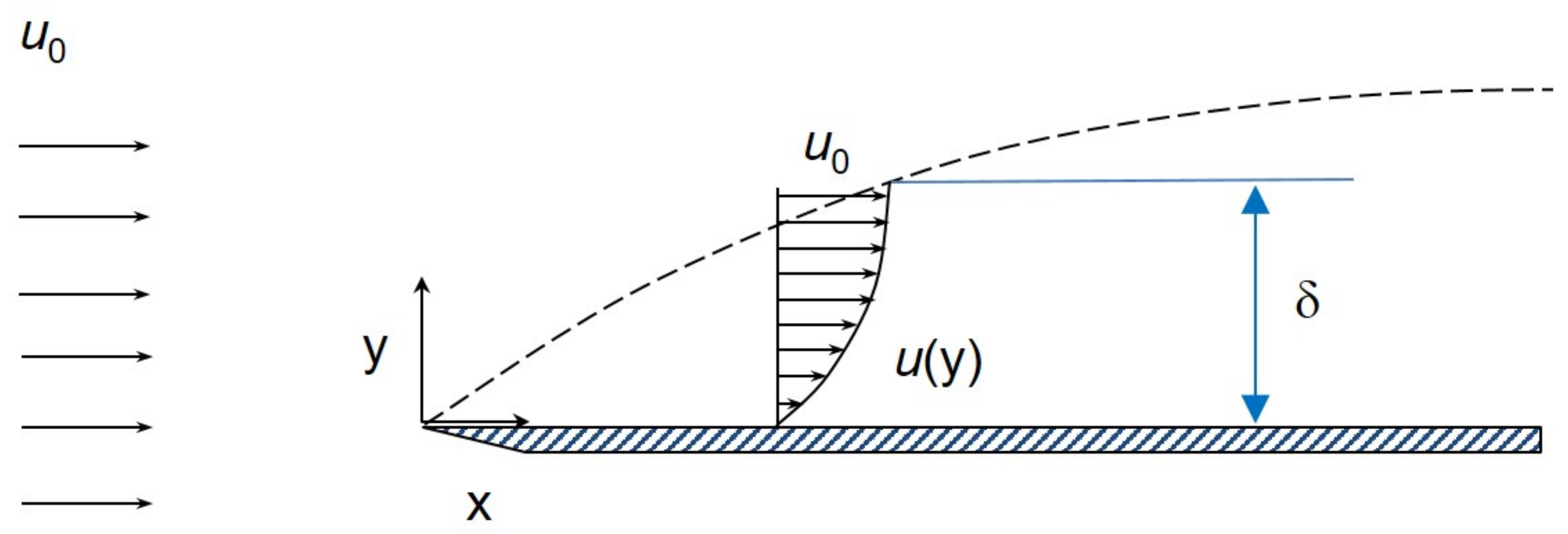
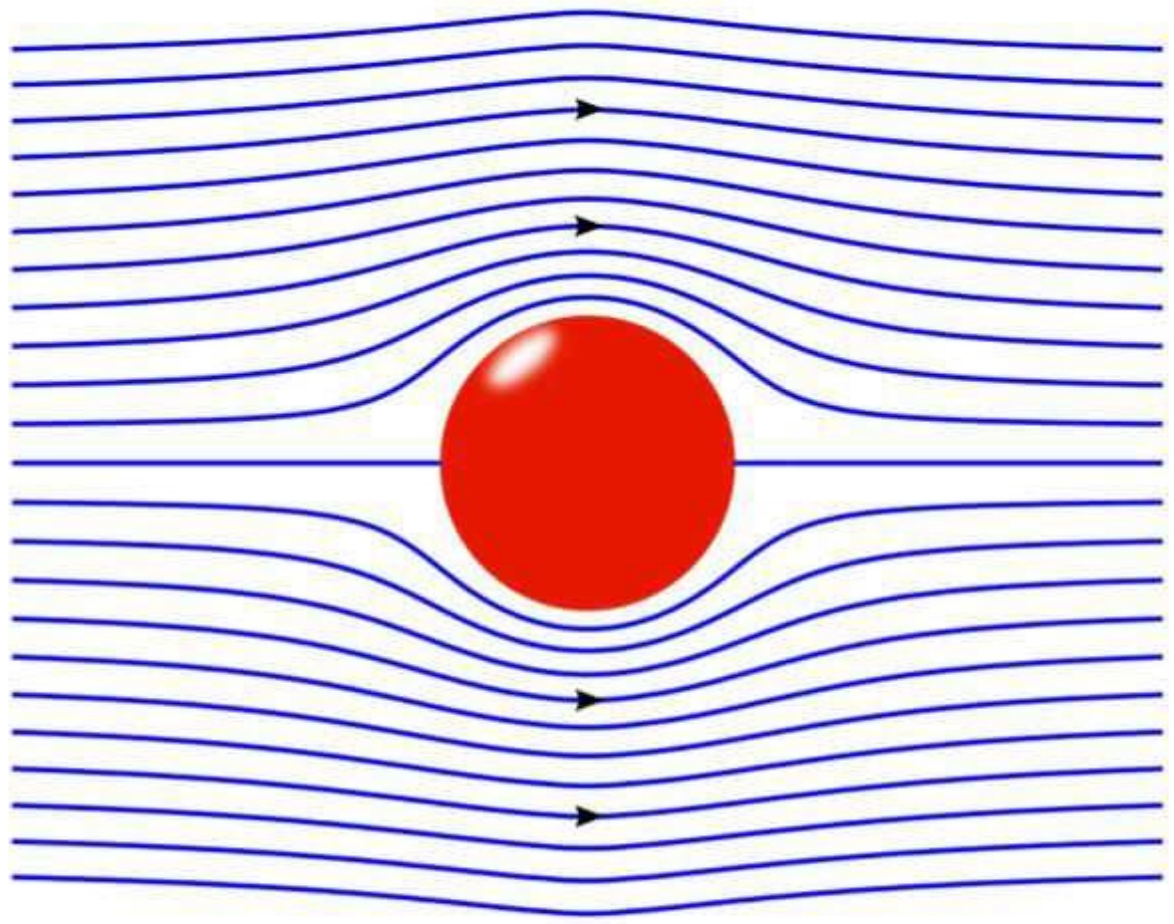
# Repaso de Clase 8

- Aplicaciones de flujos viscosos



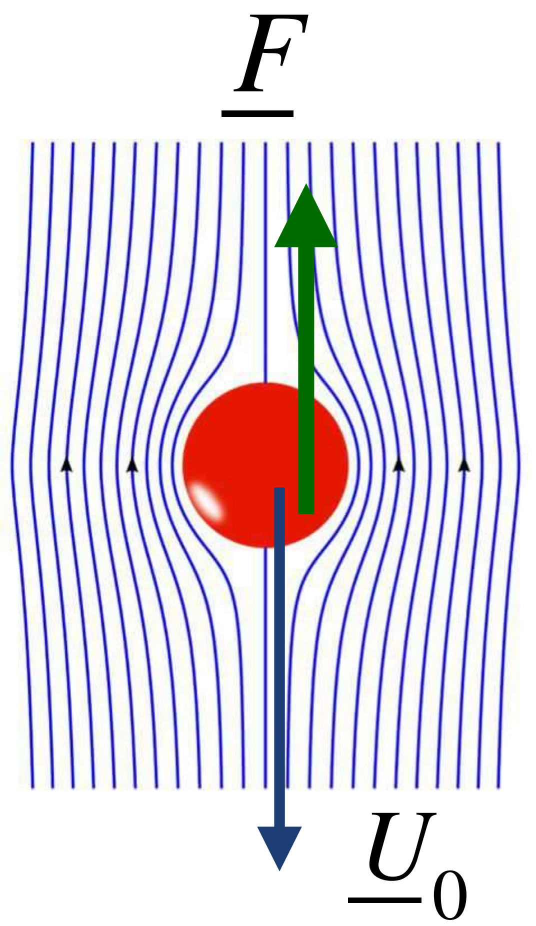

- Capa límite >>> Generación de vorticidad por fricción

- Espesor de capa límite >>> $\delta(x) = \sqrt{\dfrac{2\nu x}{U_0}}$



- Flujo viscoso sobre una esfera >>> Ley de Stokes

- Fuerza sobre la esfera >>> $\underline{F} = 6\pi\nu a \underline{U}_0$



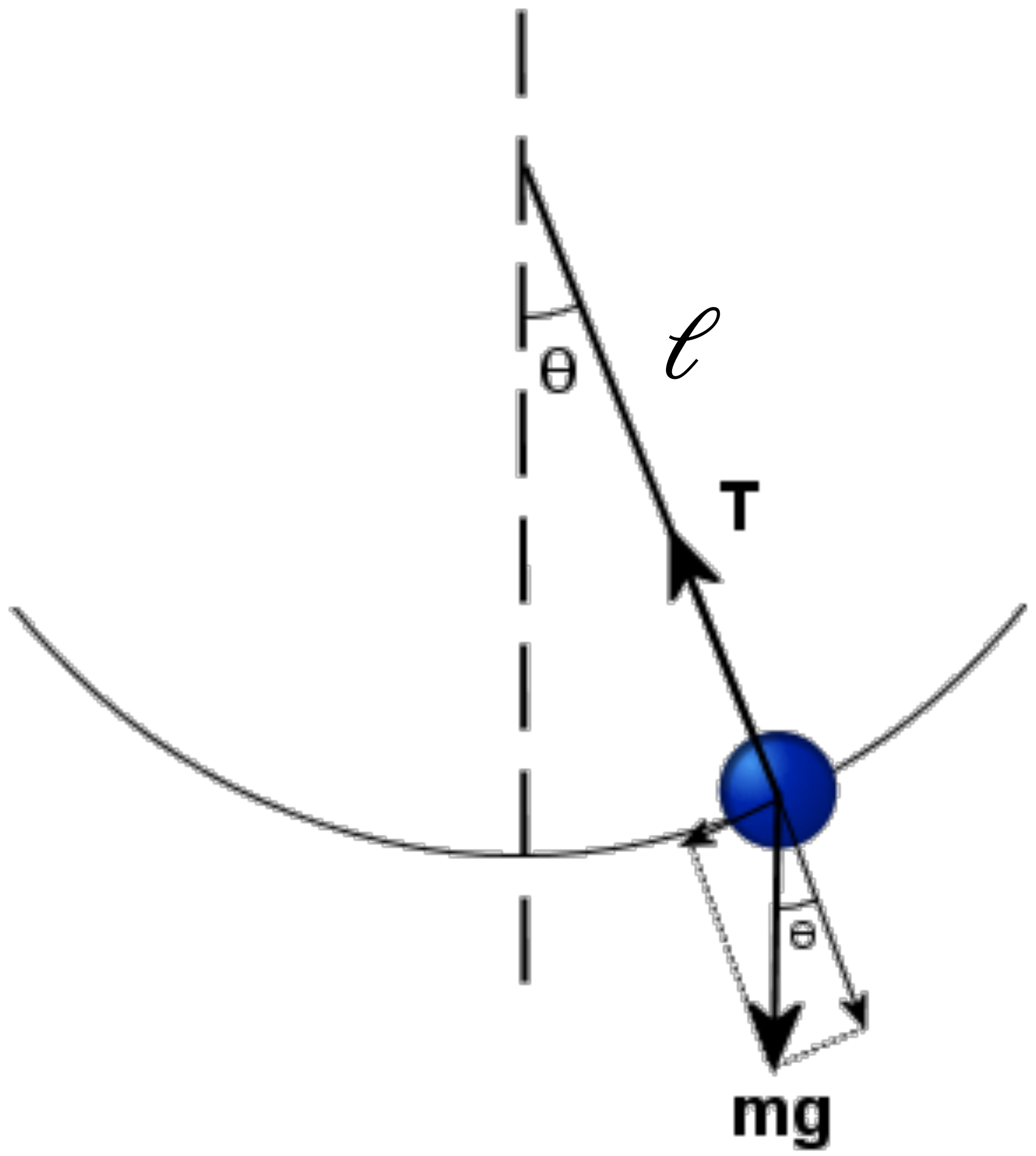

- Para una esfera que se mueve con $\underline{U}_0$ en un medio viscoso en reposo >>> $\underline{F} = -6\pi\nu a \underline{U}_0$

# Análisis dimensional

El análisis dimensional se basa en que cualquier ecuación que exprese una ley física, debe satisfacerse independientemente del sistema de unidades empleado.

Cada sistema de unidades corresponde a una diferente elección de magnitudes primarias: L, T, M, ...

Veamos un ejemplo sencillo: **Cual es el período del péndulo?**




Supongamos que el período debe depender de

$$\tau \;=\; \tau\,(m, \ell, g)$$

Aquí es clave decidir de cuales parámetros depende el período $\tau$ , sin olvidar ninguno relevante. La forma funcional en la cual $\tau$ depende de los parámetros m, $\ell$ y g , debe ser tal que el resultado tenga unidades de tiempo. Es decir:

$$\tau \;\simeq m^{\alpha}\ell^{\beta}g^{\gamma}$$

Si prestamos atención a las unidades de cada cantidad:

$$T \;=\; M^{\alpha}L^{\beta}(\frac{L}{T^2})^{\gamma}$$

Si igualamos los exponentes de M, L y T de cada lado:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta + \gamma &= 0 \\ 1 &= -2\gamma \end{aligned}$$

Es decir que: $\tau \simeq \sqrt{\ell/g}$

El resultado exacto (al resolver el problema) es: $\boxed{\tau = 2\pi\sqrt{\ell/g}}$

# Teorema Pi de Buckingham

Sea $a = f(a_1, \ldots, a_n)$ y $(a, a_1, \ldots, a_n)$ expresados en términos de $k$ $(k \leq n)$ unidades primarias.

· Entonces, es posible formar $(n+1-k)$ cantidades adimensionales $(\pi, \pi_1, \ldots, \pi_{n-k})$ tales que

$$\pi = F(\pi_1, \ldots, \pi_{n-k})$$

Dem

Sin perder generalidad, elegimos como independientes a $(a_1, \ldots, a_k)$, es decir

$$[a_1] = A_1 \quad , \ldots , \quad [a_k] = A_k$$

Por hipótesis, las restantes pueden expresarse como combinación de estas:

$$[a] = A_1^{\alpha_1} \cdots A_k^{\alpha_k} \quad \ldots \quad [a_{k+1}] = A_1^{\beta_1} \cdots A_k^{\beta_k} \quad \ldots \quad [a_n] = A_1^{\varepsilon_1} \cdots A_k^{\varepsilon_k}$$

Si ahora reescalamos las $k$ magnitudes independientes (pasamos de m a cm, por ejemplo)

$$\left.\begin{aligned} a'_1 &= b_1 a_1 \\ &\vdots \\ a'_k &= b_k a_k \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} a' &= b_1^{\alpha_1} \cdots b_k^{\alpha_k} a \\ a'_{k+1} &= b_1^{\beta_1} \cdots b_k^{\beta_k} a_{k+1} \\ &\vdots \\ a'_n &= b_1^{\varepsilon_1} \cdots b_k^{\varepsilon_k} a_n \end{aligned}$$

Desde luego: $a' = f(a'_1 \ldots a'_n)$, es decir que

$$b_1^{\alpha_1} \cdots b_k^{\alpha_k} a = f(b_1 a_1, \ldots, b_k a_k, b_1^{\beta_1} \cdots b_k^{\beta_k} a_{k+1}, \ldots, b_1^{\varepsilon_1} \cdots b_k^{\varepsilon_k} a_n)$$

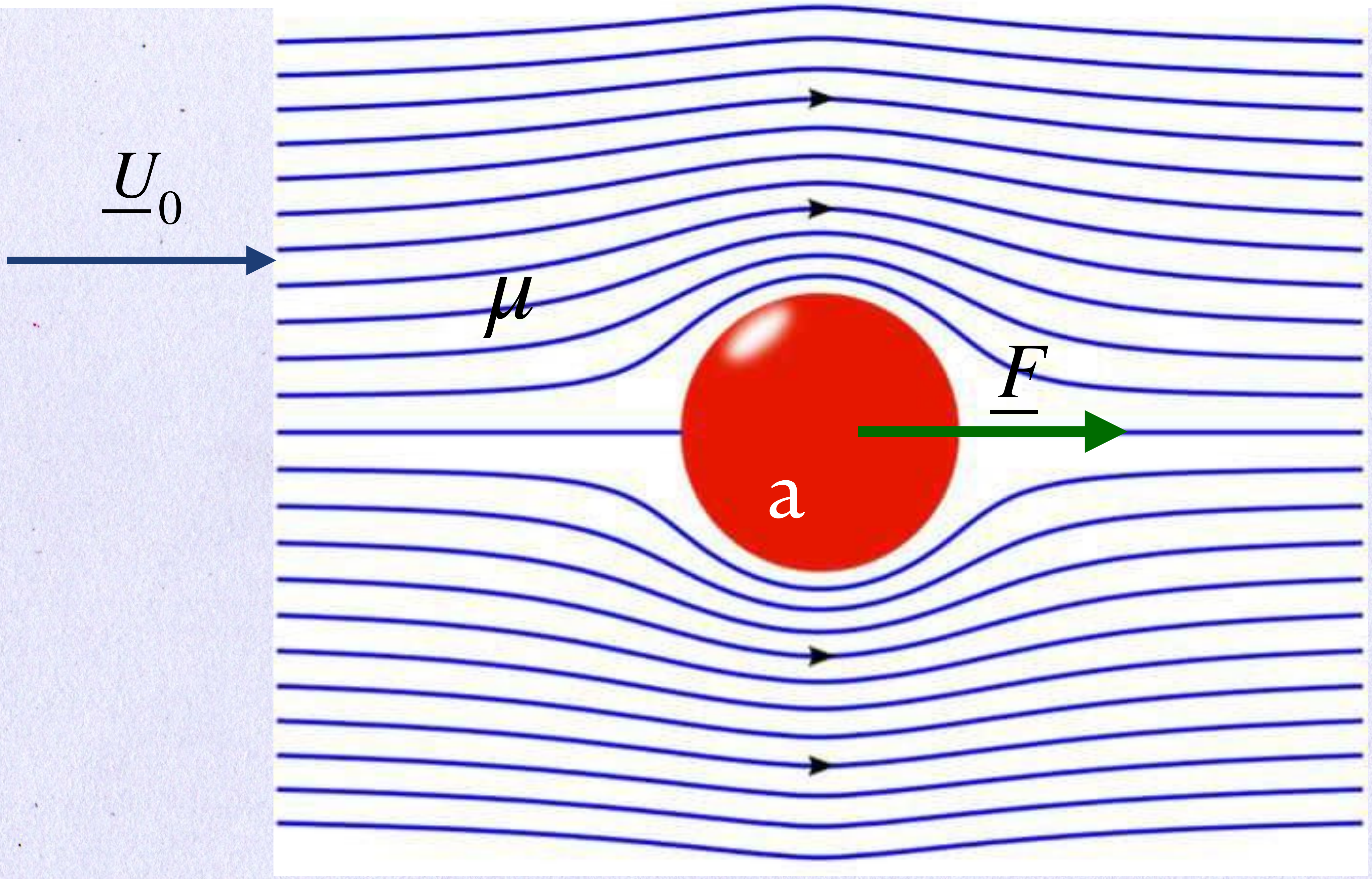
Elegimos un reescalamiento que deje a las cantidades primarias como unidades patrón:

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{a_1} \\ &\vdots \\ b_k &= \frac{1}{a_k} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \frac{a}{a_1^{\alpha_1} \cdots a_k^{\alpha_k}} = f\left(1, \ldots, 1, \frac{a_{k+1}}{a_1^{\beta_1} \cdots a_k^{\beta_k}}, \ldots, \frac{a_n}{a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_k^{\varepsilon_k}}\right)$$

Definimos: $\pi = \dfrac{a}{a_1^{\alpha_1} \cdots a_k^{\alpha_k}} \quad \ldots \quad \pi_1 = \dfrac{a_{k+1}}{a_1^{\beta_1} \cdots a_k^{\beta_k}} \quad \ldots \quad \pi_{n-k} = \dfrac{a_n}{a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_k^{\varepsilon_k}}$

y $F(\underbrace{* \ldots *}_{n-k}) = f(\underbrace{1 \ldots 1}_{k}, \underbrace{* \ldots *}_{n-k}) \longrightarrow \pi = F(\pi_1, \ldots, \pi_{n-k})$

# Ejemplo 1: Ley de Stokes




Cuánto vale F?

Supongamos que $F = F(\mu, \bar{a}, U_0)$

- El teorema $\pi$ no me dice de que parámetros depende la incógnita.
- Me dice cuantos numeros Pi, pero no dice cuales son.

En este caso:

$$\left.\begin{array}{l} n = 3 \\ k = 3 \ (M, L, T) \end{array}\right\} \rightarrow n - k + 1 = 1 \rightarrow \Pi = cte$$

$$\left.\begin{array}{l} [\mu] = \frac{M}{LT} \\ [a] = L \\ [U_0] = \frac{L}{T} \\ [F] = \frac{ML}{T^2} \end{array}\right\} \rightarrow F \simeq \mu^\alpha a^\beta U_0^\gamma$$

$$\therefore \frac{ML}{T^2} = \left(\frac{M}{LT}\right)^\alpha L^\beta \left(\frac{L}{T}\right)^\gamma$$

$$\left.\begin{array}{ll} (M) & 1 = \alpha \\ (L) & 1 = -\alpha + \beta + \gamma \\ (T) & 2 = \alpha + \gamma \end{array}\right\} \xrightarrow[\substack{\alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1}]{} \boxed{F \simeq \mu a U_0}$$

- La clase pasada obtuvimos la expresión exacta:

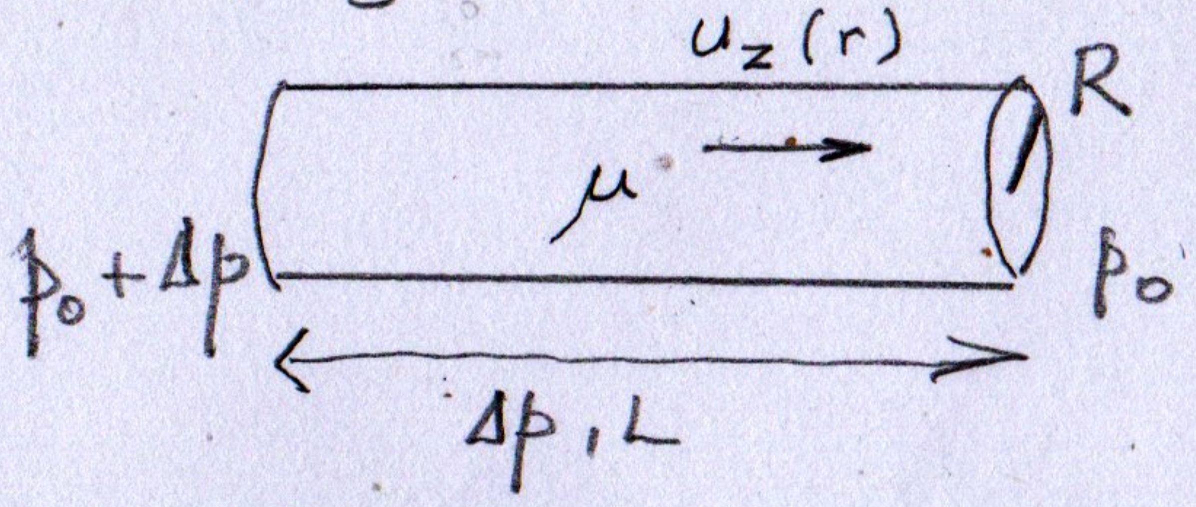
$$\boxed{\underline{F} = 6\pi \mu a \underline{U}_0.}$$

- Noten que si en vez de una esfera fuera una piedra de tamaño lineal $a$, solo cambiará el factor adimensional $6\pi$ segun sea la forma de la piedra.

# Ejemplo 2: Flujo de Poiseuille

Un flujo viscoso a través de un cilindro es un problema muy relevante (acueducto, oleoducto, flujo sanguíneo, etc), conocido como flujo de Poiseuille.

En el caso incompresible, estacionario y a bajo Reynolds ($Re \ll 1$) es




$$\rho\,[\underbrace{\partial_t \underline{u}}_{=0} + \underbrace{(\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u}}_{=0}] = -\underline{\nabla} p + \mu \nabla^2 \underline{u}$$

Noten que no depende de $\rho$.

Cuanto vale el caudal volumétrico $Q$ ?

$$Q = Q\left(\frac{\Delta p}{L}, R, \mu\right)$$

$[Q] = \frac{L^3}{T}$

$\left[\frac{\Delta p}{L}\right] = \frac{M}{L^2 T^2}$

$\left.\begin{matrix} n=3 \\ k=3 \end{matrix}\right\} \to n-k+1 = 1$

$$Q = \left(\frac{\Delta p}{L}\right)^{\alpha} R^{\beta} \mu^{\gamma}$$

$$\therefore \quad \frac{L^3}{T} = \left(\frac{M}{L^2T^2}\right)^{\alpha} L^{\beta} \left(\frac{M}{LT}\right)^{\gamma}$$

$$\left.\begin{matrix} (M) & \alpha+\gamma=0 \\ (L) & 3 = -2\alpha+\beta-\gamma \\ (T) & 1 = 2\alpha+\gamma \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\substack{\alpha=1 \\ \beta=4 \\ \gamma=-1}]{} Q \simeq \frac{\Delta p}{\mu L} R^4$$

El caudal es proporcional al salto de presión $\frac{\Delta p}{L}$, inversamente prop. a $\mu$ y depende fuertemente del radio del tubo (como $R^4$).

Cuanto vale la velocidad $u_z(r)$ ?

$$u_z = u_z\left(r, R, \frac{\Delta p}{\mu L}\right) \qquad \left[\frac{\Delta p}{\mu L}\right] = \frac{1}{LT}$$

Ahora: $\left.\begin{matrix} n=3 \\ k=2 \end{matrix}\right\} \to n-k+1 = 2 \to \Pi = F(\Pi_1)$

$$u_z \simeq \frac{\Delta p}{\mu L} R^2 F\left(\frac{r}{R}\right)$$

La condición de contorno debe ser $u_z(r=R)=0$

Si planteamos en cilíndricas:

$$\boxed{u_z(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L}(R^2 - r^2)}$$