

# Estructura de la Materia 1

(Primer Cuatrimestre 2023 - Daniel Gómez)

## Guía 0: Vectores y tensores

1. La delta de Krönecker es un tensor isótropo de segundo orden cuyas componentes están dadas por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

con  $1 \leq i, j \leq 3$ . La densidad tensorial de Levi-Civita es un pseudotensor de tercer orden con componentes

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j, k\} \text{ son una permutación par de la terna } \{1, 2, 3\} \\ -1 & \text{si } \{i, j, k\} \text{ son una permutación impar de la terna } \{1, 2, 3\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Verifique que ambas densidades tensoriales son isótropas; es decir, que sus componentes son las mismas en cualquier sistema de coordenadas.

(b) Visualice gráficamente la densidad tensorial  $\varepsilon_{ijk}$ . ¿Cuántos elementos tiene?

(c) Compruebe la identidad:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$$

(d) Verifique las siguientes identidades:

i.  $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{irs} = \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}$

ii.  $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$

iii.  $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$

iv.  $\delta_{mn}\delta_{mn} = 3$

(e) Si  $\{\hat{e}_i, i = 1, 2, 3\}$  es una terna de versores ortogonales, verifique que:

i.  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \varepsilon_{ijk}A_jB_k\hat{e}_i$

ii.  $\nabla \times \mathbf{C} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial C_k}{\partial x_j}\hat{e}_i$

2. Demuestre que todo tensor de segundo orden  $\sigma_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) se puede descomponer como

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij} + s_{ij} + a_{ij}$$

donde  $\lambda$  es un escalar,  $s_{ij}$  es un tensor simétrico de traza nula, y  $a_{ij}$  es un tensor antisimétrico.

3. Sean  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  y  $\mathbf{s}$  cuatro vectores, y  $\psi$  y  $\phi$  dos funciones escalares. Utilizando notación indicial, verifique las siguientes identidades:

(a)  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

(b)  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

(c)  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{s}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{s})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$

(d)  $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ , donde  $\mathbf{r} = (x, y, z)$

(e)  $\nabla \times \mathbf{r} = 0$

- (f)  $\nabla \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ , donde  $r = |\mathbf{r}|$
- (g)  $\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$
- (h)  $\nabla \times \nabla \phi = 0$
- (i)  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$
- (j)  $\nabla^2 \psi = \nabla \cdot (\nabla \psi)$
- (k)  $\nabla^2(\phi\psi) = \phi \nabla^2 \psi + \psi \nabla^2 \phi + 2\nabla \phi \cdot \nabla \psi$
- (l)  $\nabla(\phi\psi) = \phi \nabla \psi + \psi \nabla \phi$
- (m)  $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$
- (n)  $\nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi$
- (o)  $\nabla \times (\phi \mathbf{u}) = \phi \nabla \times \mathbf{u} + \nabla \phi \times \mathbf{u}$
- (p)  $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}$
- (q)  $\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u})$
- (r)  $\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$
- (s)  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$