

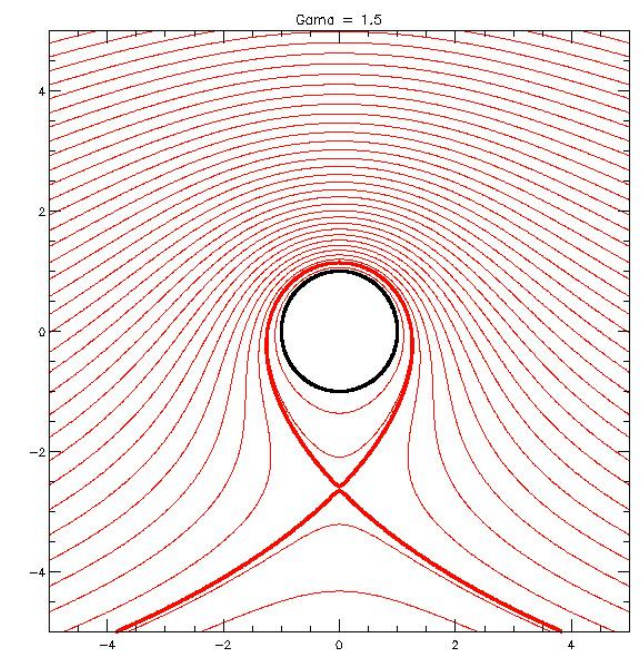
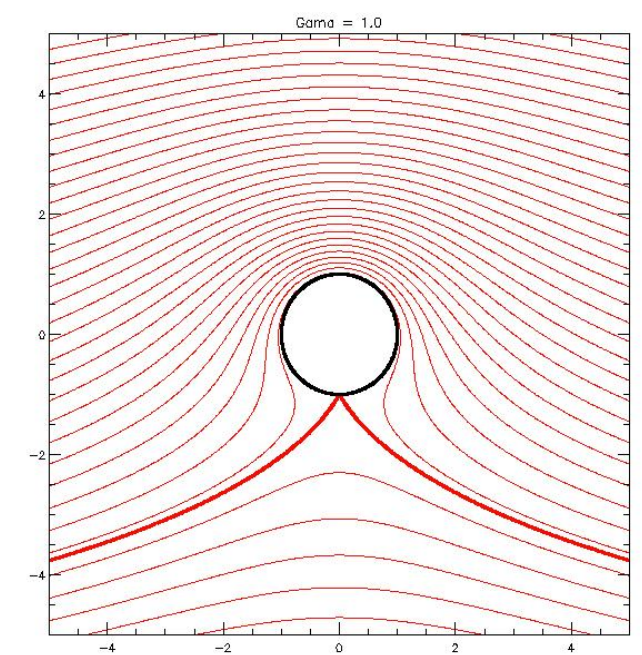
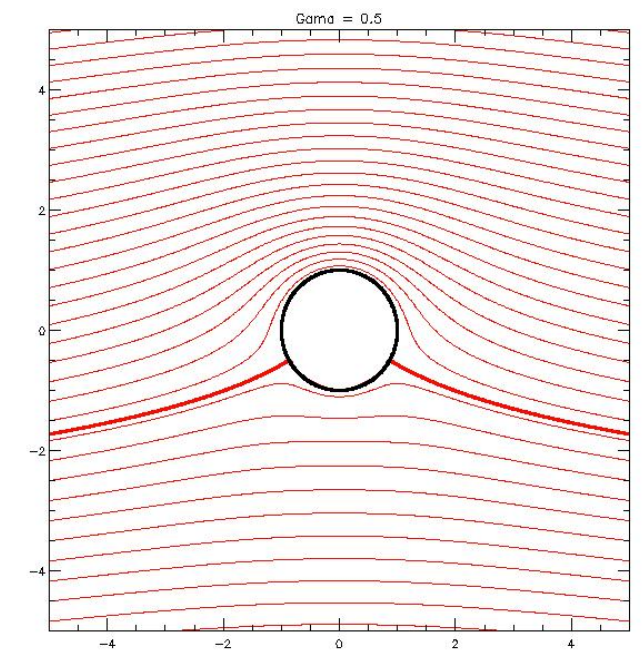
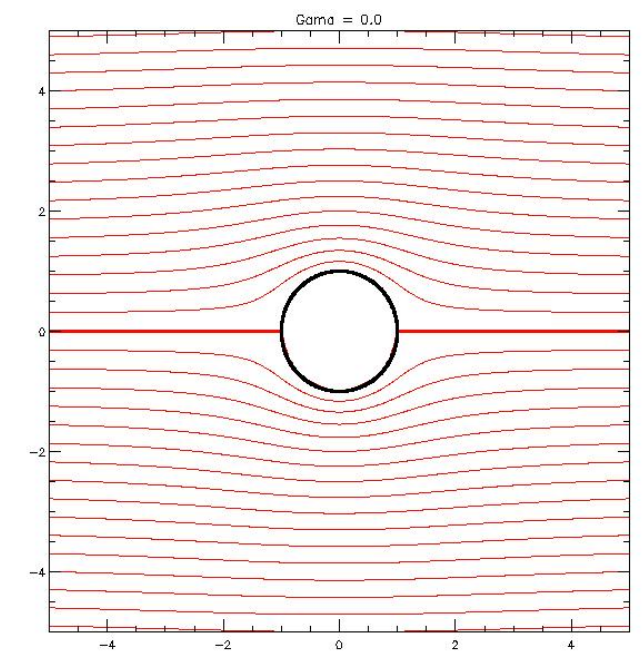
Repaso de Clase 5

- Método de imágenes para contornos circulares:

- Teorema del círculo $\ggg W = W_0(z) + W_0^*\left(\frac{a^2}{z^*}\right)$

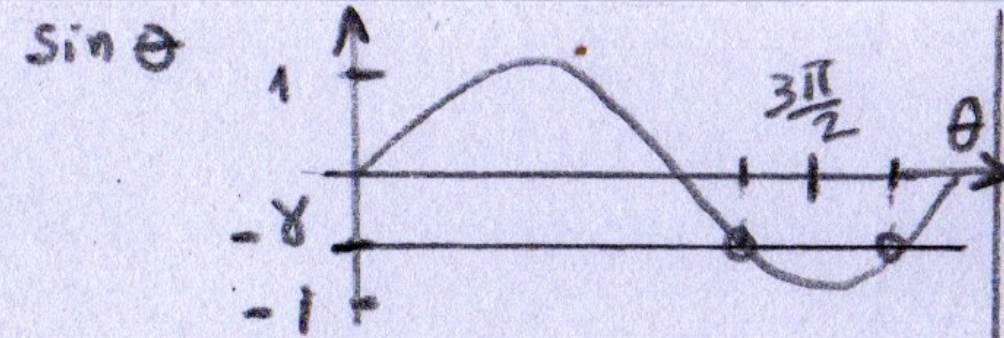
- Agregado de vórtice en el origen $\ggg$ Flujo alrededor de un cilindro

- Puntos de estancamiento, separatrices



Flujo alrededor de un cilindro

Noten que las soluciones de $\sin \theta = -\gamma$ equidistan de $\theta = \frac{3\pi}{2}$



Para $\gamma \rightarrow 1$, los dos puntos coinciden en $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Para $\gamma > 1$ ya no hay puntos de estancamiento sobre el perímetro. Busquemos pto. estancamiento fuera del círculo:

$$u_\theta = \partial_r \psi = \sin \theta \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{2\gamma}{r} = 0$$

$$u_r = \frac{1}{r} \partial_\theta \psi = \cos \theta \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) = 0 \rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

Para satisfacer $u_\theta = 0$ debe ser $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$ y

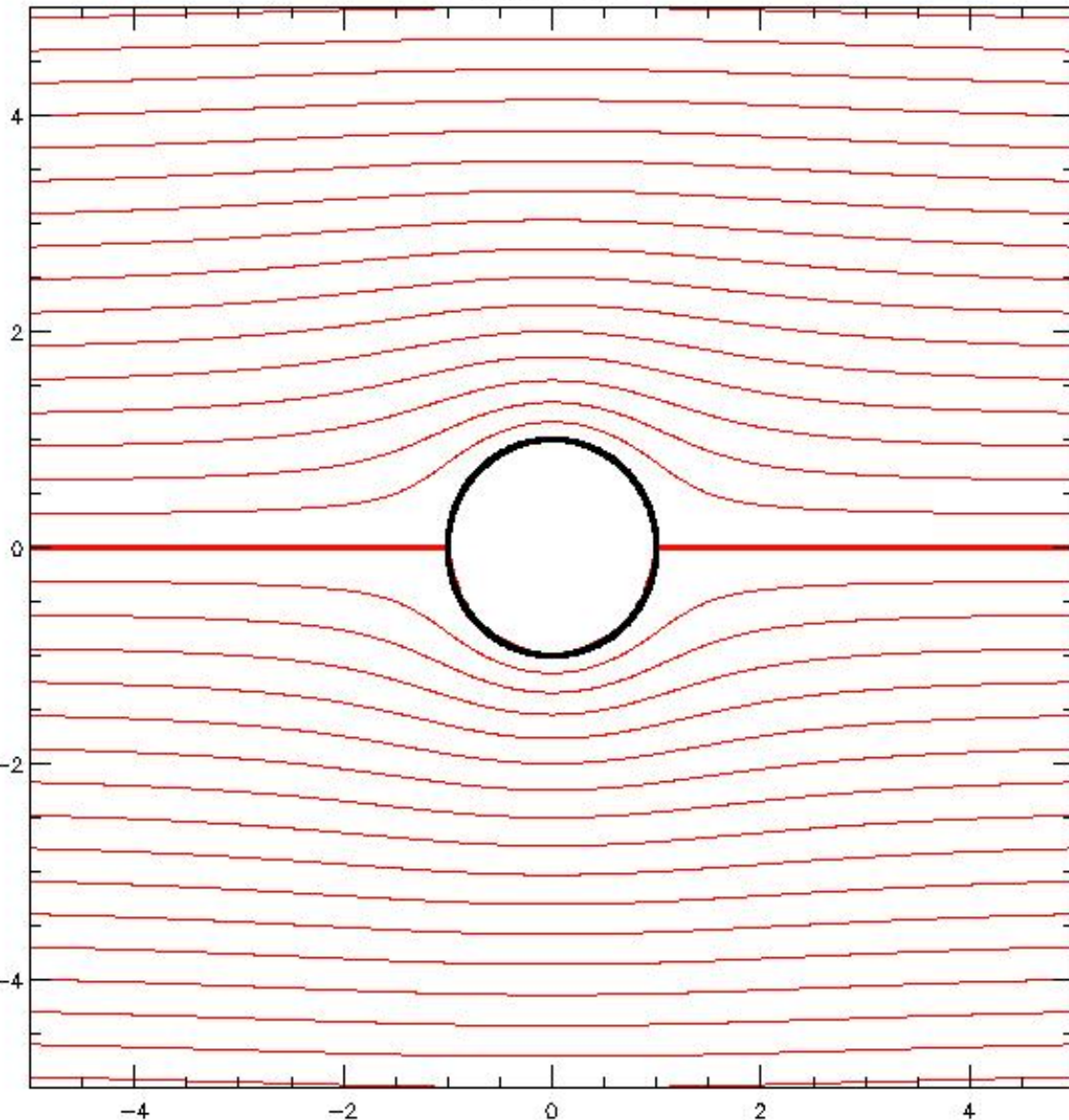
$$r^2 - 2\gamma r + 1 = 0 \rightarrow r_0 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

La solución r_- resulta $r_- < 1$ si $\gamma > 1$.

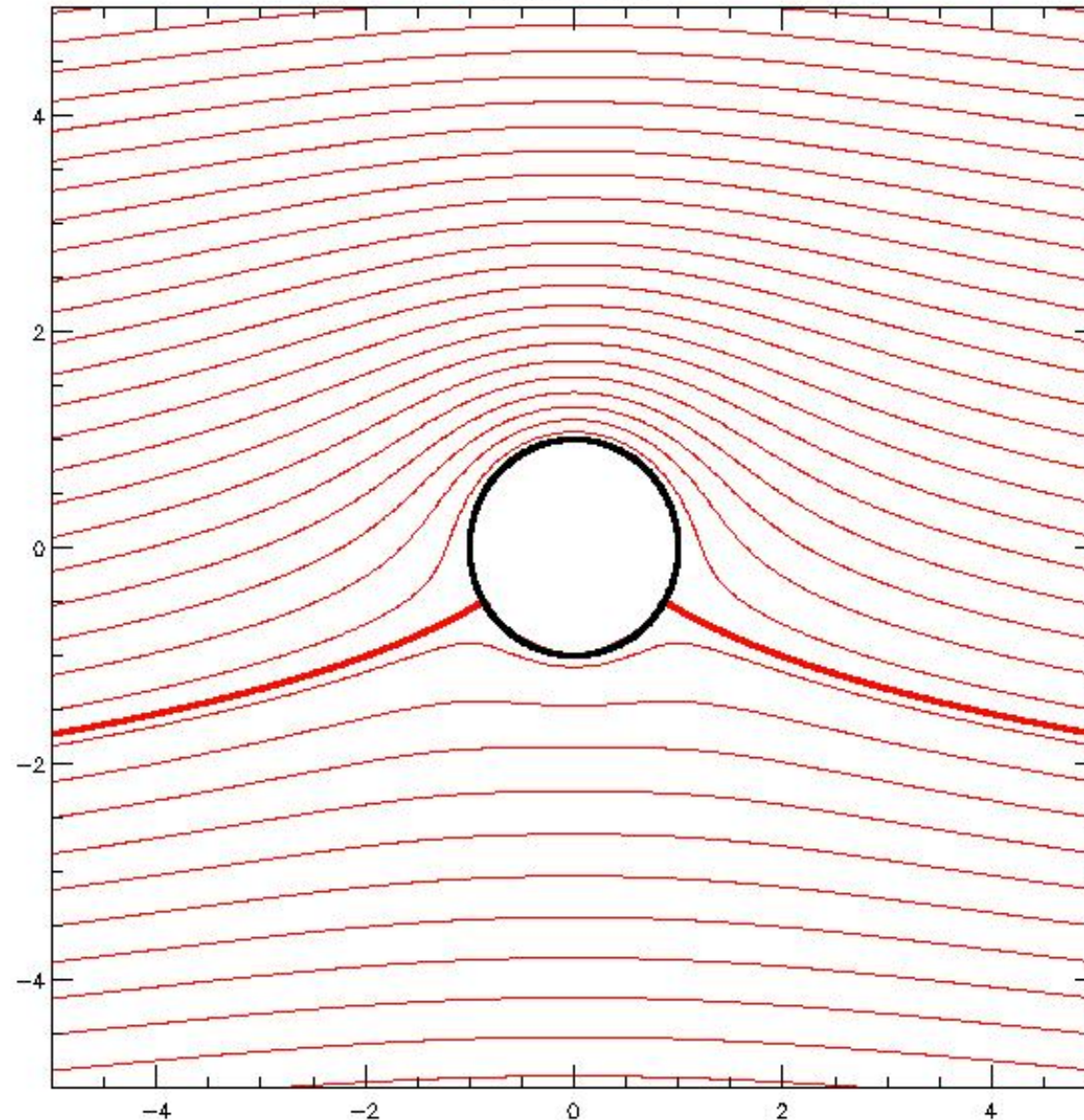
Entonces si $\gamma > 1$ hay un único punto de estancamiento en $\theta = \frac{3\pi}{2}$ y $r_0 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1} > 1$.

La separatriz tiene la forma de la figura, separando el flujo que evade al círculo por arriba y por abajo, pero también aislando un flujo estanco alrededor del círculo. Ejemplo: $\gamma = 1.5 \rightarrow r_0 = 2.62$

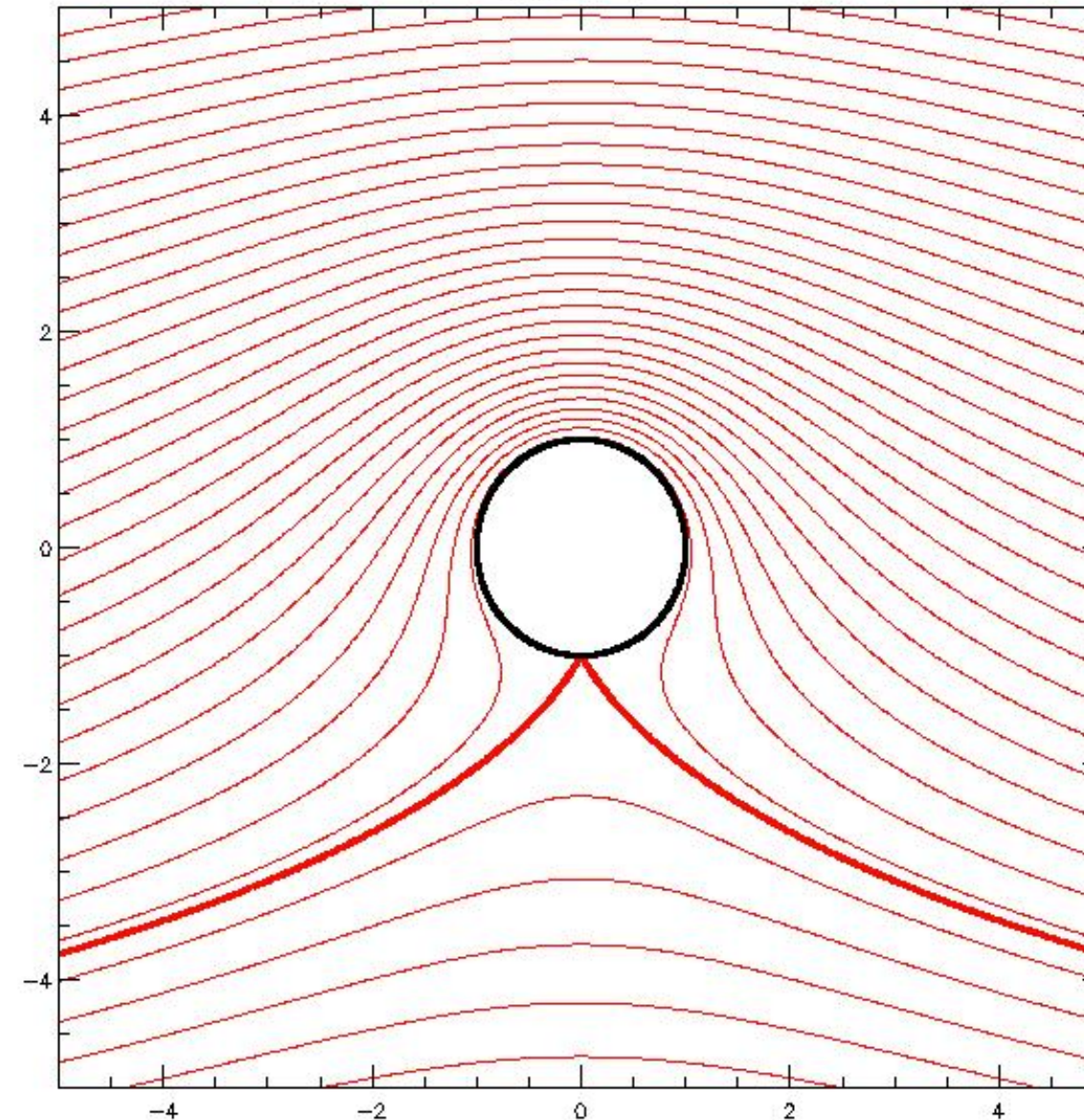
Gamma = 0.0



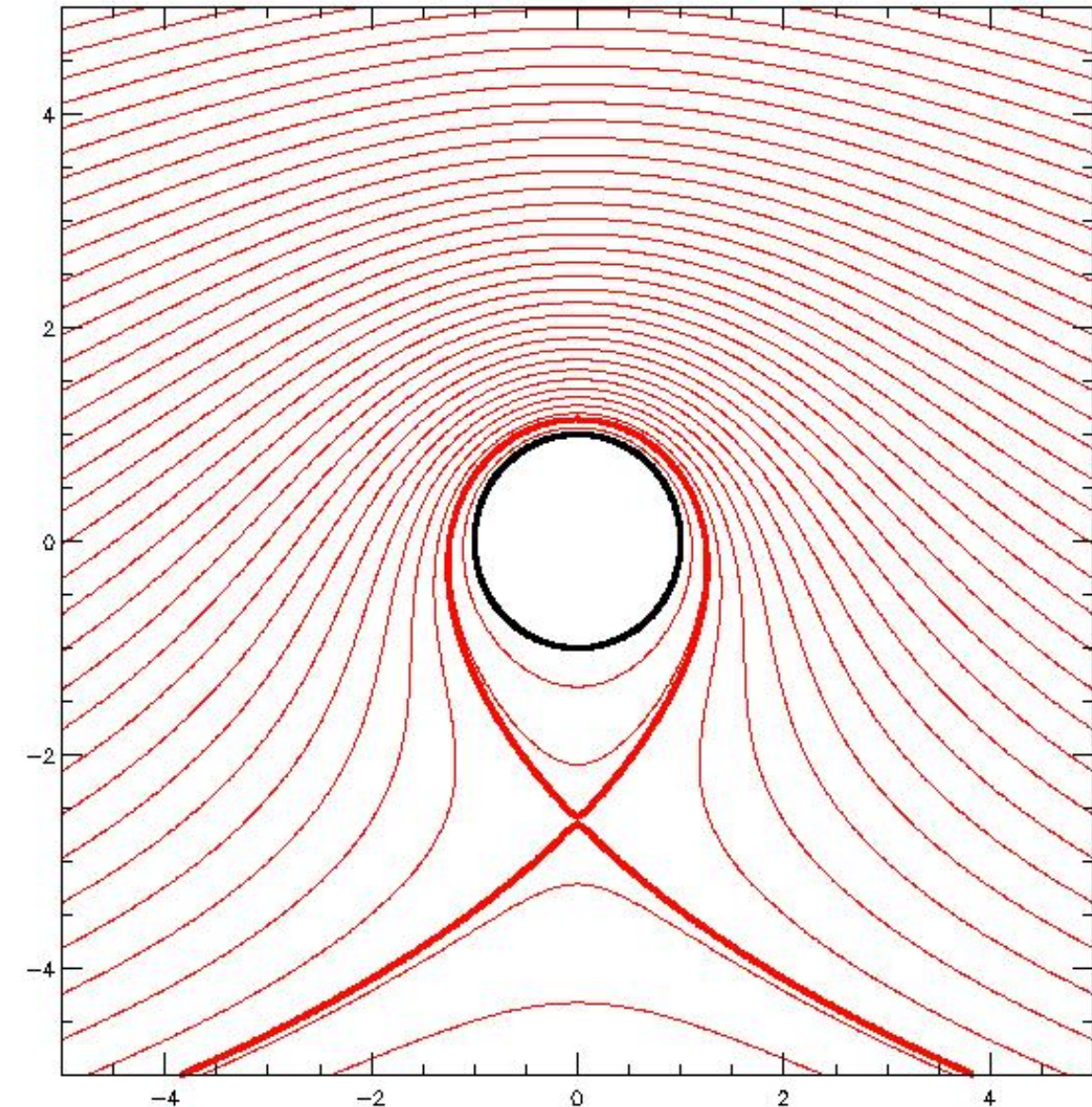
Gamma = 0.5



Gamma = 1.0



Gamma = 1.5



Teorema de Blasius (1911)

Sea un flujo estacionario con potencial complejo $W(z)$ alrededor de un sólido delimitado por la curva cerrada C . La fuerza

del fluido sobre el sólido resulta: $F^* = F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C dz \left(\frac{dW}{dz} \right)^2$

Demostración

La fuerza del fluido al sólido se ejerce a través de la pared y vale

$$\underline{F} = - \oint_C p \hat{n} ds$$

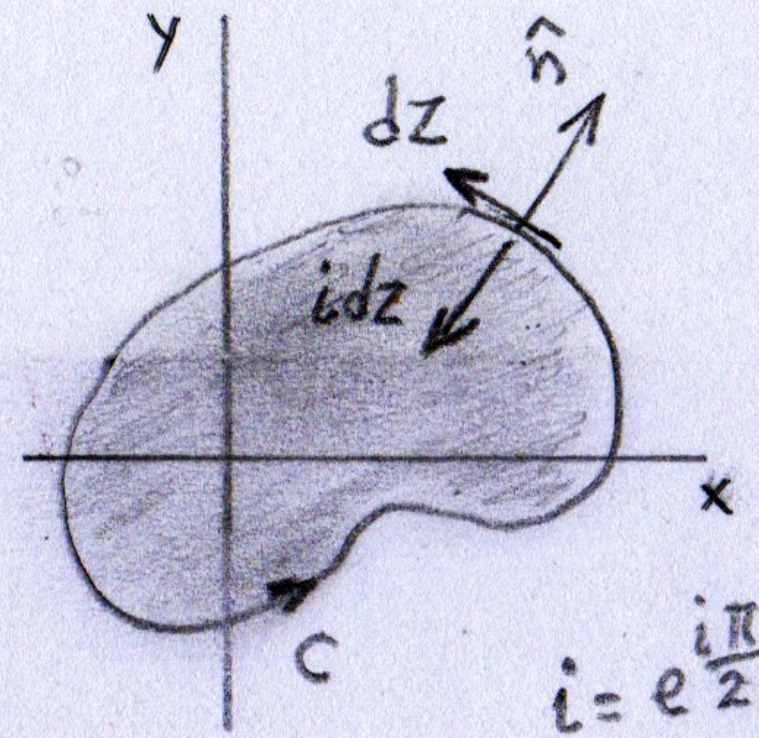
En notación compleja: $\begin{cases} \hat{n} ds \rightarrow -i dz \\ \underline{F} \rightarrow \mathbb{F} = F_x + iF_y \end{cases}$

Es decir que:

$$\mathbb{F} = F_x + iF_y = i \oint_C p dz \rightarrow \mathbb{F}^* = F_x - iF_y = -i \oint_C p dz^*$$

Por Bernoulli 2: $p = p_0 - \frac{\rho u^2}{2} = p_0 - \frac{\rho}{2} \left| \frac{dW}{dz} \right|^2$

$$\therefore F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 dz^* \quad (\text{porque } \oint_C p_0 dz = 0)$$



Se parece al resultado, pero no es.

Como sobre C es $\text{Im}(W) = \text{cte} \rightarrow \text{Im}(dW) = 0$

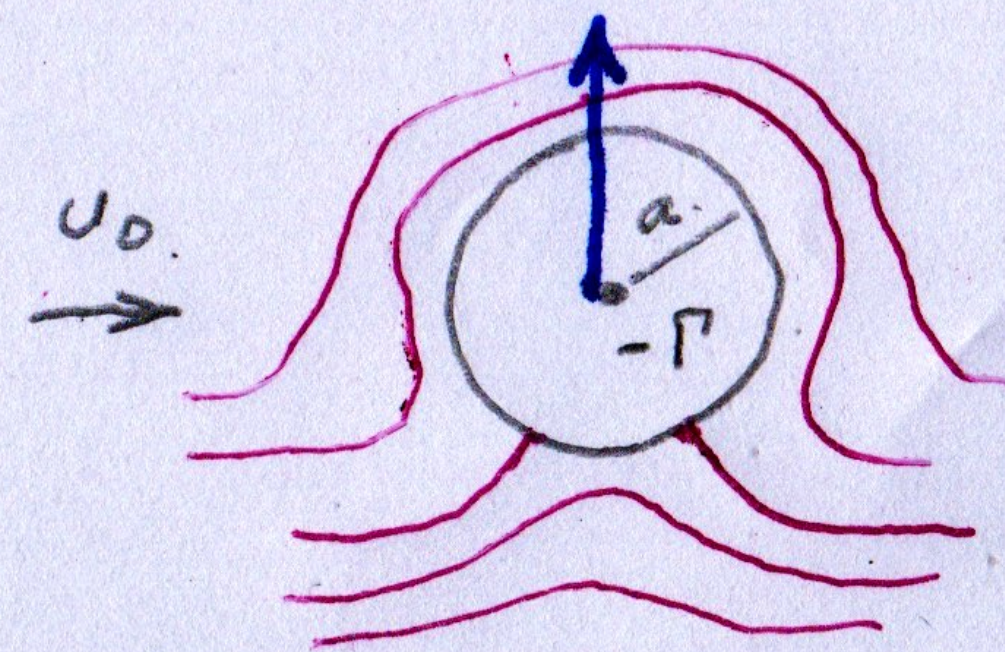
Sobre C es $dW = dW^* \rightarrow \frac{dW}{dz} dz = \left(\frac{dW}{dz} dz \right)^* = \left(\frac{dW}{dz} \right)^* dz^*$

Entonces $\left| \frac{dW}{dz} \right|^2 dz^* = \frac{dW}{dz} \left(\frac{dW}{dz} \right)^* dz^* = \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz$ sobre C

$$\therefore F^* = F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C dz \left(\frac{dW}{dz} \right)^2$$

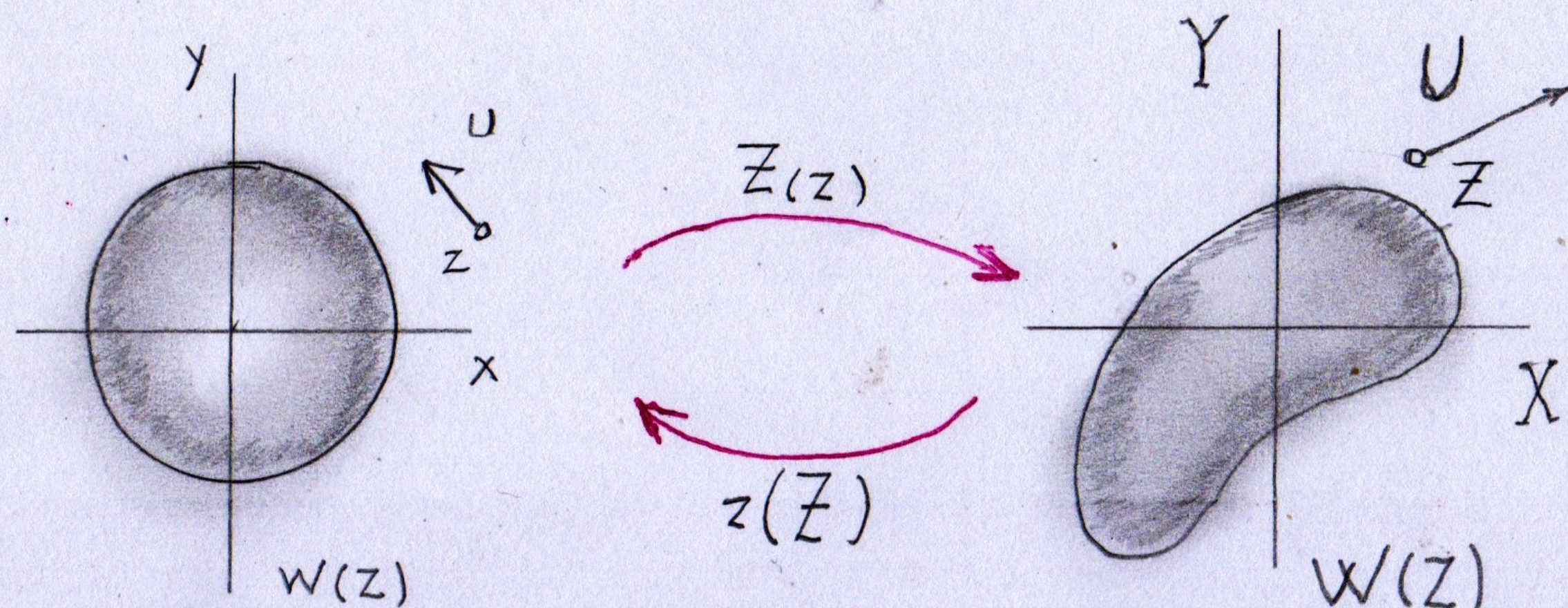
Ejercicio: Muestren que la fuerza de un flujo $u_0 \hat{x}$ sobre un círculo de radio a con vórtice $-\Gamma$ en el origen es

$$\underline{F} = \hat{y} \rho u_0 \Gamma$$



Transformaciones conformes

Una transformación $Z = Z(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice **conforme** si es **analítica** (desarrollable en Taylor), salvo en unos pocos puntos singulares.



Definimos $W(Z)$ tq. $W(Z) \equiv w(z(Z))$

Entonces

$$U^* = \frac{dW}{dZ} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dZ} \longrightarrow \frac{dW}{dZ} = \frac{dw/dz}{Z'(z)}$$

$$\frac{dz}{dZ} = \frac{1}{Z'(z)}$$

Es decir que:

$$U_x - iU_y = \frac{u_x - iu_y}{Z'(z)}$$

Teorema de Riemann

Todo contorno cerrado y derivable en el plano $Z = X + iY$ puede mapearse en una circunferencia en $z = x + iy$ a través de alguna transf. conforme $z(Z)$.

NOTA: Las transf. conformes conservan los ángulos, para todo z_0 tq. $Z'(z_0) \neq 0$.

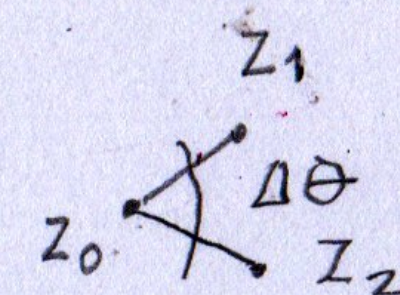
$Z(z)$ analítica:

$$Z - Z_0 \approx Z'(z_0)(z - z_0) + \dots$$

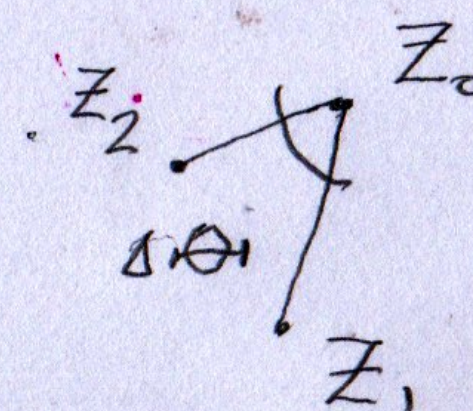
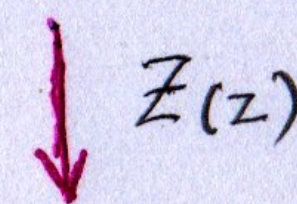
Para todo par z_1, z_2 próximo a z_0 :

$$\frac{Z_1 - Z_0}{Z_2 - Z_0} = \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \quad \text{si } Z'(z) \neq 0$$

$$e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = e^{i(\Theta_1 - \Theta_2)} \longrightarrow \Delta\Theta = \Delta\theta$$



(z)



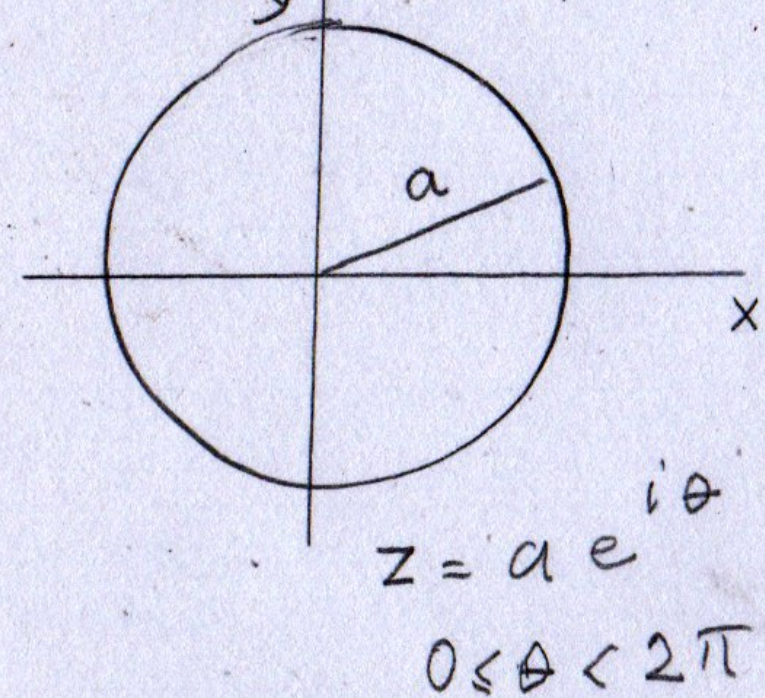
(Z)

Transformación de Zhukovsky (1910)

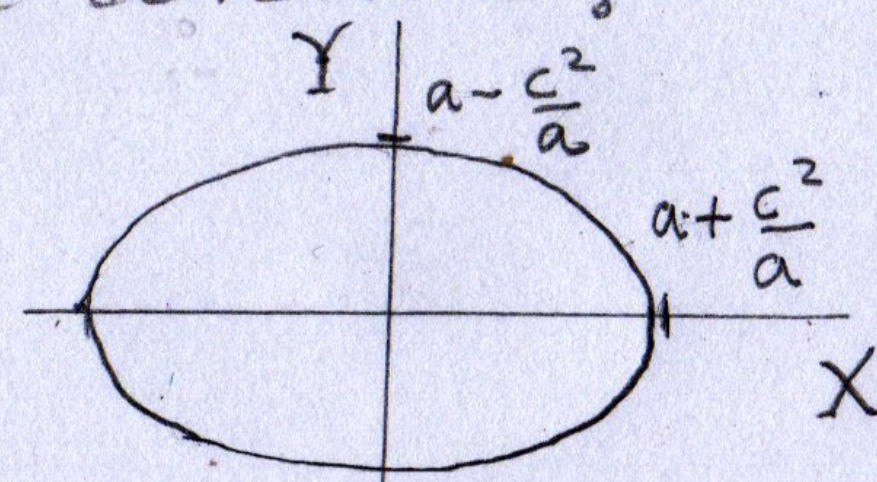
Estudiemos las transf. conformes

$$Z = z + \frac{c^2}{z} \quad c \in \mathbb{R}$$

Como se mapea una circunferencia de radio a ?



$$Z = a e^{i\theta} + \frac{c^2}{a e^{i\theta}}$$

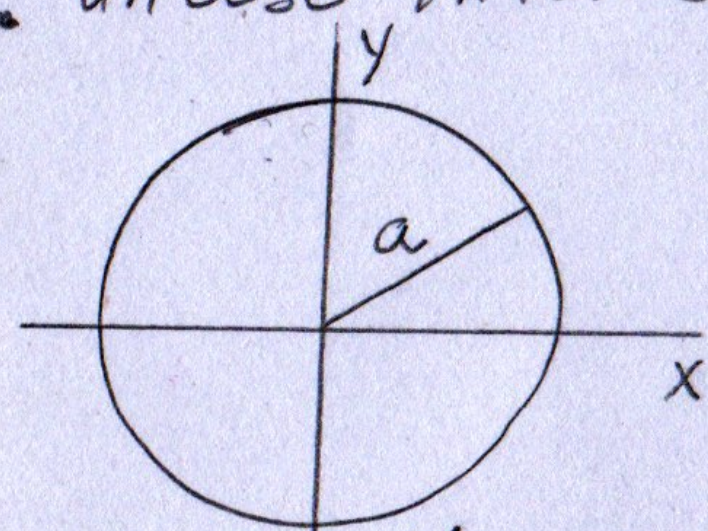


$$X = \operatorname{Re} Z = \left(a + \frac{c^2}{a}\right) \cos \theta$$

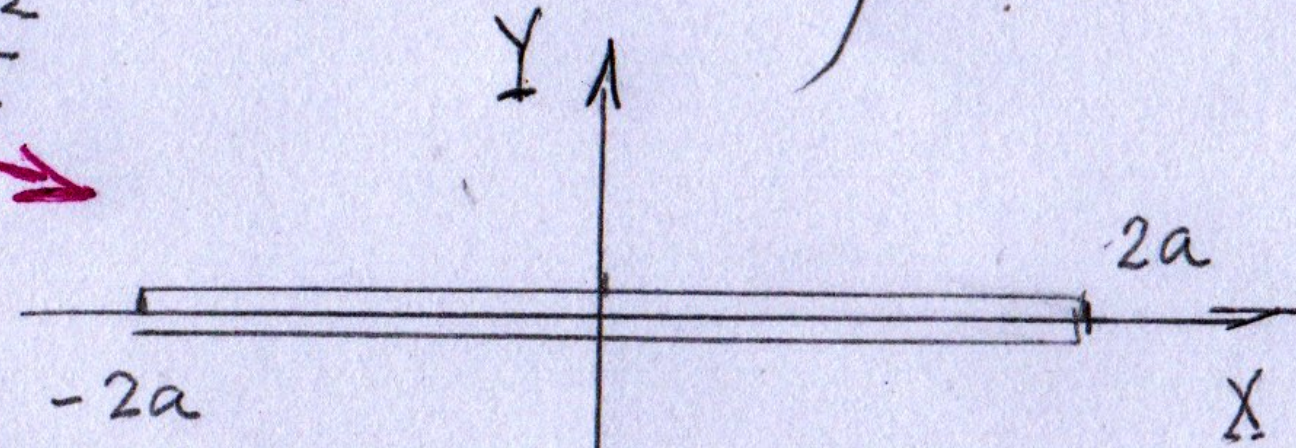
$$Y = \operatorname{Im} Z = \left(a - \frac{c^2}{a}\right) \sin \theta$$

$$\frac{X^2}{\left(a + \frac{c^2}{a}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(a - \frac{c^2}{a}\right)^2} = 1$$

- Se mapea en elipses con mayor o menor elongación, según el valor del parámetro c de la transformación.
- Un caso interesante es la transf. Zhukovsky con $c = a$.



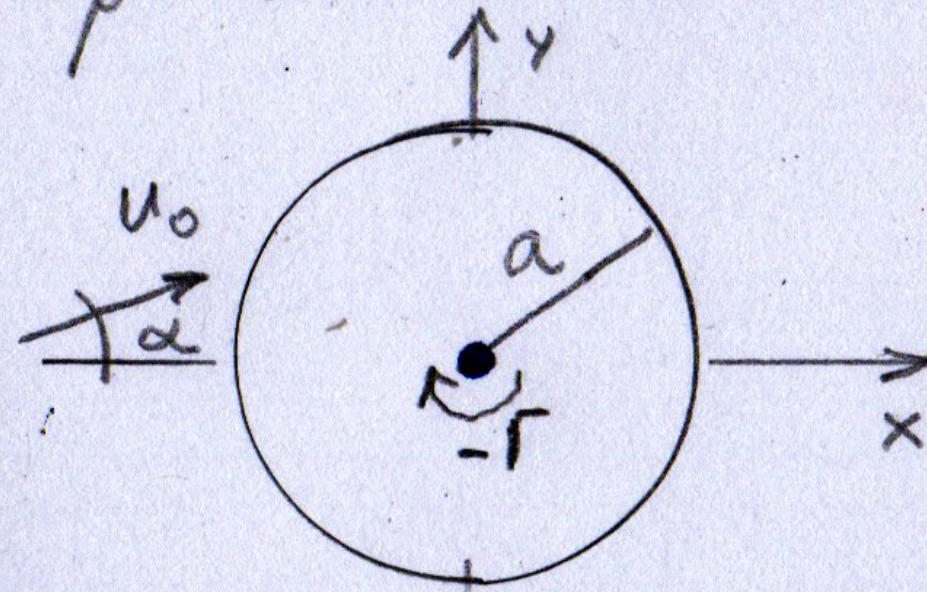
$$Z = z + \frac{a^2}{z}$$



Vamos a suponer que el nuevo contorno corresponde a un corte de un ala plana de avión.

Ejemplo: Ala plana de avión (avión de papel)

Planteamos un flujo uniforme incidendo sobre un círculo con un vórtice en el origen. Y luego aplicamos Zhukovsky con $c = a$



α : ángulo de ataque

$$w(z) = u_0 \left(z e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z} e^{i\alpha} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$$

Si transformamos Zhukovsky

con $c = a$, el campo de velocidades transformado:

$$U_x - iU_y = \frac{dW}{dZ} = \frac{dw/dz}{Z'(z)} = \frac{u_0 \left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2}{z^2} e^{i\alpha} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z}}{1 - \frac{a^2}{z^2}}$$

Si calculamos la velocidad en el contorno del ala:

$$\left. \begin{array}{l} z = a e^{i\theta} \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{array} \right\} \rightarrow U_x - iU_y = \frac{u_0 \left(e^{-i\alpha} - e^{i(\alpha-2\theta)} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$$

$$U_x - iU_y = \frac{u_0 \left(e^{i(\theta-\alpha)} - e^{i(\alpha-\theta)} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi a}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$$

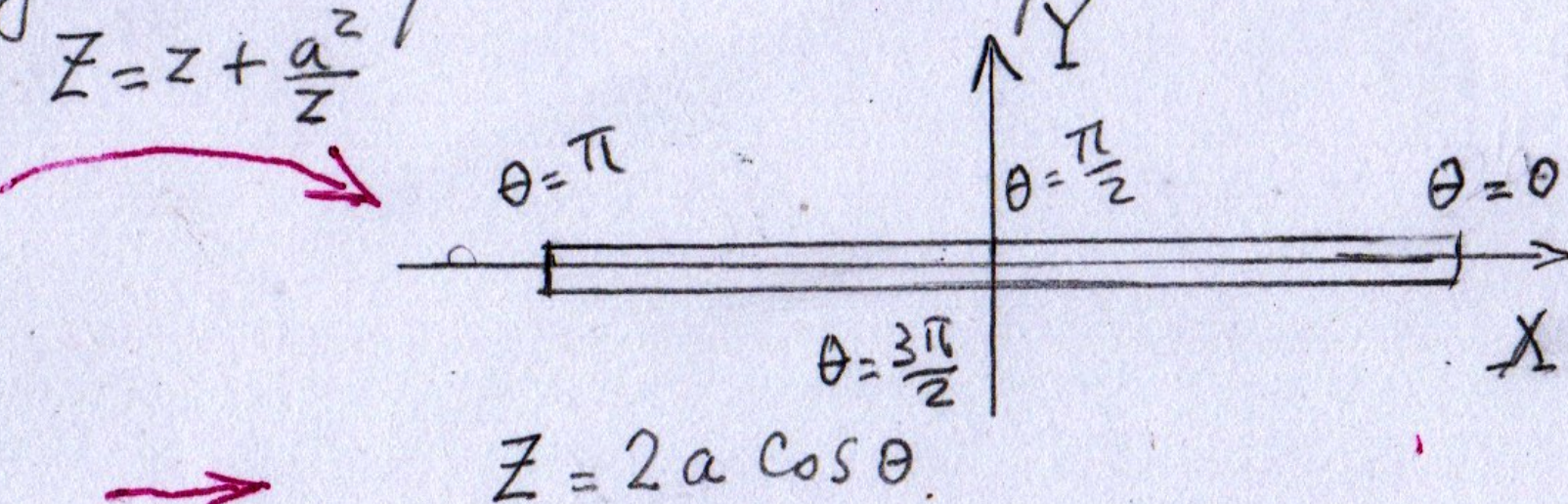
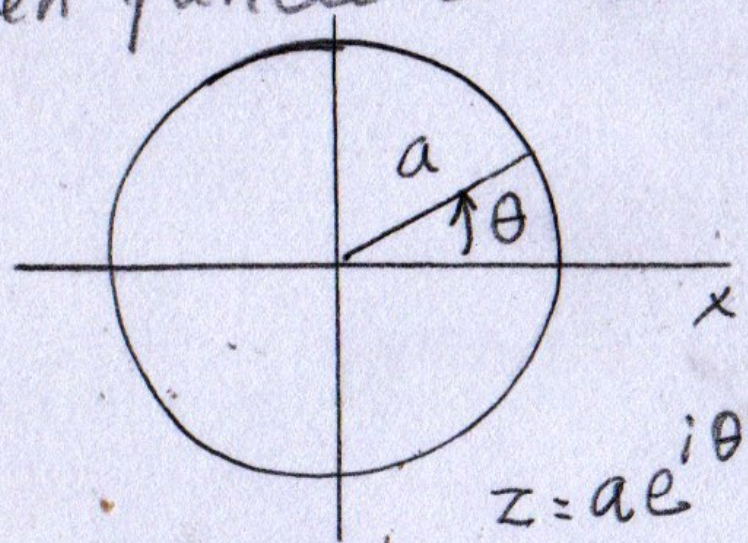
Ala plana de avión

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\rightarrow U_x - iU_y = \frac{U_0 \sin(\theta - \alpha) + \frac{\Gamma}{4\pi a}}{\sin \theta}$$

$$\gamma = \frac{\Gamma}{4\pi U_0 a} \rightarrow U_x - iU_y = U_0 \frac{\sin(\theta - \alpha) + \gamma}{\sin \theta} \rightarrow \underline{U_y = 0}$$

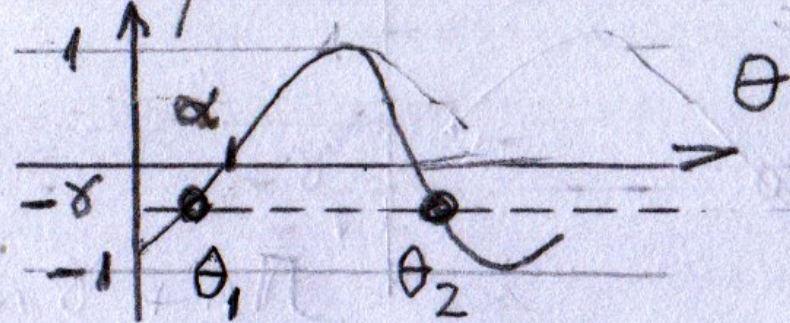
Obtenemos la velocidad en el contorno transformado, en función del ángulo de polares en el plano Z .



• Los puntos de estancamiento cumplen

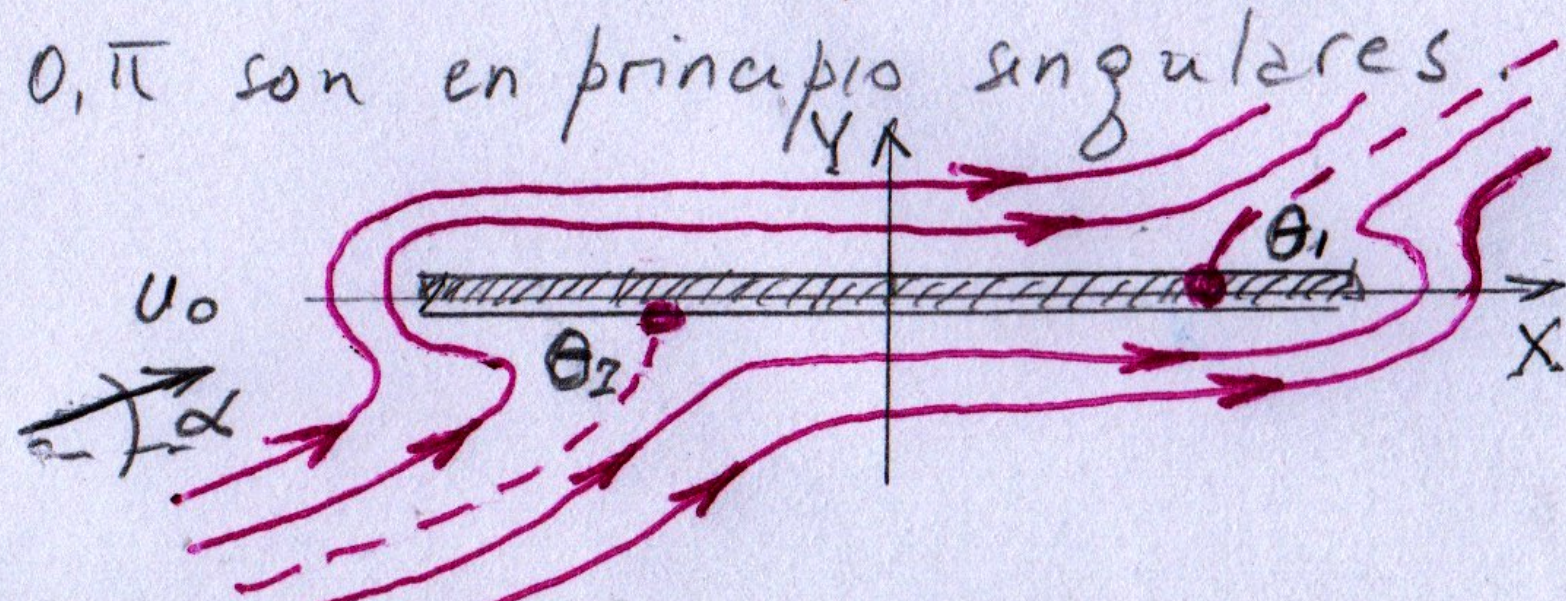
$$U_x = 0 \rightarrow \sin(\theta - \alpha) = -\gamma$$

$$\therefore \theta = \alpha - \arcsin \gamma + n\pi$$

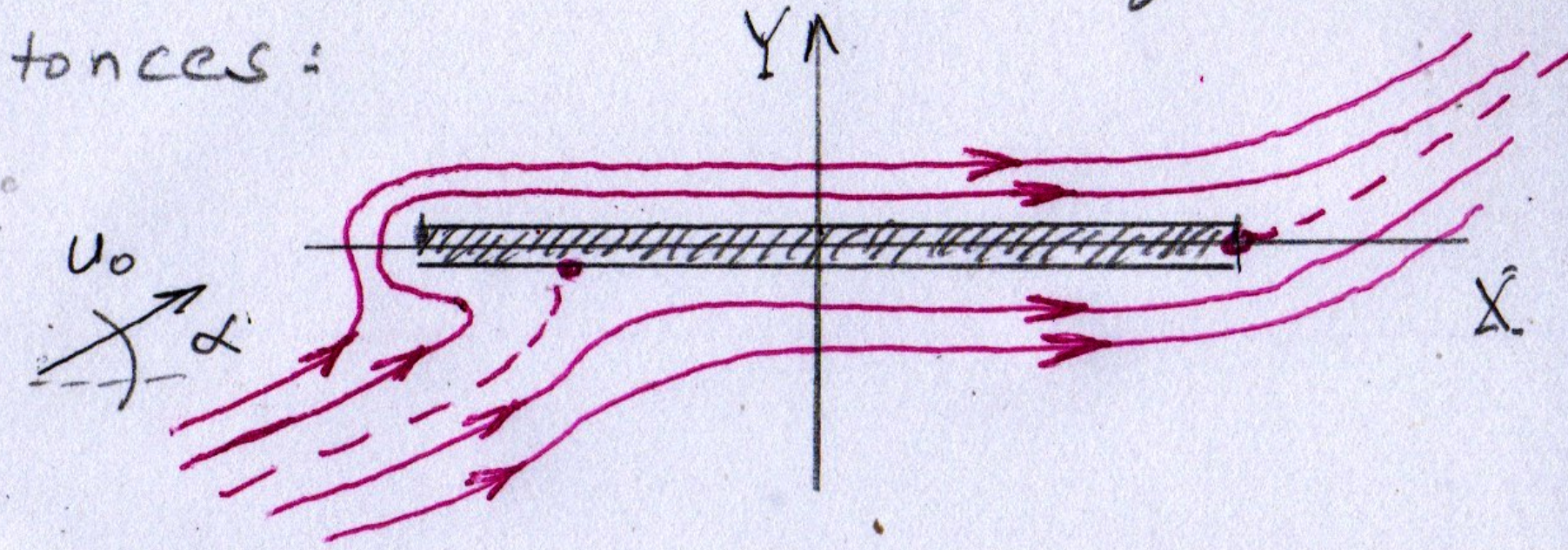


• Los puntos $\theta = 0, \pi$ son en principio singulares.

• Las líneas de corriente son



Ejercicio: Mostrar que existe un valor del ángulo de ataque α para el cual se evita la singularidad en $\theta = 0$ y entonces:



$$\gamma = \sin \alpha$$

Podemos usar Blasius para obtener la fuerza de sustentación sobre el ala plana:

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz = \frac{i\rho}{2} \oint \frac{\left(\frac{dW}{dz} \right)^2}{Z'^2} Z' dz$$

Aplicando el Teorema de los

$$\text{Residuos} \left(\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}\{f, z_k\} \right)$$

obtenemos

$$\underline{F = F_x - iF_y = \rho U_0 \Gamma e^{-i(\alpha + \frac{\pi}{2})}}$$

