el peso del fluido. En ambos casos, el fluido simplemente aceleraría indefinidamente al no poder compensar sus fuerzas.

## 2. Problema 2

### 2.1. Inciso a

Asumimos la sección  $A(z)$  cómo conocida y usamos la conservación del caudal para despejar  $u(z)$ . El caudal que fluye a través de la sección  $A(z)$  a altura  $z$  debe ser el mismo que entró

$$Q = u(z)A(z) \implies u(z) = \frac{Q}{A(z)} \equiv u_0 \frac{A_0}{A(z)}$$

donde definimos  $u_0 = Q/A_0$  para ayudar a la interpretación.

Teniendo  $u(z)$  a mano, podemos obtener  $P(z)$  utilizando Bernoulli. Para esto, tomamos una línea de corriente que comience en  $z = 0$  y finalice en algún  $z$  arbitrario, como se ve en la línea naranja de la Figura 1. Sobre esta línea tenemos

$$\frac{u_0^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} + \varphi(0) = \frac{u(z)^2}{2} + \frac{P(z)}{\rho} + \varphi(z)$$

Usando que el potencial gravitatorio es  $\varphi(z) = -gz$  y nuestra expresión para  $u(z)$  podemos despejar la presión

$$P(z) = P_0 + \rho \frac{u_0^2}{2} \left( 1 - \left( \frac{A_0}{A(z)} \right)^2 \right) + \rho gz$$

### 2.2. Inciso b

Queremos ahora que sea  $P(z) = P_0 + \alpha \rho gz$ , por lo que lo aplicamos en la ecuación anterior y despejamos  $A(z)$

$$\begin{aligned} P_0 + \alpha \rho gz &= P_0 + \frac{1}{2} \rho u_0^2 \left( 1 - \left( \frac{A_0}{A(z)} \right)^2 \right) + \rho gz \\ 0 &= \frac{1}{2} \rho u_0^2 \left( 1 - \left( \frac{A_0}{A(z)} \right)^2 \right) + (1 - \alpha) \rho gz \\ \frac{1}{2} \rho u_0^2 \left( \left( \frac{A_0}{A(z)} \right)^2 - 1 \right) &= (1 - \alpha) \rho gz \\ \left( \frac{A_0}{A(z)} \right)^2 &= 1 + 2(1 - \alpha) \frac{gz}{u_0^2} \\ A^*(z) &= \frac{A_0}{\sqrt{1 + 2(1 - \alpha)gz/u_0^2}} \end{aligned}$$

Para esta sección tenemos

$$u(z) = u_0 \sqrt{1 + 2(1 - \alpha) \frac{gz}{u_0^2}}$$

El caso límite más sencillo es  $\alpha = 0$ , donde tenemos presión uniforme  $P(z) = P_0$  a lo largo del tubo. La sección es entonces  $A(z) = A_0/\sqrt{1 + 2gz/u_0^2}$  y el tubo se constriñe en la dirección  $z$ , cómo muestra la figura del ejercicio. Además, tenemos  $u(z) = \sqrt{2gz}$ , lo cual coincide con la velocidad de una partícula en caída libre.

El otro caso es  $\alpha = 1$ , donde la presión es hidrostática y la sección es uniforme  $A(z) = A_0$ , por lo que la velocidad es  $u(z) = u_0$ . Este caso es bastante más interesante, porque tenemos una presión hidrostática aún cuando la velocidad del fluido es no nula. Sin embargo, al ser la velocidad uniforme podemos hacer una transformación de Galileo que nos lleve al sistema de referencia donde  $u(z) = 0$ . Aquí vemos más claro el resultado que obtuvimos.

### 2.3. Inciso c

Para calcular esta fuerza, usaremos la conservación del momento en su versión integral. Para el término gravitatorio, sin embargo, usaremos la forma con la integral en volumen dada la pista del ejercicio

$$\oiint_S P \hat{n} dS + \oiint_S \rho \bar{u} \bar{u} \cdot \hat{n} dS - \iiint_V \bar{f}^{(V)} dV = 0$$

Sabemos que  $\bar{f}^{(V)} = \rho g \hat{z}$  y, por lo tanto, la integral se reduce a calcular el volumen de la región con fluido

$$\iiint_V \bar{f}^{(V)} dV = \rho g \hat{z} V$$

donde podemos usar Cavalieri

$$V = \int_0^h A^*(z) dz = A_0 \int_0^h \left( 1 + (1 - \alpha) \frac{2gz}{u_0^2} \right)^{-1/2} dz = A_0 \int_1^{1+2(1-\alpha)gh/u_0^2} x^{-1/2} \frac{u_0^2}{2(1-\alpha)g} dx$$

donde hicimos la sustitución  $x = 1 + 2(1 - \alpha)gz/u_0^2$ . Integrando obtenemos finalmente

$$V = A_0 \frac{u_0^2}{(1 - \alpha)g} \left[ \sqrt{1 + (1 - \alpha) \frac{2gz}{u_0^2}} - 1 \right]$$

La fuerza externa resulta entonces

$$\iiint_V \bar{f}^{(V)} dV = \rho A_0 \frac{u_0^2}{1 - \alpha} \left[ \sqrt{1 + (1 - \alpha) \frac{2gz}{u_0^2}} - 1 \right] \hat{z}$$

Pasamos ahora a las integrales en superficie, donde tomaremos  $S = S_e \cup S_{lat} \cup S_s$  con las superficies de entrada ( $z = 0$ ), lateral y de salida ( $z = h$ ), respectivamente. Estas superficies están esquematizadas en la Figura 1.

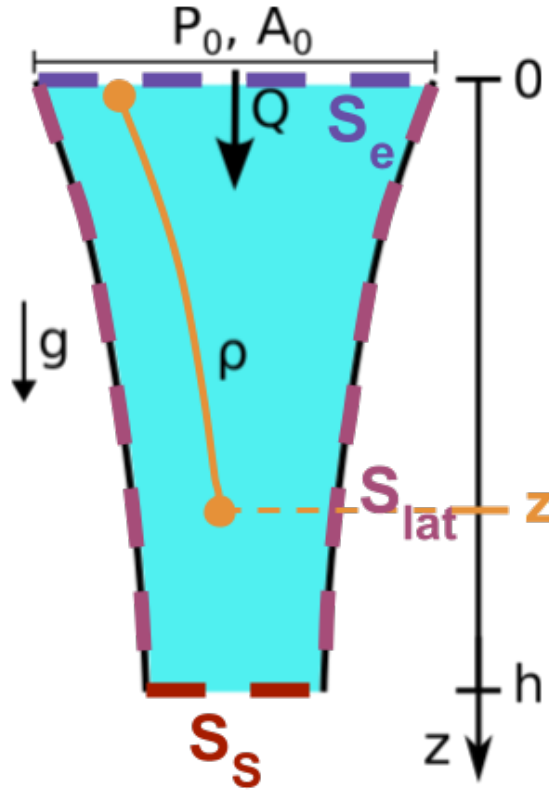


Figura 1: Esquema del ejercicio 2 con la línea de corriente utilizada en el inciso a) dibujada en naranja y las superficies que encierran el volumen de control para aplicar teorema de conservación de impulso ( $S_e$ ,  $S_{lat}$  y  $S_s$ ).

La integral de presión sobre  $S_{lat}$  será justamente la fuerza que el fluido le está ejerciendo al tubo, que llamaremos  $\bar{F}$  y despejaremos de la ley. La integral de la velocidad es nula dado que la velocidad es tangencial al tubo.

En la tapa superior, tenemos  $\hat{n} = -\hat{z}$ ,  $P = P_0$ ,  $\bar{u} = u_0\hat{z}$  y sección  $A_0$ . En la inferior, tenemos  $\hat{n} = \hat{z}$ ,  $P = P(h)$ ,  $\bar{u} = u(h)\hat{z}$  y sección  $A(h)$ . Las integrales de superficie resultan entonces

$$\iint_{S_e} P \hat{n} dS + \iint_{S_s} \rho \bar{u} \bar{u} \cdot \hat{n} dS = \bar{F} + [P(h)A(h) - P_0A_0]\hat{z} + \rho [u(h)^2A(h) - u_0^2A_0]\hat{z}$$

Podemos usar  $u(h)A(h) = Q = u_0A_0$  y  $P(h) = P_0 + \alpha\rho gh$  para reescribir esto

$$\iint_{S_e} P \hat{n} dS + \iint_{S_s} \rho \bar{u} \bar{u} \cdot \hat{n} dS = \bar{F} + [\alpha\rho ghA(h) + P_0(A(h) - A_0)]\hat{z} + \rho u_0^2A_0 \left[ \frac{u(h)}{u_0} - 1 \right] \hat{z}$$

Finalmente, podemos usar la expresión que tenemos para  $u(h)$  para escribir esta ecuación en forma análoga al término de fuerza

$$\iint_{S_e} P \hat{n} dS + \iint_{S_s} \rho \bar{u} \bar{u} \cdot \hat{n} dS = \bar{F} + [\alpha\rho ghA(h) + P_0(A(h) - A_0)]\hat{z} + \rho u_0^2A_0 \left[ \sqrt{1 + 2(1 - \alpha)\frac{gh}{u_0^2}} - 1 \right] \hat{z}$$

De hecho, el último término es exactamente  $(1 - \alpha)$  veces el término de fuerza. Con esto en mente, introducimos todo en la conservación del momento y despejamos la fuerza

$$\bar{F} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \rho u_0^2 A_0 \left[ \sqrt{1 + 2(1 - \alpha)\frac{gh}{u_0^2}} - 1 \right] \hat{z} - [\alpha\rho ghA(h) + P_0(A(h) - A_0)]\hat{z}$$

Nuevamente, esta expresión es algo opaca a la interpretación. Sin embargo, podemos ver que en el caso  $\alpha = 0$  el primer término se anula y el segundo se reduce a  $-P_0[A(h) - A_0]\hat{z}$ . Vemos que la fuerza no es más que la diferencia entre las fuerzas ejercidas sobre cada una de las tapas:

$$\bar{F} = -P_0 A_0 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + 2gh/u_0^2}} - 1 \right] \hat{z}$$

que apunta en dirección  $\hat{z}$ , dado que el término entre paréntesis es siempre negativo. En este caso, el tubo sufre una reacción del fluido al intentar curvar su trayectoria ( $A(z)$  no es constante).

El caso  $\alpha = 1$  también es interesante, pero allí surge una indeterminación tipo 0/0 en el primer término, que resolveremos al final. En el segundo término tenemos  $A(h) = A_0$  por lo que queda solamente  $-\rho gh A_0 \hat{z} = -\rho g V \hat{z} = -Mg \hat{z}$  con  $M = \rho V$  es la masa de fluido dentro del tubo. Este término corresponde al peso del fluido contenido por el tubo. Intuitivamente, al ser la sección uniforme, esperaríamos que la fuerza se anule, pues el fluido simplemente cae sin interactuar con el tubo. Verifiquemos esto resolviendo la indeterminación

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\alpha}{1 - \alpha} \rho u_0^2 A_0 \left[ \sqrt{1 + 2(1 - \alpha) \frac{gh}{u_0^2}} - 1 \right] = \rho u_0^2 A_0 \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\alpha \left[ \sqrt{1 + 2(1 - \alpha) \frac{gh}{u_0^2}} - 1 \right]}{1 - \alpha}$$

Usando la regla de L'Hopital podemos calcular este límite derivando numerador y denominador respecto a  $\alpha$

$$\rho u_0^2 A_0 \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\left[ \sqrt{1 + 2(1 - \alpha) \frac{gh}{u_0^2}} - 1 \right] + \alpha \frac{-gh/u_0^2}{\sqrt{1 + 2(1 - \alpha) \frac{gh}{u_0^2}}}}{(-1)} = \rho u_0^2 A_0 \frac{gh}{u_0^2} = \rho A_0 h g = Mg$$

Efectivamente, vemos que lo que obtenemos se cancela con el término que ya teníamos, por lo que la fuerza es efectivamente nula.

### 3. Problema 3

#### 3.1. Inciso a

Nos piden la mínima cantidad de imágenes para tener un problema no trivial (fuerza nula y cilindro 2 como línea de corriente). Al tener dos contornos, sabemos que en principio la cantidad de imágenes necesarias para asegurar que ambos sean líneas de corriente (LC) es infinita, pues cualquier imagen que pongamos en uno invalidará la condición sobre el otro. Al pedirnos que el cilindro 2 sea LC, básicamente nos están pidiendo que la última imagen (o aplicación del Teorema del Círculo) que agreguemos sea sobre el cilindro 2. Con esto en mente, definiendo el potencial base  $W_0(z) = U_\infty z$ , lo más sencillo que podemos proponer es aplicar el TC sobre esto

$$W_1(z) = W_0(z) + \bar{W}_0\left(\frac{a^2}{z}\right) = U_\infty\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$$

Sin embargo, en este caso ignoramos el cilindro 1 y solo tenemos al cilindro 2 enfrentado a un flujo que viene del infinito. Sabemos de la guía y de lo hecho en clase que esta configuración tiene fuerza nula (*Paradoja de Blasius*), pero también podríamos verlo notando que  $(W')^2$  solo tiene un polo en  $z = 0$  y su expansión de Laurent carece de término  $z^{-1}$ . Necesitamos entonces una aproximación de mayor orden.

La primera opción sería tomar este potencial  $W_1$  y aplicar teorema del círculo sobre el cilindro 1. Sin embargo, la condición de LC sobre el cilindro 2 nos obligaría a volver a utilizar el teorema del círculo.

$$W_2(z) = W_1 + \bar{W}_1\left(\frac{a^2}{z+d}\right) \quad W_3(z) = W_2 + \bar{W}_2\left(\frac{a^2}{z}\right)$$

Es importante notar que cómo el cilindro 1 está centrado en  $z = -d$ , debemos hacer el desplazamiento  $z \rightarrow z - (-d) = z + d$  al aplicar el teorema.

Nos es difícil prever que  $W_3$  tendrá muchas imágenes, ¿no habrá otra forma más sencilla? El problema es que pasamos de una aplicación del TC inmediatamente a 3 aplicaciones de TC, lo cual nos lleva a preguntarnos si podríamos hacerlo con dos. Esto es posible comenzando la aplicación de los TC en sentido inverso. Primero, aplicamos el TC sobre el cilindro 1 para obtener

$$W_I(z) = W_0(z) + \bar{W}_0\left(\frac{a^2}{z}\right) = U_\infty\left[z + \frac{a^2}{z+d}\right]$$

que sabemos no cumple la condición de LC sobre 2. Esto es intuitivo, pues concuerda con lo visto en clase: reemplazamos el cilindro por un simple dipolo en el centro. Sobre este  $W_I$  podemos aplicar el TC sobre el cilindro 2 para obtener el potencial final

$$W(z) = W_I(z) + \bar{W}_I\left(\frac{a^2}{z}\right) = U_\infty\left[z + \frac{a^2}{z+d} + \frac{a^2}{z} + \frac{a^2}{a^2/z+d}\right]$$

Reacomodamos un poco el último término para que quede más clara la ubicación de la singularidad

$$W(z) = U_\infty\left[z + \frac{a^2}{z+d} + \frac{a^2}{z} + \frac{a^2}{d} \frac{z}{z+a^2/d}\right] = U_\infty\left[z + \frac{a^2}{z+d} + \frac{a^2}{z} + \frac{a^2}{d} - \left(\frac{a^2}{d}\right)^2 \frac{1}{z+a^2/d}\right]$$

donde en la segunda igualdad sumamos y restamos  $a^2/d$  al numerador del último término para expresarlo cómo suma de fracciones simples. Podemos notar que habrá fuerza nula dado que hay al menos dos polos en  $W'$ , lo cual nos dice que será posible tener términos de la forma interna×externa no triviales. Dejamos este cálculo para el último inciso.

### 3.2. Inciso b

Aquí comenzamos por esquematizar las líneas de corriente para el sistema. Sabemos que el sistema tiene simetría de reflexión respecto al eje  $y = 0$ , por lo que todo lo que solo nos debemos concentrar en un semiplano. Además, el sistema tiene antisimetría de reflexión respecto al eje  $x = -d/2$ ; al reflejar la componente  $x$ , el flujo en el infinito se invierte y los cilindros se intercambian. Por lo tanto, si sabemos la forma del flujo en la mitad superior de uno de los cilindros, lo conocemos para todo el espacio. Sobre el eje  $y = 0$ , la simetría nos impone que  $u_y = 0$ , por lo que el eje debe ser una línea de corriente solo interrumpida por los cilindros. Por lo tanto, tenemos una primer LC que surge del infinito y choca con el primer cilindro. Esta línea se bifurca alrededor del cilindro 1 y vuelve a converger del otro lado, para repetir lo mismo sobre el otro cilindro (línea azul en la Figura 1). Dada esta bifurcación, sabemos que en los extremos de cada cilindro debe ser  $u = 0$  (puntos de estancamiento). En nuestra aproximación, sin embargo, esto no se cumplirá sobre el cilindro 1, pero esperamos se mantenga sobre el cilindro 2.

A izquierda del cilindro 1 esperamos que el flujo comience horizontal y luego se vaya curvando para envolver al cilindro 1. En principio, dibujamos las mismas LC que para un único cilindro en la región  $x < -d$  (mitad izquierda del cilindro 1), pero del otro lado no serán iguales al existir el cilindro 2. Intuitivamente, esperamos que la presencia de ambos cilindros “estorbe” al flujo uniforme, deflectando las líneas de corriente y alejandolos del centro en la región entre cilindros (líneas rojas en Figura 1). Por último, suficientemente por arriba y por debajo de los cilindros, el flujo no se verá afectado (líneas verdes en Figura 2).

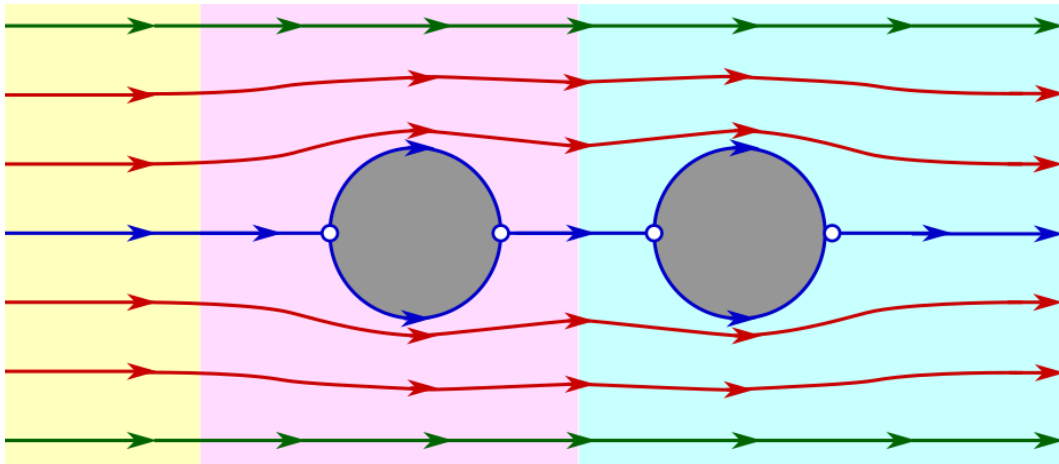


Figura 2: Esquema de las líneas de corriente. La zona amarilla corresponde a rectas horizontales, donde los cilindros no afectan al flujo uniforme. La zona rosada es el entorno del primer cilindro, donde las líneas de corriente se deflecan. La zona verde se obtiene reflejando lo obtenido en las 2 previas.

Cómo dijimos, esperamos al menos dos puntos de estancamiento en los extremos del cilindro 1, osea  $z = \pm a$ . La velocidad es

$$u^*(z) = U_\infty \left[ 1 + \left( \frac{a^2}{d} \right)^2 \frac{1}{(z + a^2/d)^2} - a^2 \left( \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z + d)^2} \right) \right]$$

Sabiendo que eventualmente vamos a evaluar sobre el cilindro  $z = ae^{i\theta}$ , definimos  $\eta = z/a$  y reescribimos la velocidad en términos de esta nueva variable, tomando denominador común

$$\begin{aligned}
u^* &= U_\infty \left[ 1 + \left(\frac{a}{d}\right)^2 \frac{1}{(\eta + a/d)^2} - \frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{(\eta + d/a)^2} \right] \\
u^* &= U_\infty \frac{\eta^2(\eta + a/d)^2(\eta + d/a)^2 + (a/d)^2(\eta + d/a)^2\eta^2 - (\eta + a/d)^2(\eta + d/a)^2 - (\eta + a/d)^2\eta^2}{\eta^2(\eta + d/a)^2(\eta + a/d)^2} \\
u^* &= U_\infty \frac{\eta^2(\eta + a/d)^2(\eta + d/a)^2 + (\eta a/d + 1)^2\eta^2 - (\eta + a/d)^2(\eta + d/a)^2 - (\eta + a/d)^2\eta^2}{\eta^2(\eta + d/a)^2(\eta + a/d)^2} \\
u^* &= U_\infty \frac{(\eta + a/d)^2(\eta + d/a)^2(\eta^2 - 1) + \eta^2 \left[ (\eta a/d + 1)^2 - (\eta + a/d)^2 \right]}{\eta^2(\eta + d/a)^2(\eta + a/d)^2}
\end{aligned}$$

Los puntos  $z = \pm a$  que mencionamos antes corresponderían a  $\eta = \pm 1$ , donde el primer término se anula trivialmente. El término entre corchetes puede escribirse cómo

$$(\pm a/d + 1)^2 - (\pm 1 + a/d)^2 = (\pm a/d + 1)^2 - (\pm 1)^2(1 \pm a/d)^2 = 0$$

Efectivamente, tenemos  $u^* = 0$  en  $z = \pm a$  y allí están dos puntos de estancamiento. Claramente, habrá otros pues la condición  $u = 0$  implica que se anule el numerador, que es un polinomio de grado 6 en  $\eta$ . Por lo tanto, habrá hasta 4 puntos de estancamiento más. Dos de ellos corresponderán a los puntos de estancamiento análogos sobre el cilindro  $1 z = -d/2 \pm a$ , pero probablemente corridos dado que nuestra solución está truncada. A este nivel no hay mucho más que podamos decir sin factorizar explícitamente el polinomio. De hecho, expandiendo el numerador podemos factorizar un  $\eta^2 - 1$  y dejar el polinomio de grado 4 expuesto

$$(\eta^2 - 1) \left[ \left(\eta + \frac{a}{d}\right)^2 \left(\eta + \frac{d}{a}\right)^2 - \eta^2 \left(1 - \left(\frac{a}{d}\right)^2\right) \right] = 0$$

Al menos formalmente, podemos encontrar las otras 4 raíces que anulan el término entre corchetes y tomar raíz a ambos lados

$$\begin{aligned}
\left(\eta + \frac{a}{d}\right)^2 \left(\eta + \frac{d}{a}\right)^2 &= \eta^2 \left(1 - \left(\frac{a}{d}\right)^2\right) \\
\left(\eta + \frac{a}{d}\right) \left(\eta + \frac{d}{a}\right) &= \pm \eta \sqrt{1 - \left(\frac{a}{d}\right)^2} \\
\eta^2 + \eta \left[ \frac{a}{d} + \frac{d}{a} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{a}{d}\right)^2} \right] + 1 &= 0
\end{aligned}$$

Usando la resolvente, obtenemos dos soluciones para cada uno de los signos en la expresión previa. Aunque horrible, tenemos las soluciones (esto no era necesario en el parcial)

$$z = a \frac{-\alpha_{1,2} \pm \sqrt{\alpha_{1,2}^2 - 4}}{2} \quad \alpha_{1,2} = \frac{a}{d} + \frac{d}{a} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{a}{d}\right)^2}$$

Cómo dijimos, dos de estas soluciones deben corresponder a los ceros del cilindro 1 y, por lo tanto, deben ser reales. Esto solo ocurre si el radicando es positivo, pero podemos asegurarlo tomando las soluciones correspondientes a  $\alpha_1$

$$\alpha_1 = \frac{a}{d} + \frac{d}{a} + \sqrt{1 - \left(\frac{a}{d}\right)^2} > 0 + \frac{2a}{a} + 0 = 2$$

donde usamos que  $d \geq 2a$  y que los otros 2 términos son positivos. Las 2 raíces correspondientes a  $\alpha_2$  pueden ser o no reales y no nos importan.



### 3.3. Inciso c

Reescribamos  $W' = u^*$  y analicemos que términos aportan singularidades internas o externas al cilindro 2 ( $|z| < a$ ).

$$W'(z) = u^*(z) = U_\infty \left[ \underset{\textcircled{1}}{1} - \underset{\textcircled{2}}{\frac{a^2}{(z+d)^2}} + \left(\frac{a^2}{d}\right)^2 \underset{\textcircled{3}}{\frac{1}{(z+a^2/d)^2}} - \underset{\textcircled{4}}{\frac{a^2}{z^2}} \right]$$

Solo los últimos 2 términos disponen de singularidades internas en  $z = 0$  y  $z = -a^2/d$ . Los primeros 2 son holomorfos en  $|z| < a$ . Por lo tanto, al elevar al cuadrado solo tengo que considerar los 4 términos que surgen de multiplicar los primeros 2 con los últimos 2. De hecho, al tener todos polos de orden 2, podemos prever que el producto con el factor constante no aportará residuos.

Para este cálculo, usaremos la formula integral de Cauchy

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} g^{(n)}(z)$$

donde  $g(z)$  es holomorfa dentro de la curva  $\mathcal{C}$ . Enumeremos los términos del corchete de  $\textcircled{1}$  a  $\textcircled{4}$  e identifiquemos  $n$ ,  $z_0$  y  $g$  en cada uno de los productos cruzados

$$\textcircled{1} \times \textcircled{3}: \quad g(z) = \frac{a^4}{d^2}, \quad n = 1, \quad z_0 = -\frac{a^2}{d} \implies g'(z_0) = 0$$

$$\textcircled{1} \times \textcircled{4}: \quad g(z) = -a^2, \quad n = 1, \quad z_0 = 0 \implies g'(z_0) = 0$$

$$\textcircled{2} \times \textcircled{3}: \quad g(z) = -\frac{a^6/d^2}{(z+d)^2}, \quad n = 1, \quad z_0 = -\frac{a^2}{d} \implies g'(z_0) = 2 \frac{a^6/d^2}{\left(-\frac{a^2}{d} + d\right)^3} = 2 \frac{a^6 d}{(d^2 - a^2)^3}$$

$$\textcircled{2} \times \textcircled{4}: \quad g(z) = \frac{a^4}{(z+d)^2}, \quad n = 1, \quad z_0 = 0 \implies g'(z_0) = -2 \frac{a^4}{(0+d)^3} = -2 \frac{a^4}{d^3}$$

Por lo tanto, usamos el teorema de Blasius podemos calcular la fuerza sobre el cilindro 2

$$f^* = \frac{i\rho}{2} \oint_{\mathcal{C}} [W'(z)]^2 dz = \frac{i\rho}{2} U_\infty^2 4\pi i \left[ 2 \frac{a^6 d}{(d^2 - a^2)^3} - 2 \frac{a^4}{d^3} \right] = -4\pi\rho U_\infty^2 a \left[ \frac{a^5 d}{(d^2 - a^2)^3} - \frac{a^3}{d^3} \right]$$

donde aprovechamos que en todos los casos teníamos  $n = 1$  para sacar factores comunes y recordamos que los términos cruzados vienen acompañados de un factor 2. Lo primero que notamos es que la solución es real, por lo que la fuerza será en dirección  $\hat{x}$ . Esto era esperable dada la simetría de reflexión que el problema tiene respecto del eje  $x$  ( $y = 0$ ).

Nos faltaría solo conocer su sentido, para lo cual necesitamos conocer el signo del objeto entre corchetes. Hay muchas formas de hacer esto, aquí usaremos análisis de funciones. Reescribamoslo un poco para volverlo más interpretable

$$\left[ \frac{a^5 d}{(d^2 - a^2)^3} - \frac{a^3}{d^3} \right] = \frac{a^3}{d^3} \left[ \frac{a^2 d^4}{(d^2 - a^2)^3} - 1 \right] = \frac{a^3}{d^3} \left[ \frac{(a/d)^2}{(1 - (a/d)^2)^3} - 1 \right]$$

donde analizar el signo es ahora más sencillo. De hecho, dejamos todo en términos de un único parámetro  $\xi = a/d$  que sabemos es menor o igual a 1/2 dada la condición  $d \geq 2a$ . Tenemos entonces  $0 < \xi \leq 1/2$  y queremos ver el signo de

$$h(\xi) = \frac{\xi^2}{(1 - \xi^2)^3} - 1$$

Es rápido notar que  $h$  es una función creciente en  $\xi$ , pues el primer término es una fracción cuyo numerador es creciente en  $\xi$  y su denominador decreciente con  $\xi$ . Por lo tanto  $h(0) < h(\xi) \leq h(1/2)$ . Evaluando los extremos tenemos  $h(0) = -1$  y

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(1/2)^2}{[1 - (1/2)^2]^3} - 1 = \frac{1/4}{(3/4)^3} - 1 = \frac{4^2}{3^3} - 1 = \frac{16}{27} - 1 < 0$$

Por lo tanto, vemos que  $h(\xi) < 0$  para los  $\xi$  de nuestro problema y por lo tanto tenemos  $f_x > 0$ . La fuerza por lo tanto aleja al cilindro 2 del 1. Al ser los cilindros intercambiables, esperamos entonces que la fuerza sobre el cilindro 1 también lo aleje del cilindro 2. Esto es en realidad consecuencia de la antisimetría que el sistema tiene respecto al eje  $y$  ( $x = 0$ ). Por lo tanto, los cilindros sentirán una fuerza repulsiva, del centro hacia los costados. Intuitivamente, esto nos dice que entre ambos cilindros tenemos una zona de alta presión y por Bernoulli esperamos entonces baja velocidad. Esto es natural si consideramos que los cilindros van a “interferir” con el flujo, forzándolo a reducir su velocidad en las cercanías y aún más en la zona central (que está “protegida” por ambos cilindros). Esto es compatible con nuestra intuición del inciso b respecto a la deflexión de las líneas de corriente.