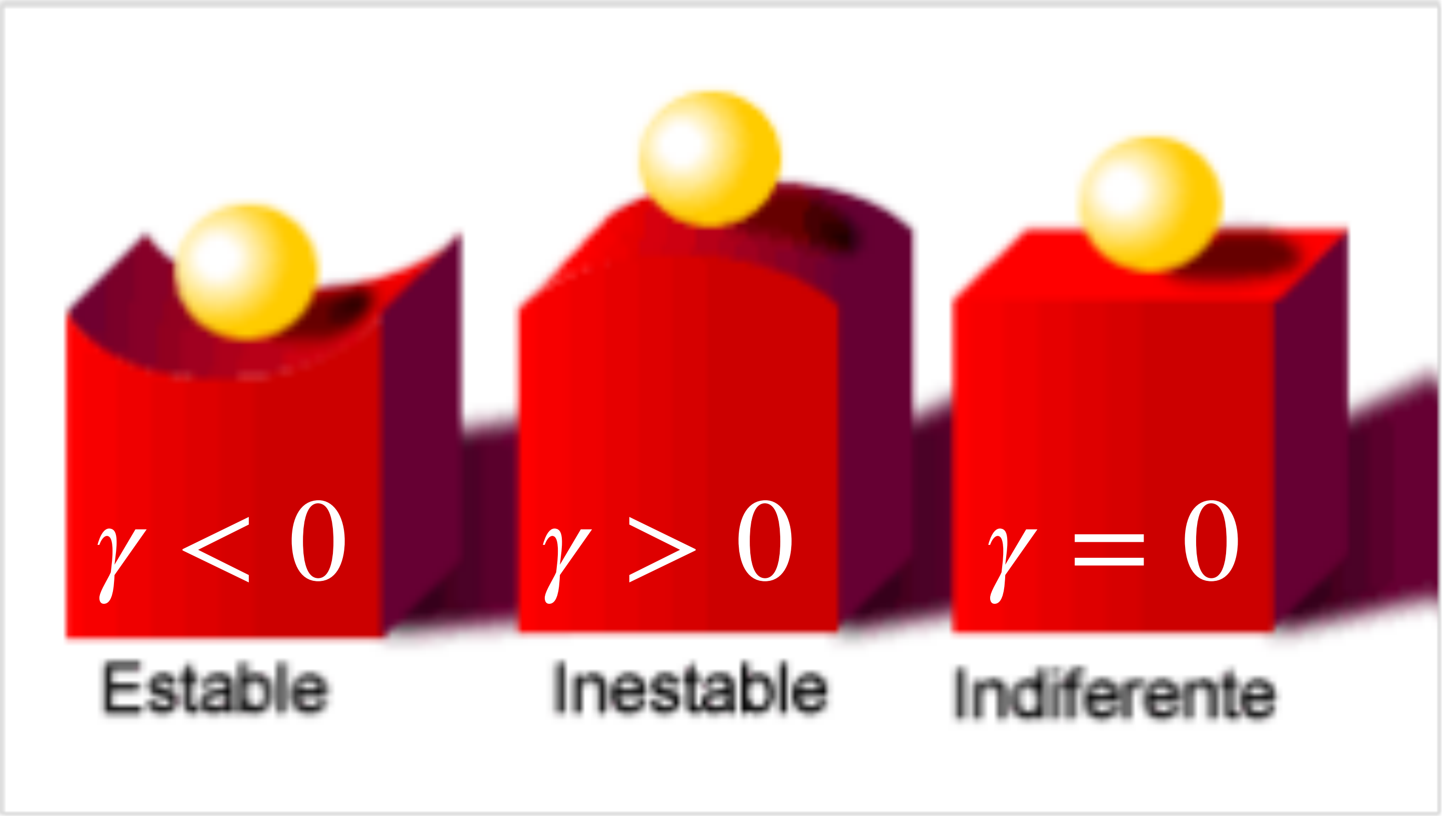
Repaso de Clase 10



- Inestabilidades y ondas >>> Breve repaso

- Inestabilidades de Kelvin-Helmholtz y Rayleigh-Taylor

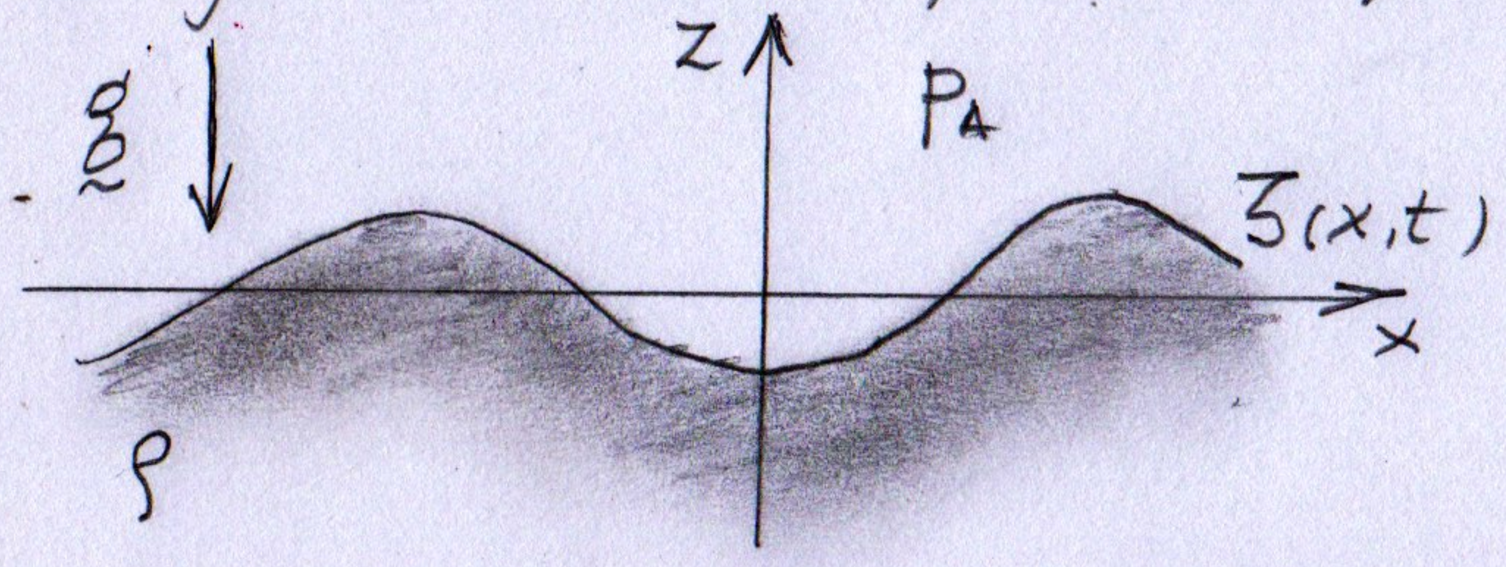
- Flujo 1D, incompresible, irrotacional e ideal

- Velocidad relativa tangencial >>> Kelvin-Helmholtz >>> desbalance de presiones

- Campo gravitatorio >>> Rayleigh-Taylor >>> desbalance entre peso y empuje

Ondas de gravedad

Veamos el caso mas simple de un fluido incompresible debajo de una atmósfera con $p_A = cte$.



Equilibrio

- $\zeta(x,t) = 0$
- $\phi(x, z<0, t) = 0$
- $p(z>0) = p_A$
- $p(z<0) = p_A - \rho g z$

De la atmosfera solo consideramos que $p_A = cte$.

Perturbamos a primer orden:

- $\underline{u} = \underline{\nabla}\phi \longrightarrow \nabla^2\phi = 0$
- Bernoulli-3 $\longrightarrow \partial_t\phi + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C(t)$
- En $z=\zeta \longrightarrow u_z = \partial_z\phi\big|_{z=\zeta} = \frac{d\zeta}{dt}$

Entonces:

- $\nabla^2\phi = 0 \longrightarrow \phi = \left(Be^{kz} + B'e^{-kz}\right) e^{ikx-i\omega t}$
- $u_z(z=\zeta) \longrightarrow \partial_z\phi\big|_{z=\zeta} = \partial_t\zeta + \underbrace{\cancel{\underline{\nabla}\phi\,(\hat{x}\,\partial_x\zeta)}}_{=0\ (\text{cuadrático})}$
- $p(z=\zeta) = p_A \longrightarrow \rho\left[C(t) - g\zeta - \partial_t\phi\big|_{z=\zeta}\right] = p_A$

Podemos absorber "$C(t)$" y "p_A" en una redefinición de ϕ.

Entonces:

$$\left.\begin{aligned} \partial_t\phi\big|_{z=\zeta} &= -g\zeta \\ \partial_z\phi\big|_{z=\zeta} &= \partial_t\zeta \end{aligned}\right\} \quad \left(\partial_z\phi + \frac{1}{g}\partial_{tt}\phi\right)\bigg|_{z=\zeta} = 0$$

Para obtener B y B', necesitamos plantear condiciones de contorno. Veamos dos casos.

Caso 1: Profundidad infinita (oceano)

$$\underline{\nabla}\phi(z\to\infty) < \infty \longrightarrow B' = 0$$

(Que la velocidad no diverja en el fondo)

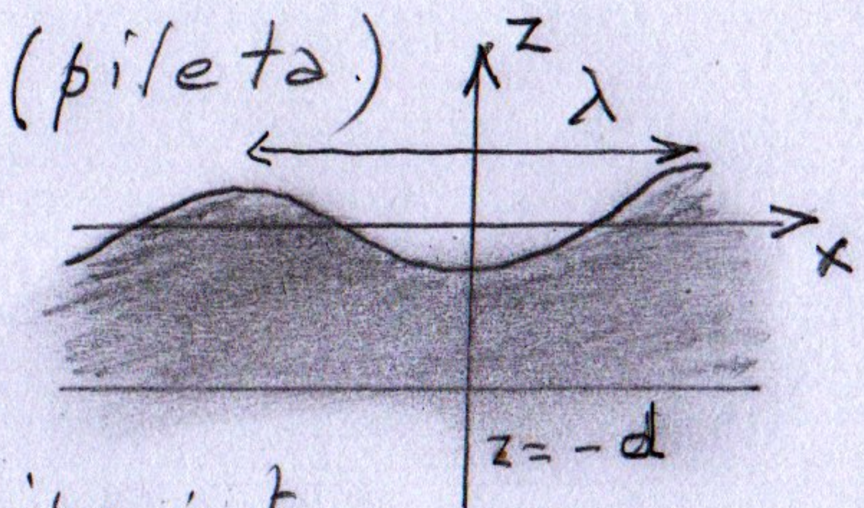
$$\phi = Be^{kz}e^{ikx-i\omega t} \longrightarrow \partial_z\phi + \frac{1}{g}\partial_{tt}\phi = \left(k - \frac{\omega^2}{g}\right)\phi$$

Entonces $\left(\partial_z\phi + \frac{1}{g}\partial_{tt}\phi\right)\bigg|_{z=\zeta} = 0 \longrightarrow \omega^2 = kg$

Ondas dispersivas

Ondas de gravedad - Profundidad finita

Caso 2: Profundidad finita (pileta)



Sup. $z = -d$

-Cond. contorno $u_z(z=-d) = 0$

$$\therefore \ \partial_z \phi \Big|_{z=-d} = \left(k B e^{-kd} - k B' e^{kd}\right) e^{ikx - i\omega t} = 0$$

$$\therefore \ B' = B e^{-2kd} \longrightarrow \phi = B\left(e^{kz} + e^{-2kd} e^{-kz}\right) e^{ikx - i\omega t}$$

Entonces: $\phi_{(x,z,t)} = \mathcal{B} \cosh(k(z+d))\, e^{ikx - i\omega t}$

$$\left(\partial_z \phi + \frac{1}{g} \partial_{tt} \phi\right|_{z=\zeta} = 0 = \mathcal{B}\left[k\, sh(k(z+d)) - \frac{\omega^2}{g} ch(k(z+d))\right]_{z=\zeta} e^{ikx - i\omega t}$$

Es decir que $\omega^2 = k g\, tgh(k(\zeta + d))$

Noten que la relación de dispersión depende de la incógnita $\zeta(x,t)$. Para ser consistentes con la linealización, debemos suponer $|\zeta| \ll d$ y por lo tanto

$$\omega^2 = k g\, tgh(kd)$$

Estas ondas tambien son dispersivas.

Que pasa si $kd \ll 1$ (es decir $d \ll \lambda$), que es el límite de baja profundidad o longitud de onda larga?

$$tgh(kd) \approx kd \longrightarrow \omega^2 \simeq g d k^2$$

Ondas no dispersivas

Comentario final

$$\omega^2 = g d k^2 \longrightarrow \omega = \pm \sqrt{gd}\; k$$

La solución general es entonces:

$$\phi_{(x,z,t)} = \frac{1}{2}\left[\sum_k \left(\mathcal{B}_k^+ e^{-i\sqrt{gd}\,kt} + \mathcal{B}_k^- e^{i\sqrt{gd}\,kt}\right) ch(k(z+d))\, e^{ikx} + \right.$$
$$\left. + \text{c.c.}\right]$$

- Las constantes complejas $\mathcal{B}_k^\pm$ se obtienen a partir de las condiciones iniciales.
- Para obtener la forma de la interfase $\zeta = -\frac{1}{g} \partial_t \phi \Big|_{z=0}$
- Si la pileta se extiende en $0 \leq x \leq L$

$$k = \frac{2\pi}{L} n \qquad n \in \mathbb{Z}$$