

Clase 1 - Repaso

- Estados de la materia >>> **Fluidos**: gases / líquidos / plasmas
- Aplicaciones a Ingeniería, Astrofísica, Biología, Geología, Oceanografía, Meteorología, ...
- Modelo de **medio continuo** >>> Determinación de **elemento de fluido** (E.F.)
- Ecuación de movimiento de un E.F. genérico: fuerzas de corto y largo alcance
- Fuerzas de corto alcance >>> Tensor de esfuerzos >>> Simetría del tensor
- Modelo de fluido ideal >>> Presión de un fluido
- Hidrostática >>> Ejemplos

Hidrostatica

En situaciones en las cuales el fluido puede considerarse en reposo:

$$\underline{u}(\underline{r}, t) = 0, \forall \underline{r}, t \rightarrow \underline{a}(\underline{r}, t) = 0$$

Entonces:

$$0 = \underline{f} - \frac{1}{\rho} \underline{\nabla} p \quad \text{Ecuación de equilibrio hidrostático}$$

Veamos dos ejemplos sencillos.

Ejemplo 1: Pileta con agua

El agua se encuentra en reposo.

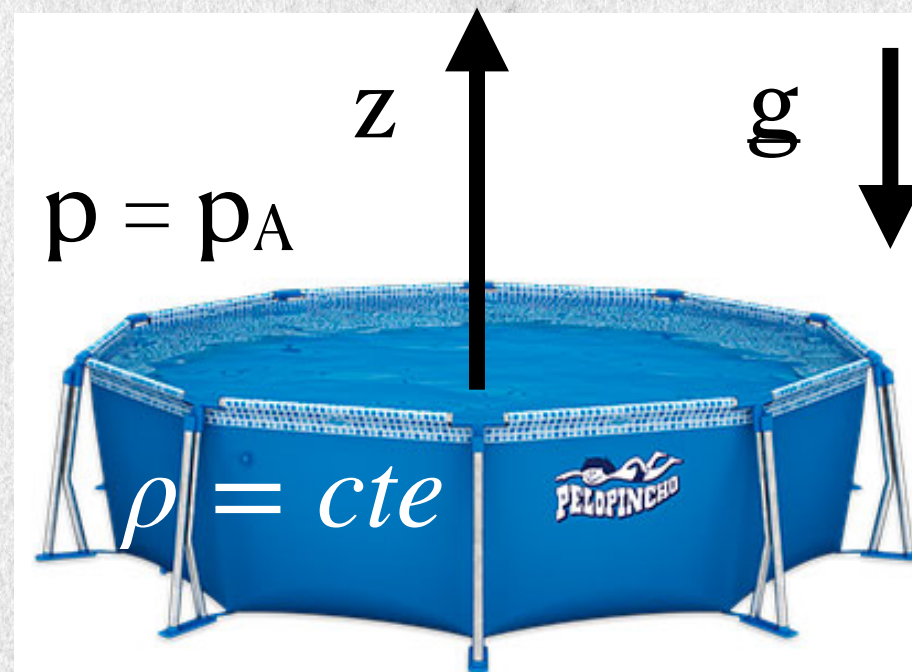
$$p = \text{cte} (\forall \text{ líquido})$$

$$\underline{f} = -g \hat{z}$$

$$g \hat{z} = -\frac{1}{\rho} \underline{\nabla} p \rightarrow \underline{\nabla}_{\perp} p = 0$$

$$g = -\frac{1}{\rho} \partial_z p \rightarrow p = \text{cte} - \rho g z$$

$$p(z=0) = p_A \rightarrow p = p_A - \rho g z$$



Ejemplo 2: Atmósfera isotérmica

- El aire sobre la pileta es otro fluido, también en reposo.

- Suponemos un gas ideal (y también un fluido ideal) e isotérmico, de modo que

$$p = \frac{\rho k_B T_0}{m_M}$$

m_M : masa molecular media

$$k_B = 1.38 \times 10^{-16} \frac{\text{erg}}{\text{K}}; \text{ Boltzmann}$$

$$T_0 = \text{cte}$$

- La presión del aire cerca del piso es la llamada presión atmosférica

$$p_A = 1013 \text{ hPa} \quad p_A = \frac{N}{m^2}$$

$$-g = \frac{1}{\rho} \partial_z p = \frac{k_B T_0}{m_M} \frac{\partial_z \rho}{\rho}$$

$$\therefore p(z) = p_A e^{-z/H} \quad H = \frac{k_B T_0}{m_M g}$$

$$p(z) = p_A e^{-z/H} \quad \text{escala de alturas}$$

Variables hidrodinámicas

Para describir cuantitativamente el estado de un fluido, que es un objeto extendido espacialmente, definimos varios campos escalares, vectoriales y tensoriales:

- densidad de masa

$$\rho(\underline{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Noten que $\rho = nm_M$

- densidad de partículas

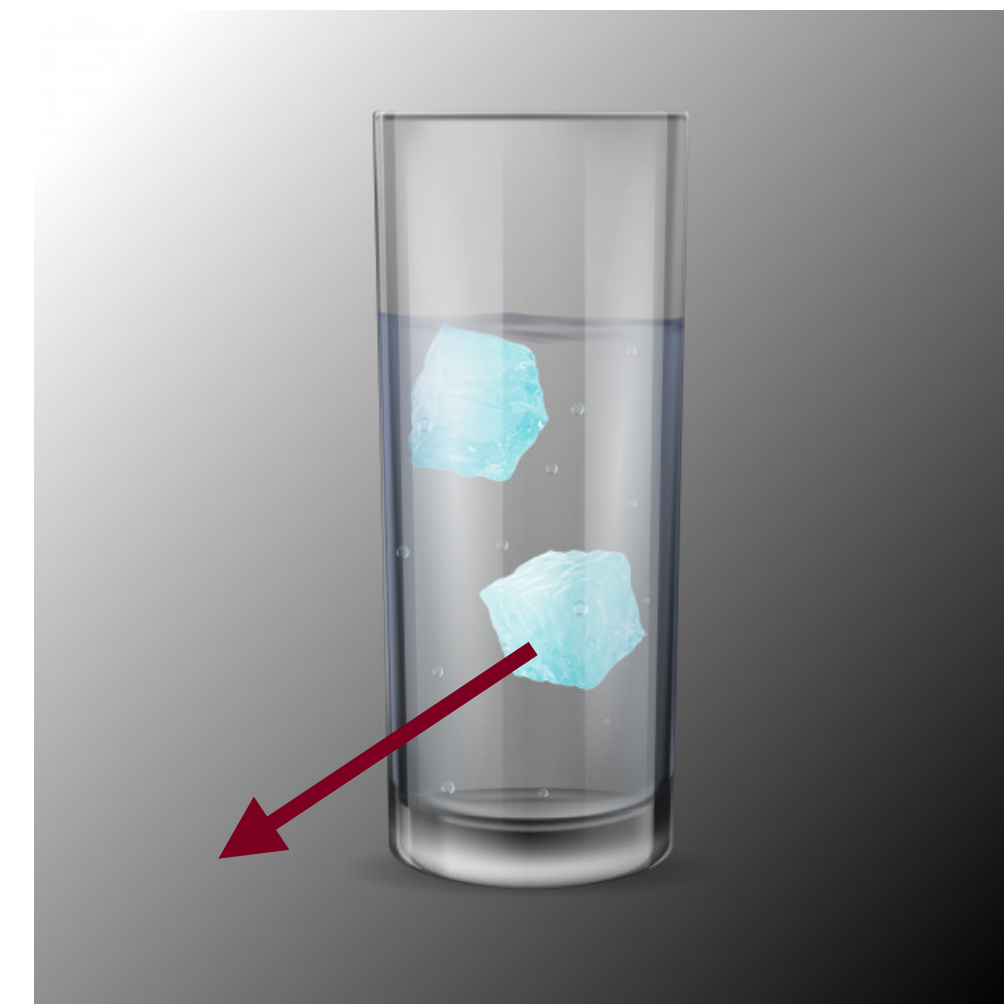
$$n(\underline{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta V}$$

- presión

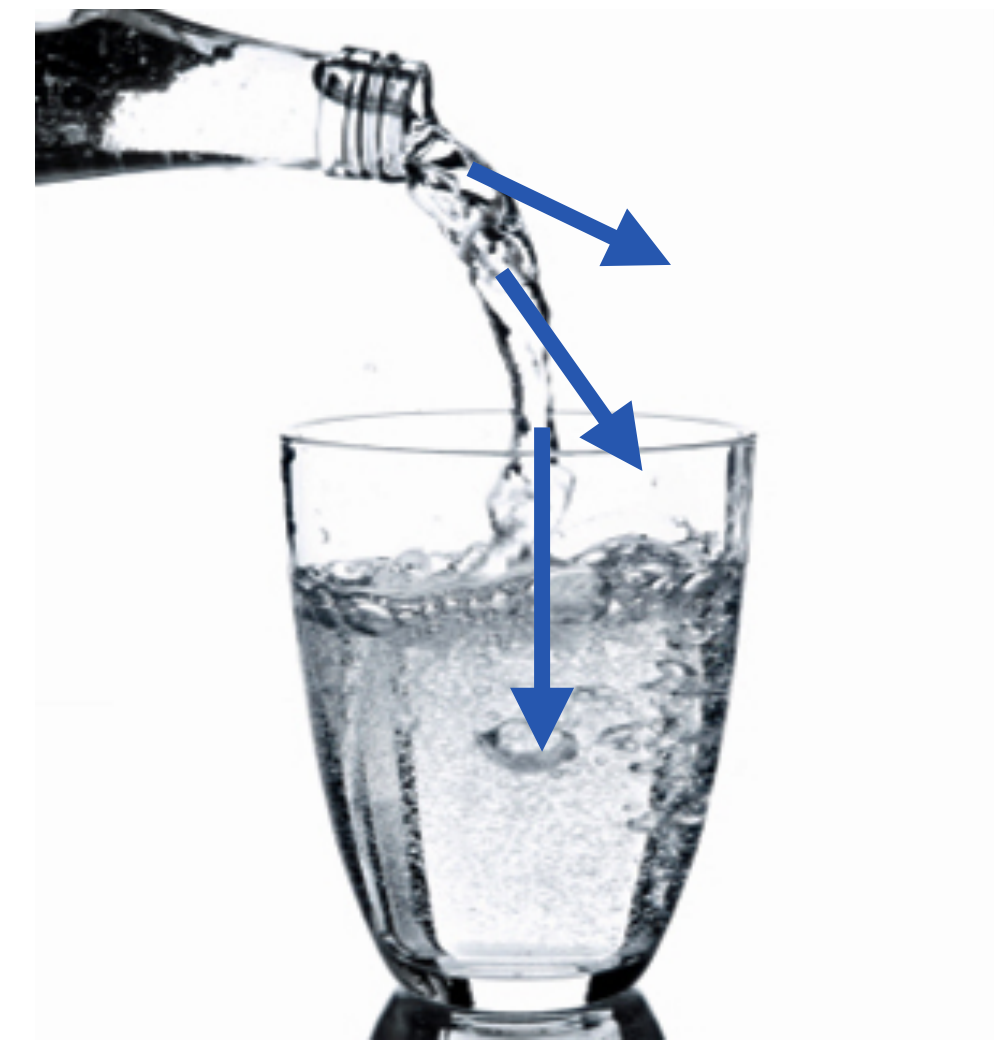
$$p(\underline{r}, t)$$

- campo de velocidades

$$\underline{u}(\underline{r}, t)$$



$$d\underline{F} = - p \cdot d\underline{S}$$



$$\underline{u}(\underline{r}, t)$$

Campo de velocidades local

- Para explorar $\underline{u}(\underline{r})$ en el entorno de un punto $\underline{r}_0$, desarrollamos Taylor:

$$u_i(\underline{r}_0 + \delta \underline{r}) \approx u_i(\underline{r}_0) + \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial r_k}}_{\delta u_i} \delta r_k$$

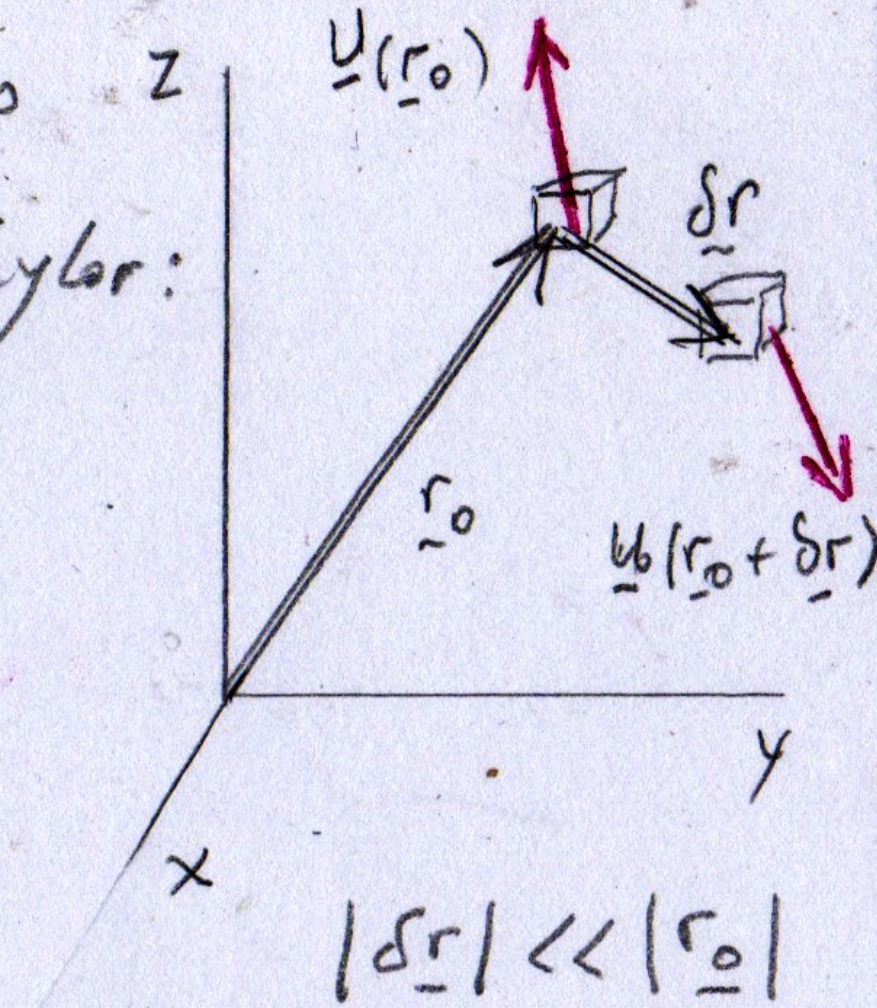
- Descomponemos el tensor $\frac{\partial u_i}{\partial r_k}$ en su parte simétrica y anti-simétrica:

$$\frac{\partial u_i}{\partial r_k} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_k} + \frac{\partial u_k}{\partial r_i} \right)}_S + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_k} - \frac{\partial u_k}{\partial r_i} \right)}_A \rightarrow \delta \underline{u} = \delta \underline{u}^S + \delta \underline{u}^A$$

Ejercicio: Mostrar que $\frac{\partial u_i}{\partial r_k} - \frac{\partial u_k}{\partial r_i} = \epsilon_{ilk} \omega_l$, donde $\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u}$ (vorticidad)

En cuanto a la parte "S" definimos:

$$e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_k} + \frac{\partial u_k}{\partial r_i} \right) : \text{tensor de velocidad de deformación}$$



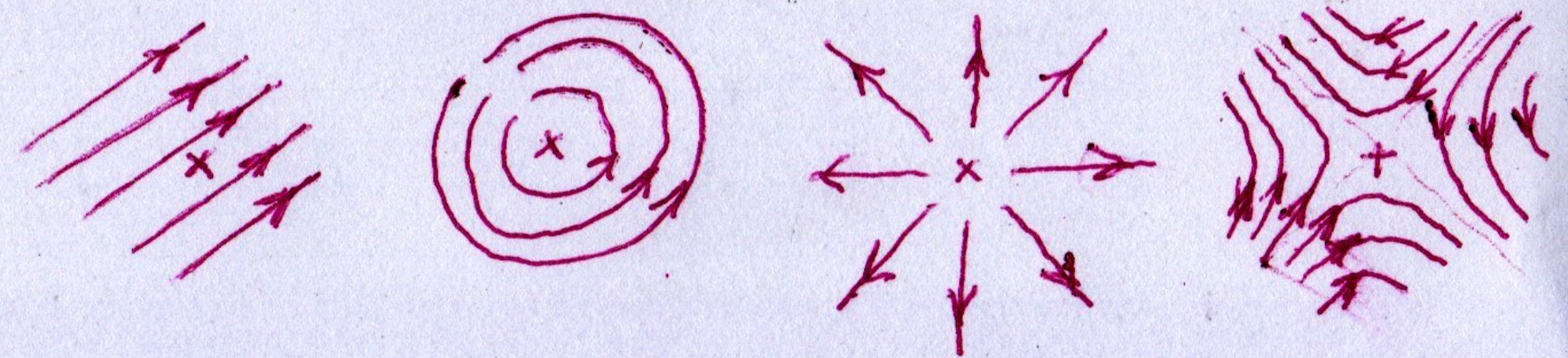
Descomponemos el tensor $\underline{e}$ a su vez en:

$$\underline{e} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{e}) \mathbb{I} + \underbrace{\left(\underline{e} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{e}) \mathbb{I} \right)}_{\underline{e}' \text{ (traza nula)}}$$

Noten que $\text{Tr}(\underline{e}) = \frac{\partial u_i}{\partial r_i} = \nabla \cdot \underline{u}$

En síntesis, entonces:

$$\underline{u}(\underline{r}_0 + \delta \underline{r}) = \underline{u}(\underline{r}_0) + \frac{1}{2} \underline{\omega}_0 \times \delta \underline{r} + \frac{(\nabla \cdot \underline{u})_0}{3} \delta \underline{r} + \underline{e}'_0 \cdot \delta \underline{r}$$



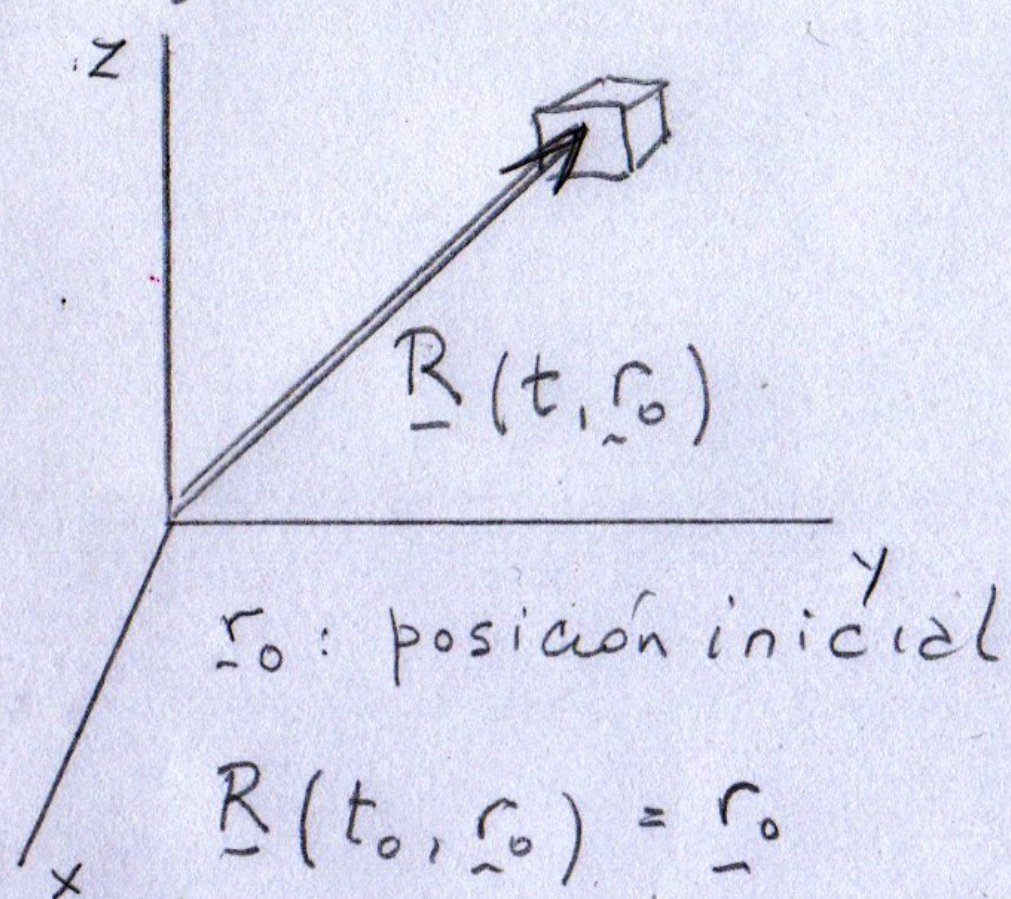
Estos son todos los movimientos posibles en el entorno de cualquier punto para cualquier medio continuo.

NOTA: Lo anterior es cierto $\forall \underline{r}_0$ en el cual $\underline{u}(\underline{r})$ es derivable.

Descripciones lagrangiana y euleriana

La llamada descripción **lagrangiana** es la adoptada en cinemática de partículas, que consiste en "seguir" a los E.F. Nosotros, en cambio, utilizaremos la descripción euleriana, que trata a los E.F. como indistinguibles y busca calcular el estado del fluido en cada $(\underline{r}, t)$.

Lagrangiana



Variable indep.: t

$\underline{R}(t, \underline{r}_0)$: posición en t del E.F. que estaba en $\underline{r}_0$ a t_0 .

$\underline{U}(t, \underline{r}_0) = \frac{\partial \underline{R}}{\partial t}$: velocidad en t del E.F. " $\underline{r}_0$ "

$\underline{A}(t, \underline{r}_0) = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \underline{R}}{\partial t^2}$: aceleración en t del E.F. " $\underline{r}_0$ "

Esta descripción preserva la identidad de los E.F., que son infinitos (en rigor, tenemos del orden de $(L/\ell)^3$ E.F.).

Euleriana

Los E.F. son indistinguibles.

$\underline{u}(\underline{r}, t)$: vel. del E.F. en $(\underline{r}, t)$, pero $\underline{u} \neq \frac{d\underline{r}}{dt}$

Variables indep.: $\underline{r}, t$

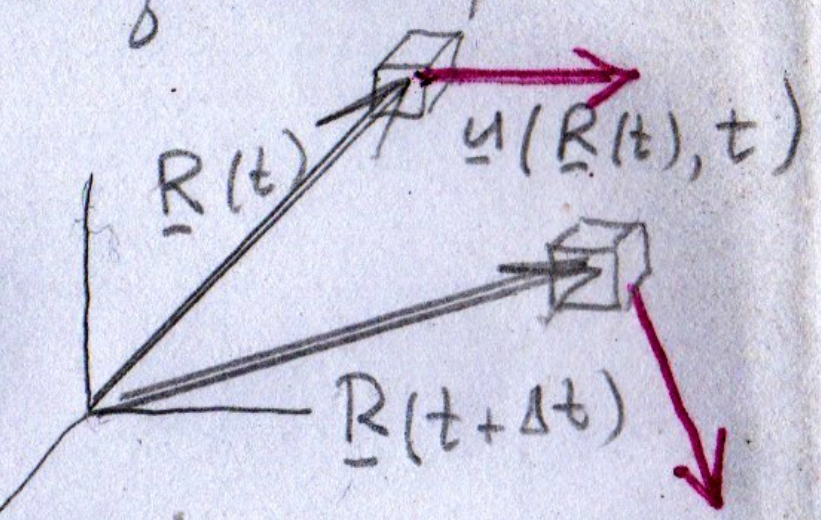
Recurrirnos a la descripción lagrangiana para medir $\underline{u}$ y $\underline{a}$.

$\underline{r} \equiv \underline{R}(t)$

$$\underline{u}(\underline{r}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{R}(t+\Delta t) - \underline{R}(t)}{\Delta t} = \frac{\partial \underline{R}}{\partial t}$$

y también

$$\underline{a}(\underline{r}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{u}(\underline{R}(t+\Delta t), t+\Delta t) - \underline{u}(\underline{R}(t), t)}{\Delta t}$$



Entonces: $\underline{a} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}$

Utilizamos la sig. notación

$$\underline{a} = \frac{d\underline{u}}{dt} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}$$

Para cualquier campo $f(\underline{r}, t)$ también

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla f$$

derivada total (en referencial E.F.)
 derivada local (en ref. fijo)
 derivada convectiva

Lineas de corriente y trayectorias

Tenemos al menos dos tipos de lineas para ayudar a visualizar campos de velocidades: **lineas de corriente** y **trayectorias**.

Lineas de corriente son curvas tangentes a $\underline{u}(\underline{r})$ en todo punto (al igual que $\underline{E}(\underline{r})$ ó $\underline{B}(\underline{r})$ en F3).

Se calculan a $t = \text{cte}$.

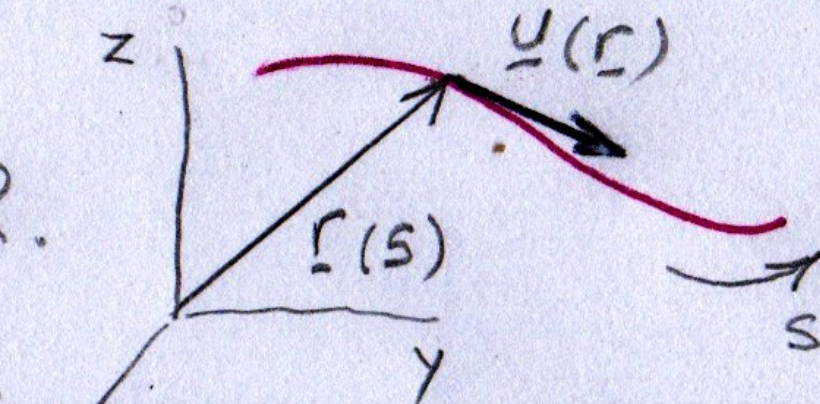
Sea $\underline{r}(s)$ una curva en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por la variable $s \in \mathbb{R}$.

Los vectores $\frac{d\underline{r}}{ds}$ serán tangentes a la curva. La curva $\underline{r}(s)$ tangente en todo punto al campo $\underline{u}(\underline{r})$ deberá satisfacer:

$$\frac{d\underline{r}}{ds} \parallel \underline{u}(\underline{r}) \implies \frac{d\underline{r}}{ds} = K \underline{u}(\underline{r}, t_0)$$

La incógnita $\underline{r}(s)$ se obtiene de

$$K = \frac{dx/ds}{u_x} = \frac{dy/ds}{u_y} = \frac{dz/ds}{u_z}$$



$$\text{En 2D} \quad \frac{dx}{u_x(x,y)} = \frac{dy}{u_y(x,y)} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{u_y(x,y)}{u_x(x,y)} \rightarrow y = y(x)$$

Un manajo de líneas de corriente es un tubo de flujo

Las líneas de corriente son en general distintas de las trayectorias de los E.F., que se calculan como:

$$\frac{d\underline{R}(t)}{dt} = \underline{u}(\underline{R}(t), t)$$

Líneas de corrientes y trayectorias solo coinciden en flujos estacionarios, es decir, si $\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = 0$.

