

Repaso de Clase 3

- Conservación de masa >>> Ecuación de continuidad
- Incompresibilidad de un flujo >>> $\frac{d\rho}{dt} \simeq 0$
- Conservación de impulso lineal
- Conservación de energía >>> Teoremas Bernoulli

Flujos planos, irrotacionales e incompresibles

- Flujo plano: $\underline{u}(\underline{r}) = u_x(x,y)\hat{i} + u_y(x,y)\hat{j}$

- Incompresible: $\frac{dp}{dt} = 0 = \nabla \cdot \underline{u} \rightarrow \underline{u} = \nabla \times (\hat{z}\psi(x,y))$
 $\psi(x,y)$: función corriente

- Irrotacional: $\nabla \times \underline{u} = 0 \rightarrow \underline{u} = \nabla \phi$
 $\phi(x,y)$: función potencial

Entonces:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \partial_x \phi = \partial_y \psi \\ u_y &= \partial_y \phi = -\partial_x \psi \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Condiciones de} \\ \text{Cauchy-Riemann} \end{array}$$

Son condiciones de diferenciabilidad de las partes real e imaginaria de funciones complejas de variable compleja.

Definimos:

$$W(\underline{z}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad W(\underline{z}) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

$$\underline{z} = x + iy$$

de manera que:

$$\frac{dW}{d\underline{z}} = \partial_x \phi + i\partial_x \psi = u_x - iu_y = \underline{U}^* \quad \underline{U} = u_x + iu_y$$

La energía cinética (por unidad de masa) se obtiene como:

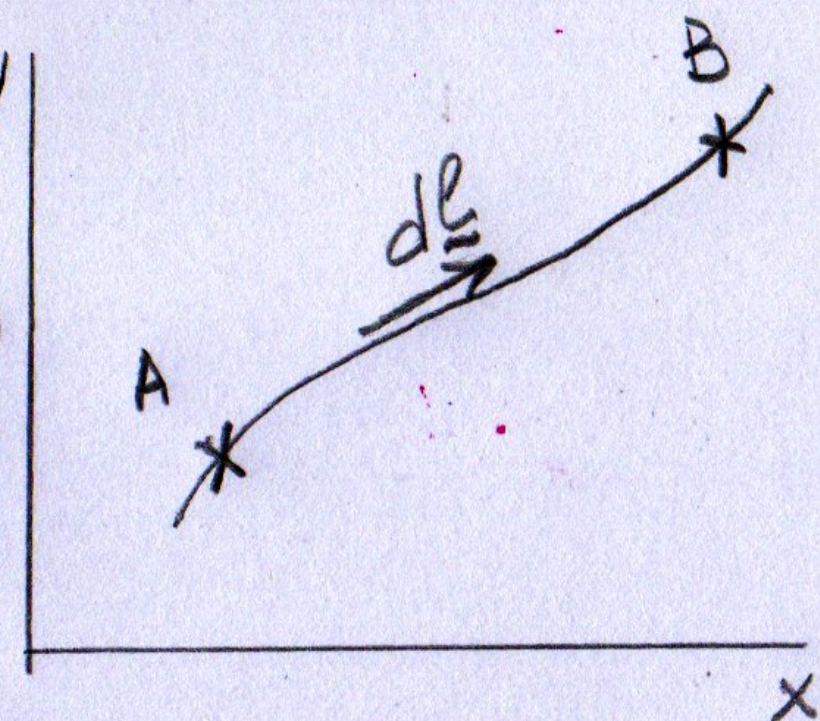
$$\frac{u^2}{2} = \frac{u_x^2 + u_y^2}{2} = \frac{1}{2} \left| \frac{dW}{d\underline{z}} \right|^2$$

NOTA: Tanto $\psi(x,y)$ como $\phi(x,y)$ son funciones armónicas, es decir: $\nabla^2 \phi = 0 = \nabla^2 \psi$

Función potencial

Que significado tiene la diferencia de potencial $\phi(x,y)$ entre dos puntos?

$$\phi_B - \phi_A = \int_A^B d\phi = \int_A^B dx \underbrace{\partial_x \phi}_{u_x} + dy \underbrace{\partial_y \phi}_{u_y}$$



$$d\underline{l} = (dx, dy) \rightarrow \phi_B - \phi_A = \int_A^B d\underline{l} \cdot \underline{u}$$

Si elijo A y B sobre una línea equipotencial ($\phi = cte$)

$$\phi_A = \phi_B \rightarrow \underline{u} \cdot d\underline{l} = 0 \Rightarrow \underline{u} \perp d\underline{l} \text{ en líneas } \phi = cte$$

Función potencial y función corriente

Es decir que $\underline{u}(r)$ es siempre perpendicular a las líneas $\phi = \text{cte}$.

Si ahora elegimos una curva C cerrada que pase por A

$$\phi_A - \phi_A = \oint_C \underline{u} \cdot d\underline{l} = \iint_{S_C} \underline{\omega} \cdot d\underline{S} \quad (\text{x Stokes})$$

- Como $\underline{\omega} = 0 \rightarrow \phi_A - \phi_A = 0$

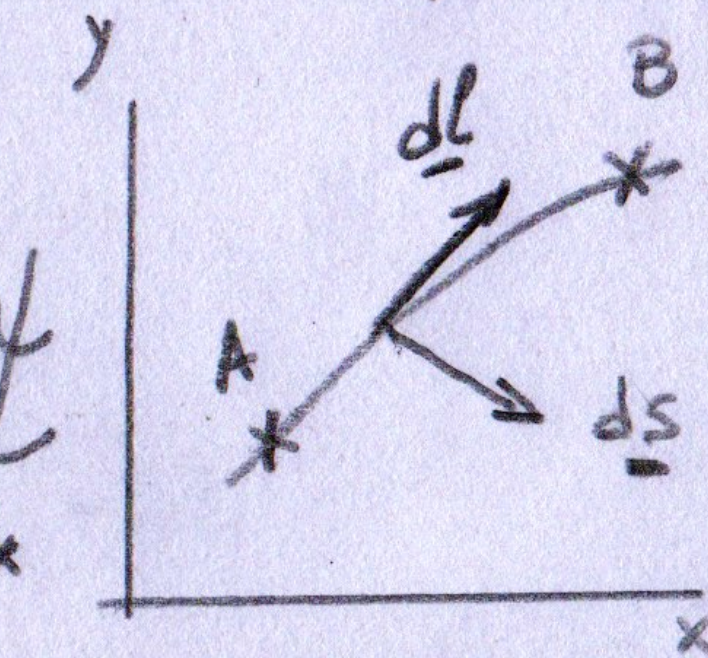
$\phi(x, y)$ univaluada

- Si admitimos singularidades de $\underline{\omega}$ (vórtices!), entonces

$$\iint_{S_C} d\underline{S} \cdot \underline{\omega} \neq 0 \leftrightarrow \phi(x, y) \text{ multivaluada}$$

Función corriente

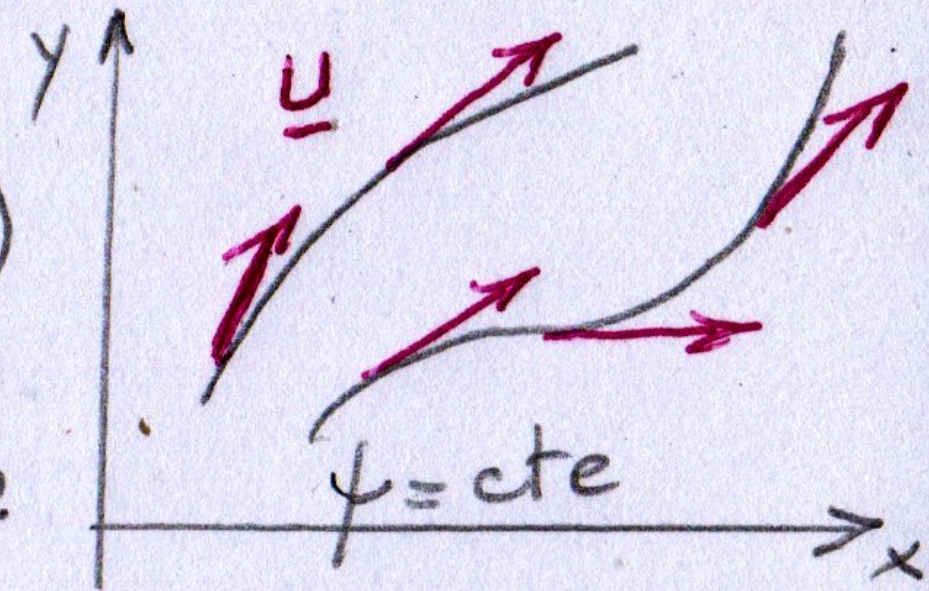
$$\psi_B - \psi_A = \int_A^B d\psi = \int_A^B dx \underbrace{\partial_x \psi}_{-u_y} + dy \underbrace{\partial_y \psi}_{u_x}$$



Entonces: $\psi_B - \psi_A = \int_A^B \underline{u} \cdot d\underline{S}$ donde $d\underline{S} = (dy, -dx) = d\underline{l} \times \hat{z}$

$\forall A, B$ de una línea $\psi = \text{cte} \rightarrow \underline{u} \cdot d\underline{S} = 0 \rightarrow \underline{u} \perp d\underline{S}$
Es decir que $\underline{u} \parallel d\underline{l}$ en líneas $\psi = \text{cte}$ (líneas de corriente)

NOTA: Las líneas $\phi = \text{cte}$ y $\psi = \text{cte}$ son mutuamente $\perp$ en todo punto.



Sea una curva C cerrada que pase por A . Entonces

$$\psi_A - \psi_A = \oint_C \underline{u} \cdot d\underline{S} = \iint_{S_C} \nabla \cdot \underline{u} \, dx \, dy \quad (\text{x Gauss})$$

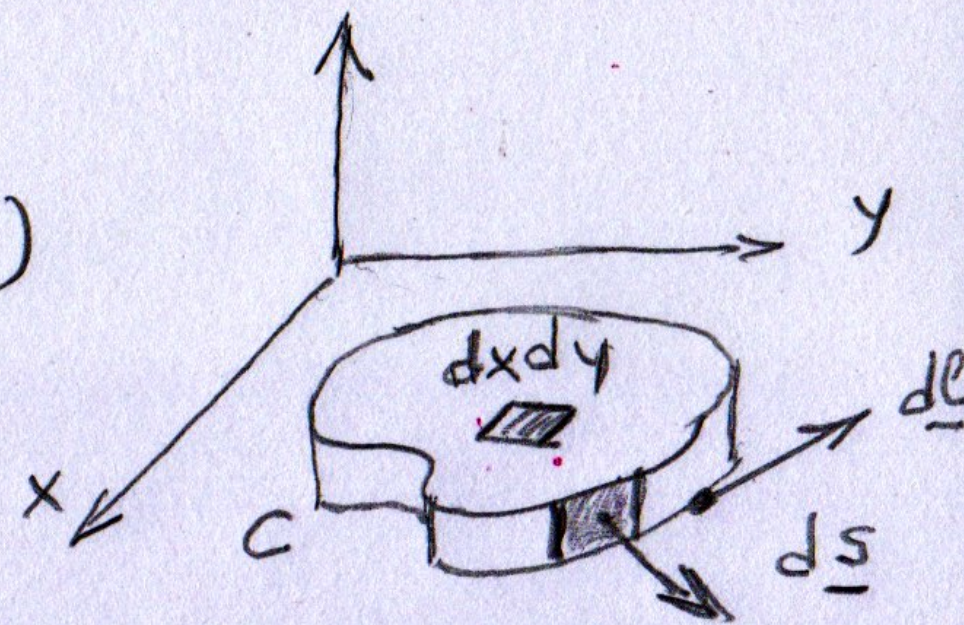
- Como $\nabla \cdot \underline{u} = 0 \rightarrow \psi_A - \psi_A = 0$

$\psi(x, y)$ univaluada

- Si admitimos singularidades de $\nabla \cdot \underline{u}$ (fuente!)

entonces $\iint_{S_C} \nabla \cdot \underline{u} \, dx \, dy \neq 0 \leftrightarrow \psi(x, y) \text{ multivaluada}$

NOTA: A través de singularidades de $\nabla \times \underline{u}$ y $\nabla \cdot \underline{u}$ podemos entonces modelar flujos no triviales



Algunos flujos elementales

Flujo uniforme

Queremos obtener $W(z)$ para varios flujos simples. Para un flujo uniforme:

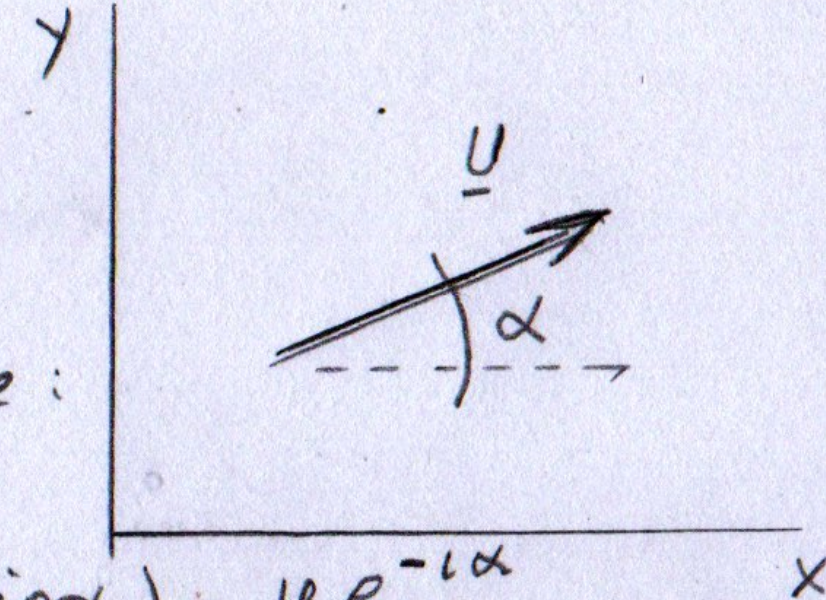
$$\left. \begin{aligned} u_x &= U \cos \alpha \\ u_y &= U \sin \alpha \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{dW}{dz} = U^* = U(\cos \alpha - i \sin \alpha) = U e^{-i\alpha}$$

$$\therefore W(z) = U e^{-i\alpha} z$$

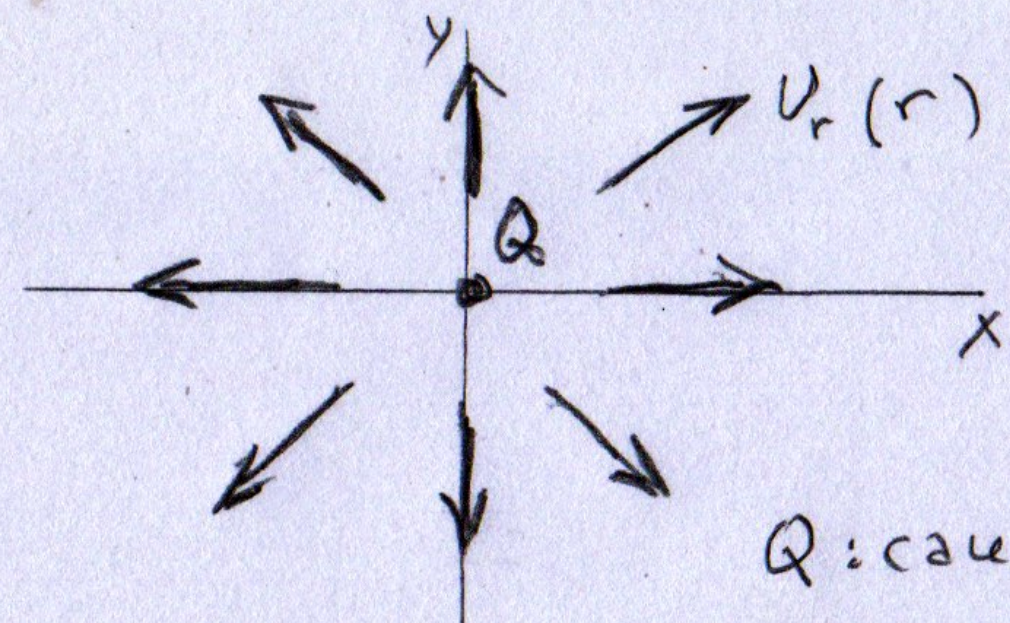
flujo uniforme

líneas de corriente $\psi = \text{Im}(W) = \text{cte}$

líneas de potencial $\phi = \text{Re}(W) = \text{cte}$



Fuente o sumidero



$$\underline{U} = U_r(r) \hat{r}$$

$$Q = U_r \cdot 2\pi r \rightarrow U_r(r) = \frac{Q}{2\pi r}$$

Para obtener $W(z)$:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{Q}{2\pi r} \cos \theta \\ u_y &= \frac{Q}{2\pi r} \sin \theta \end{aligned} \right\}$$

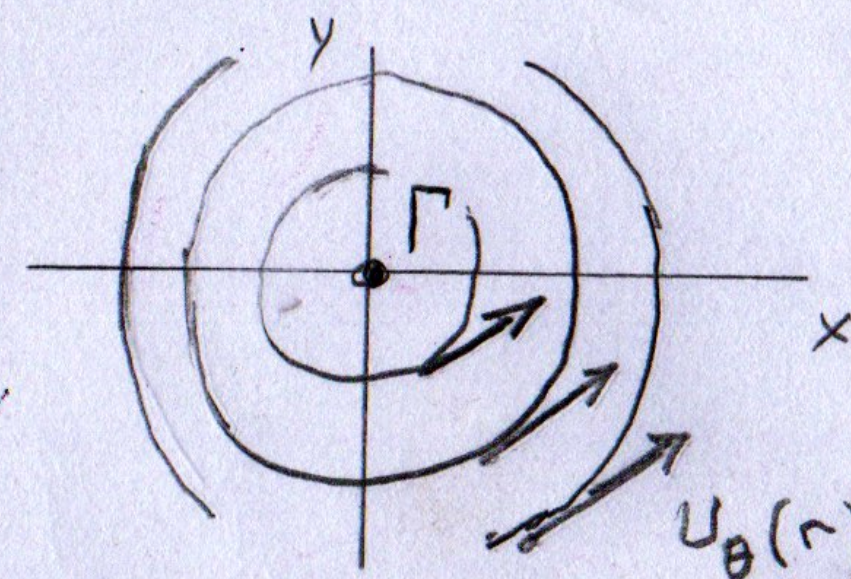
Por lo tanto:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2} = \partial_x \phi = \partial_y \psi \\ u_y &= \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2+y^2} = \partial_y \phi = -\partial_x \psi \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \phi &= \frac{Q}{2\pi} \ln r \\ \psi &= \frac{Q}{2\pi} \theta \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Como } z &= r e^{i\theta} \\ W &= \phi + i\psi \end{aligned} \right\} \rightarrow W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0)$$

fuente o sumidero en z_0
($Q > 0$) ($Q < 0$)

Vórtice



Un vórtice puntual en el origen

$$\underline{W} = \hat{z} \Gamma \delta(r)$$

corresponde a un campo $U_\theta(r)$

$$\text{tal que } \Gamma = U_\theta(r) 2\pi r$$

Entonces, con cálculos similares, obtenemos

$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0) \quad \text{vórtice en } z_0$$

Punto de estancamiento ($z = z_0$)

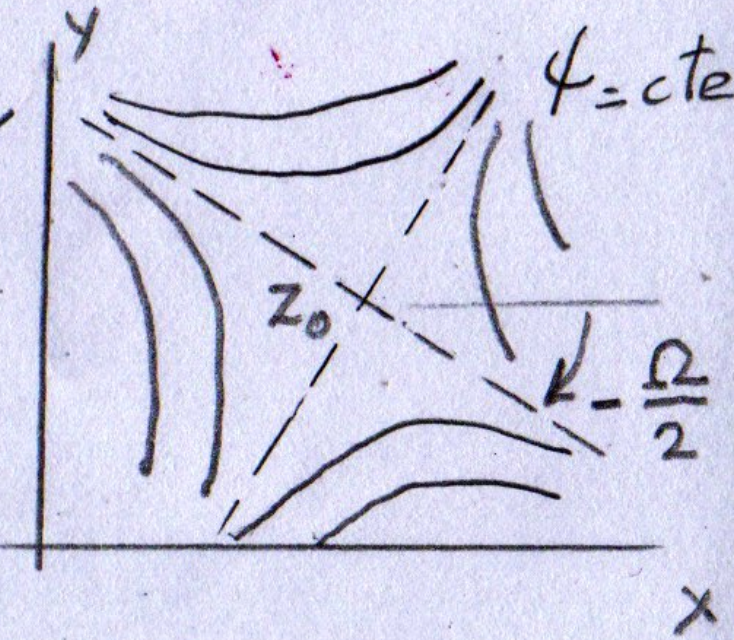
$$W(z) = W(z_0) + \frac{dW}{dz} \Big|_{z_0} (z - z_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 W}{dz^2} \Big|_{z_0} (z - z_0)^2 + \dots$$

$\frac{dW}{dz} \Big|_{z_0} = 0$ (cero de potencial) $U^*(z_0) = 0$

$$W_0'' = |W_0''| e^{i\Omega} \in \mathbb{C}$$

$$W(z) = \frac{W_0''}{2} (z - z_0)^2$$

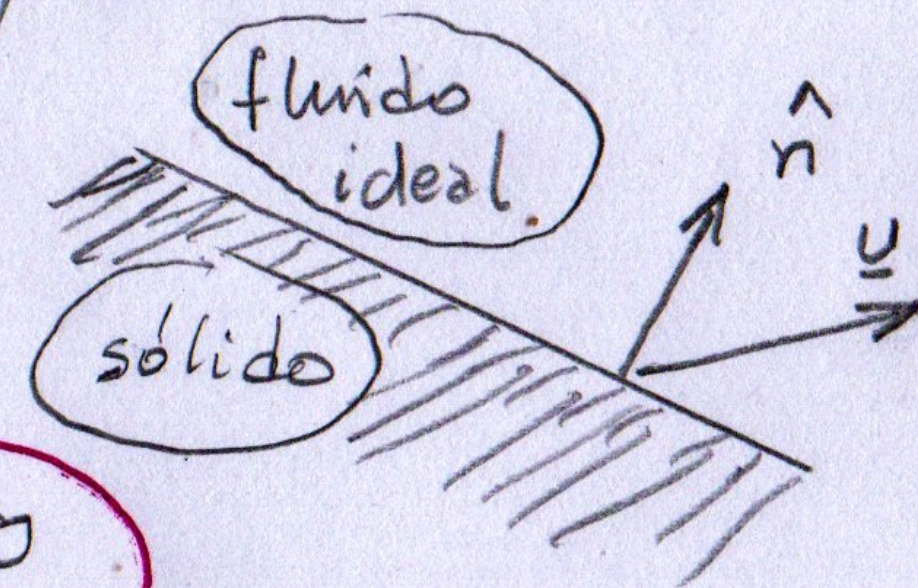
pto. estancamiento



Método de imágenes

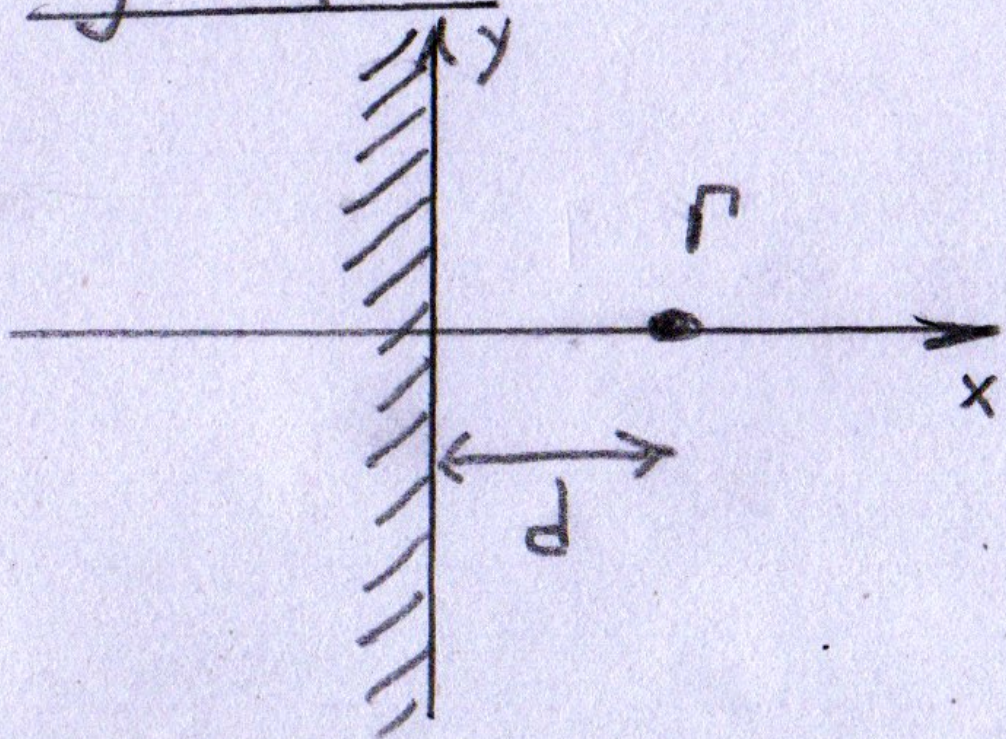
Al igual que en electrostática, el método de imágenes ayuda a satisfacer condiciones de contorno en problemas con suficiente simetría.

La cond. contorno de un fluido ideal en contacto con paredes rígidas es $\hat{n} \cdot \underline{u}|_{\text{pared}} = 0$.
Expresa la condición de rigidez de la pared.



NOTA: En flujos planos, la velocidad será tangente a la pared y por lo tanto coincidirá con una línea de corriente.

Ejemplo:



Sea un vórtice Γ a una distancia d de una pared. Para satisfacer la cond. contorno, agregamos un vórtice imagen $-\Gamma$ en $x = -d$.

$$\therefore W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z-d) + \underbrace{\frac{-\Gamma}{2\pi i} \ln(z+d)}_{\text{vórtice imagen}}$$

Calculamos líneas de corriente:

$$\psi = \text{Im } W = \text{Im} \left[\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(\frac{z-d}{z+d} \right) \right] = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left| \frac{z-d}{z+d} \right| = \text{cte}$$

$$\therefore \left| \frac{z-d}{z+d} \right| = \epsilon = \text{cte} \rightarrow \frac{(x-d)^2 + y^2}{(x+d)^2 + y^2} = \epsilon^2$$

Entonces:

$$\left(x - d \cdot \frac{1+\epsilon^2}{1-\epsilon^2} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{2d\epsilon}{1-\epsilon^2} \right)^2$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{x_0(\epsilon)} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{R(\epsilon)}$

Las líneas de corriente son circunferencias no concéntricas, centradas en $x_0(\epsilon)$ y con radio $R(\epsilon)$ para $0 < \epsilon < 1$.

- Para $\epsilon \sim 0 \Rightarrow x_0 \sim d, R \sim 0$
- $\epsilon = 1/2 \Rightarrow x_0 = \frac{5d}{3}, R \sim \frac{4d}{3}$
- $\epsilon \sim 1 \Rightarrow x_0 \sim \infty, R \sim \infty$

