

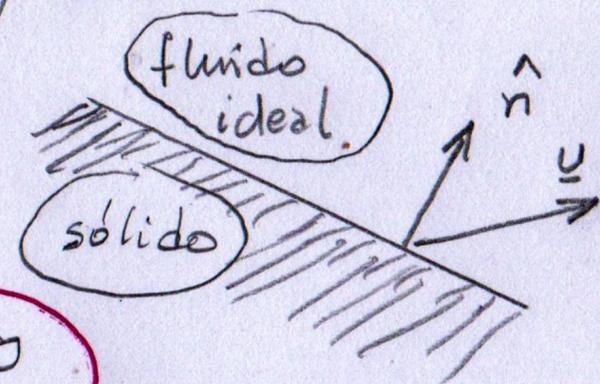
Repaso de Clase 4

- Flujos planos ($u_{x,y}(x, y) = 0$), incompresibles ($\frac{d\rho}{dt} = 0 = \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$) e irrotacionales ($\underline{\nabla} \times \underline{u} = 0$).
- Función potencial: singularidades de $\underline{\nabla} \times \underline{u}$ (**vórtices**) $\gg \gg \phi(x, y)$ multivaluada
- Función corriente: singularidades de $\underline{\nabla} \cdot \underline{u}$ (**fuentes**) $\gg \gg \psi(x, y)$ multivaluada
- Potencial complejo: $W(z) = \phi(x, y) + i \psi(x, y) \quad z = x + iy$
- Flujos simples: uniforme, fuente (sumidero), vórtice, punto de estancamiento.

Método de imágenes

Al igual que en electrostática, el método de imágenes ayuda a satisfacer condiciones de contorno en problemas con suficiente simetría.

La cond. contorno de un fluido ideal en contacto con paredes rígidas es

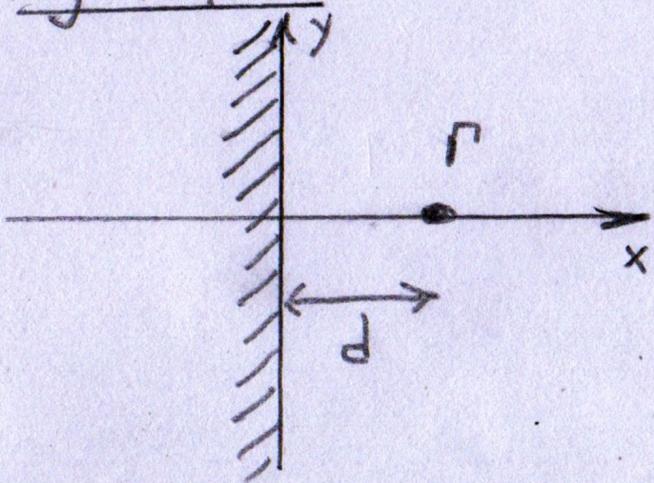


$$\hat{n} \cdot \underline{u} \Big|_{\text{pared}} = 0$$

Expresa la condición de rigidez de la pared.

NOTA: En flujos planos, la velocidad será tangente a la pared y por lo tanto coincidirá con una línea de corriente.

Ejemplo:



Sea un vórtice Γ a una distancia d de una pared.

Para satisfacer la cond. contorno, agregamos un vórtice imagen $-\Gamma$ en $x = -d$.

$$\therefore W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z-d) + \frac{-\Gamma}{2\pi i} \ln(z+d)$$

Calculamos líneas de corriente: vórtice imagen

$$\psi = \text{Im } W = \text{Im} \left[\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(\frac{z-d}{z+d} \right) \right] = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left| \frac{z-d}{z+d} \right| = \text{cte}$$

$$\therefore \left| \frac{z-d}{z+d} \right| = \epsilon = \text{cte} \rightarrow \frac{(x-d)^2 + y^2}{(x+d)^2 + y^2} = \epsilon^2$$

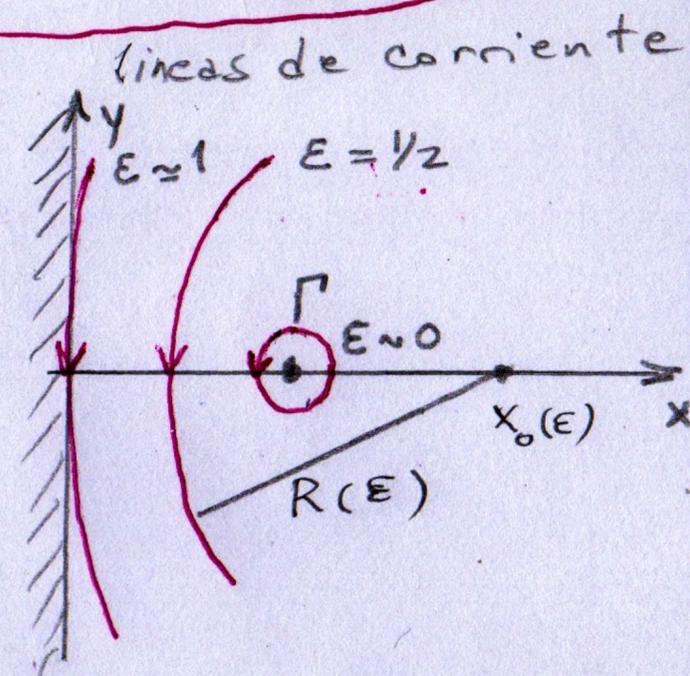
Entonces:

$$\left(x - d \frac{1+\epsilon^2}{1-\epsilon^2} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{2d\epsilon}{1-\epsilon^2} \right)^2$$

$x_0(\epsilon)$ $R(\epsilon)$

Las líneas de corriente son circunferencias no concéntricas, centradas en $x_0(\epsilon)$ y con radio $R(\epsilon)$ para $0 < \epsilon < 1$.

- Para $\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow x_0 \sim d, R \sim 0$
- $\epsilon = 1/2 \Rightarrow x_0 = \frac{5d}{3}, R \sim \frac{4d}{3}$
- $\epsilon \sim 1 \Rightarrow x_0 \sim \infty, R \sim \infty$

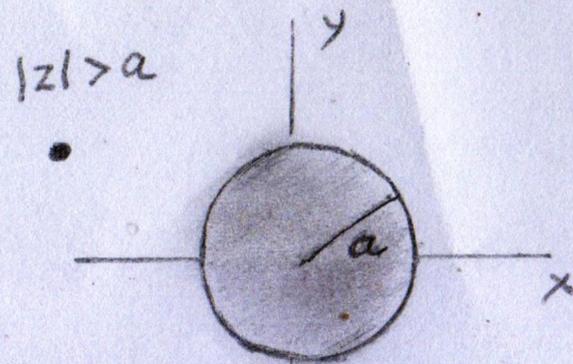


Teorema del círculo (Milne-Thomson, 1940)

Sea un flujo con potencial complejo $W = W_0(z)$ con singularidades en $|z| > a$. Entonces, $W = W_0(z) + W_0^*\left(\frac{a^2}{z^*}\right)$ es el potencial complejo con las mismas singularidades que W_0 en $|z| > a$ y con $|z| = a$ como línea de corriente.

Demostración

(i) Sing. de $W_0(z)$ en $|z| > a$ (fuera del círculo)



Sing. de $W_0\left(\frac{a^2}{z^*}\right)$ en $\left|\frac{a^2}{z^*}\right| > a \Rightarrow |z| < a$ (dentro del círculo).

Es decir que $W_0^*\left(\frac{a^2}{z^*}\right)$ agrega singularidades (virtuales) dentro del círculo.

(ii) En $|z| = a \Rightarrow z z^* = a^2 \Rightarrow \frac{a^2}{z^*} = z$

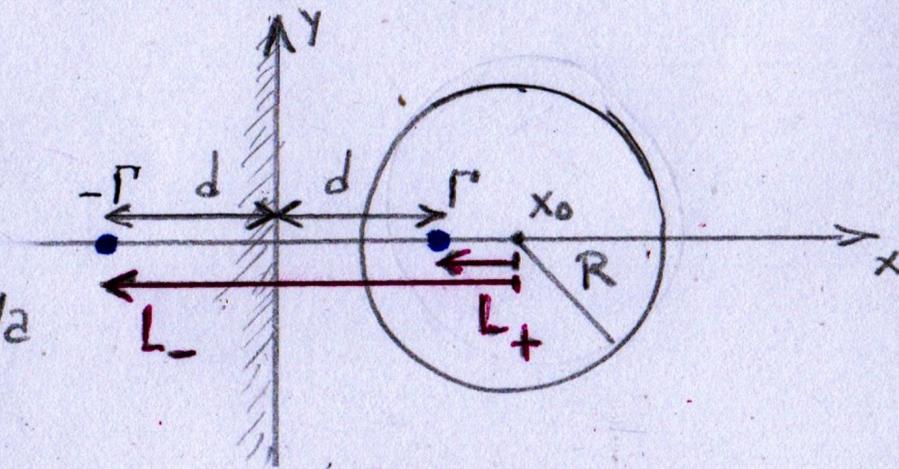
Entonces $W(|z|=a) = W_0(z) + W_0^*(z) \in \mathbb{R}$

$\therefore \text{Im}[W(|z|=a)] = 0 = \text{cte} \Rightarrow |z|=a$ es una línea de corriente

NOTA: El teorema es compatible con el agregado de un vórtice Γ en el origen; $W(z) = W_0(z) + W_0^*\left(\frac{a^2}{z^*}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$

Veamos que con el ejemplo anterior y un poco de ingenio, pudimos haber deducido el teorema.

• El problema original es un vórtice Γ a distancia d de la pared.



• La circunferencia centrada en x_0 de radio R es una línea de corriente.

• Y si colocamos un círculo de radio R y centro x_0 frente a un vórtice $-\Gamma$ a distancia L_- ?

• Se requiere un vórtice virtual $+\Gamma$ a distancia L_+

$$L_{\pm} = x_0 \mp d \xrightarrow{\text{ejercicio}} L_+ \cdot L_- = R^2 \rightarrow L_+ = \frac{R^2}{L_-}$$

Flujo alrededor de un cilindro

Sea un flujo horizontal y uniforme u_0 sobre un círculo de radio a

$$W_0(z) = u_0 z \Rightarrow W = u_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

Verifiquen que

$$\psi = 0 \text{ en } |z| = a$$

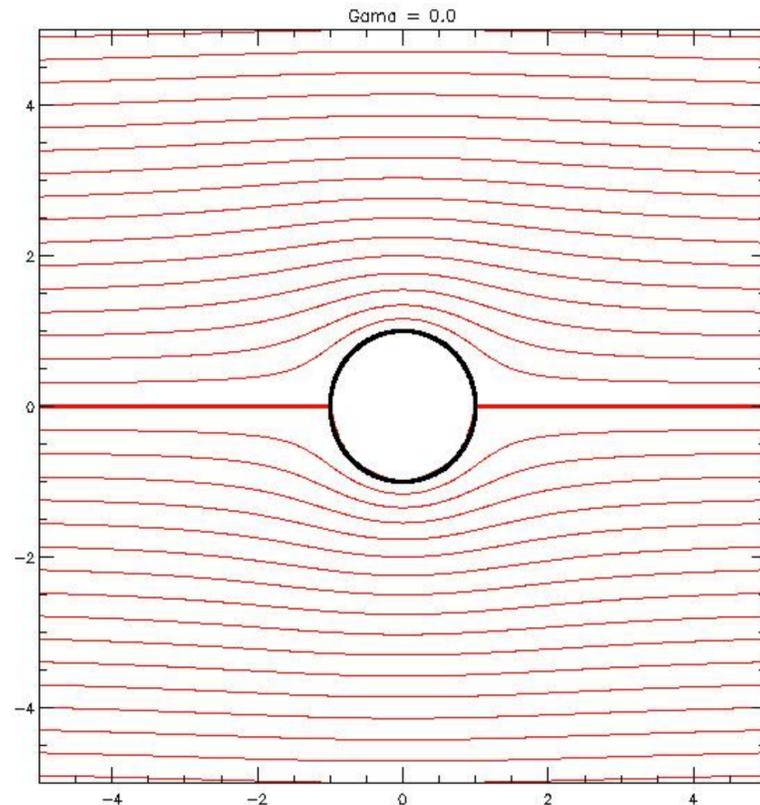
Noten que las líneas de corriente son simétricas respecto de $x \leftrightarrow -x$ y también $y \leftrightarrow -y$.

Agregamos ahora un vórtice $-\Gamma$ en el origen:

$$W(z) = u_0 z + u_0 \frac{a^2}{z} + \frac{-\Gamma}{2\pi i} \ln z$$

$$\psi = \text{Im}(W) = u_0 y - \frac{u_0 a^2 y}{x^2 + y^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

Utilizamos las constantes u_0 y a para adimensionalizar el problema.



$$\left. \begin{array}{l} \psi \rightarrow u_0 a \psi \\ (x, y) \rightarrow a(x, y) \end{array} \right\} \Rightarrow \psi(x, y) = y \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) + \gamma \ln(x^2 + y^2)$$

$$\gamma = \frac{\Gamma}{4\pi u_0 a}$$

Noten que la versión adimensional ya no depende de u_0, Γ, a sino solamente de γ .

El vórtice rompe la simetría $y \leftrightarrow -y$. Busquemos puntos de estancamiento sobre $|z| = a$, donde se insertan líneas de corriente que

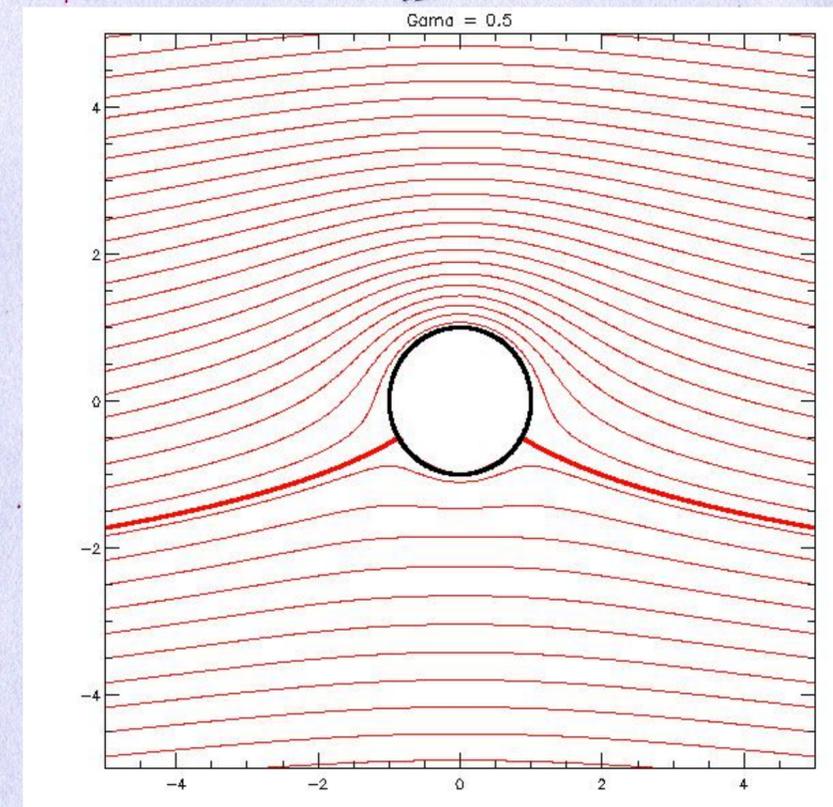
llamamos separatrices.

$$\text{En polares: } \begin{cases} u_\theta = \partial_r \psi \\ u_r = \frac{1}{r} \partial_\theta \psi \end{cases}$$

$$\psi(r, \theta) = r \sin \theta \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) + 2\gamma \ln r$$

$$u_\theta(r=1) = 2 \sin \theta + 2\gamma = 0$$

$$\sin \theta = -\gamma \quad \text{Ptos. estanc. si } -1 < \gamma < 1$$



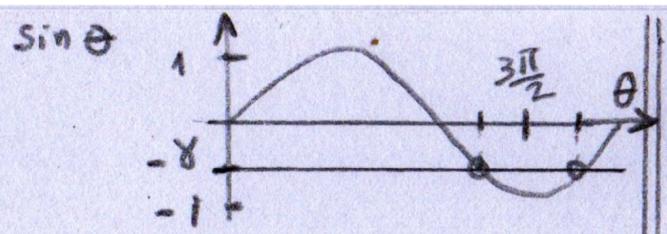
Flujo alrededor de un cilindro

Noten que las soluciones de $\sin \theta = -\gamma$ equidistan de $\theta = \frac{3\pi}{2}$

Para $\gamma \rightarrow 1$, los dos puntos coinciden en $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Para $\gamma > 1$ ya no hay puntos de estancamiento sobre el perímetro. Busquemos pto. estancamiento fuera del círculo:

$$u_\theta = \partial_r \psi = \sin \theta \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{2\gamma}{r} = 0$$

$$u_r = \frac{1}{r} \partial_\theta \psi = \cos \theta \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) = 0 \rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$


Para satisfacer $u_\theta = 0$ debe ser $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$ y $r^2 - 2\gamma r + 1 = 0 \rightarrow r_0 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}$. La solución r_- resulta $r_- < 1$ si $\gamma > 1$.

Entonces si $\gamma > 1$ hay un único punto de estancamiento en $\theta = \frac{3\pi}{2}$ y $r_0 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1} > 1$.

La separatriz tiene la forma de la figura, separando el flujo que evade al círculo por arriba y por abajo, pero también aislando un flujo estanco alrededor del círculo. Ejemplo: $\gamma = 1.5 \rightarrow r_0 = 2.62$.

