

Repaso de Clase 4

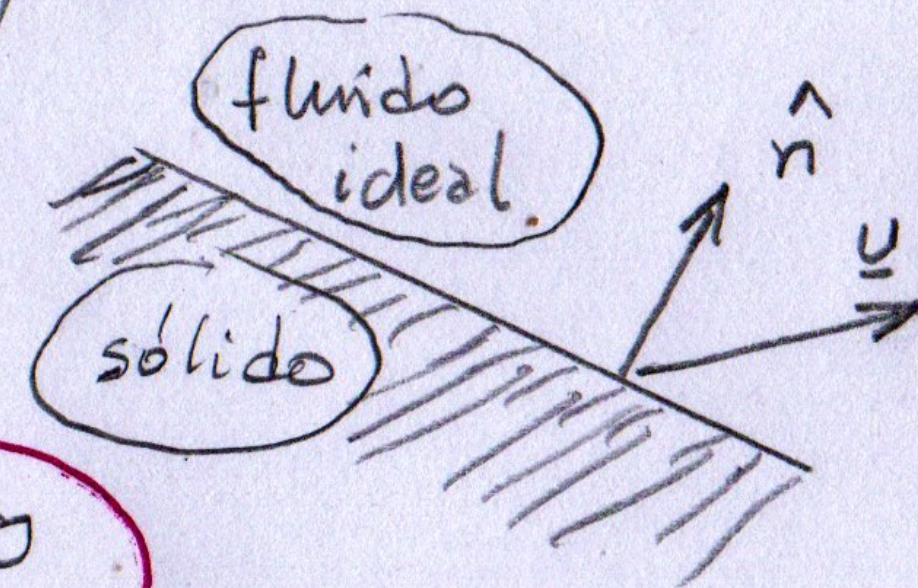
- Flujos planos ($u_{x,y}(x, y) = 0$) , incompresibles ($\frac{d\rho}{dt} = 0 = \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$) e irrotacionales ($\underline{\nabla} \times \underline{u} = 0$).
- Función potencial: singularidades de $\underline{\nabla} \times \underline{u}$ (**vórtices**) $\gg \phi(x, y)$ multivaluada
- Función corriente: singularidades de $\underline{\nabla} \cdot \underline{u}$ (**fuentes**) $\gg \psi(x, y)$ multivaluada
- Potencial complejo: $W(z) = \phi(x, y) + i \psi(x, y) \quad z = x + iy$
- Flujos simples: uniforme, fuente (sumidero), vórtice, punto de estancamiento.

Método de imágenes

Al igual que en electrostática, el método de imágenes ayuda a satisfacer condiciones de contorno en problemas con suficiente simetría.

La cond. contorno de un fluido ideal en contacto con paredes rígidas es

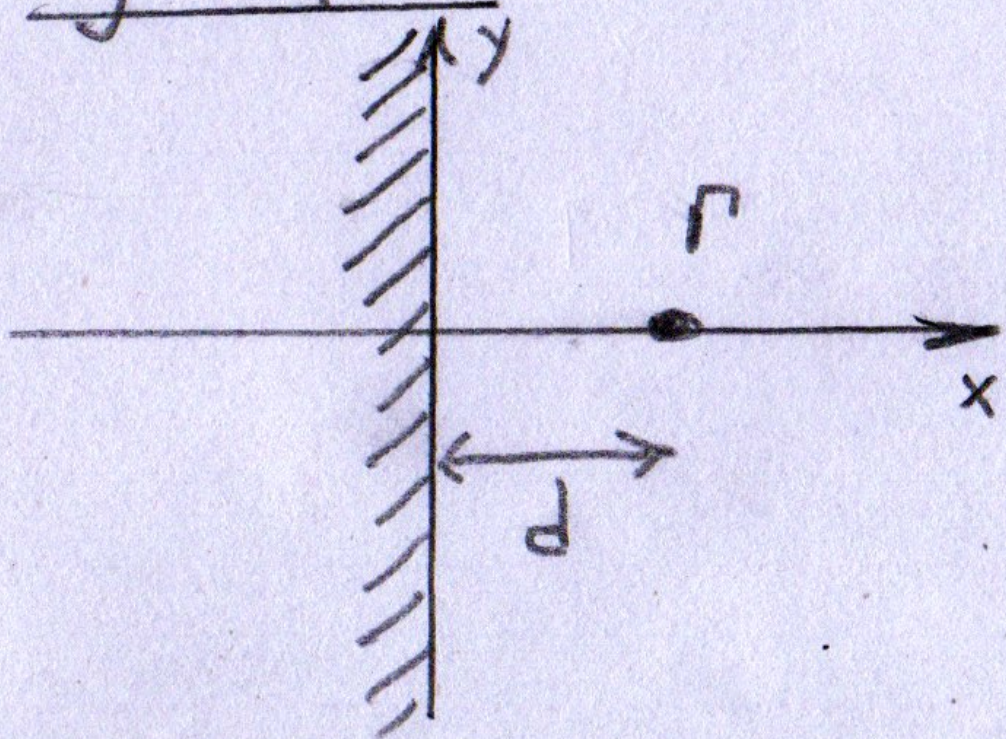
$$\hat{n} \cdot \vec{u} \Big|_{\text{pared}} = 0$$



Expresa la condición de rigidez de la pared.

NOTA: En flujos planos, la velocidad será tangente a la pared y por lo tanto coincidirá con una línea de corriente.

Ejemplo:



Sea un vórtice Γ a una distancia d de una pared. Para satisfacer la cond. contorno, agregamos un vórtice imagen $-\Gamma$ en $x = -d$.

$$\therefore W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z-d) + \underbrace{\frac{-\Gamma}{2\pi i} \ln(z+d)}_{\text{vórtice imagen}}$$

Calculamos líneas de corriente:

$$\psi = \text{Im } W = \text{Im} \left[\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(\frac{z-d}{z+d} \right) \right] = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left| \frac{z-d}{z+d} \right| = \text{cte}$$

$$\therefore \left| \frac{z-d}{z+d} \right| = \epsilon = \text{cte} \rightarrow \frac{(x-d)^2 + y^2}{(x+d)^2 + y^2} = \epsilon^2$$

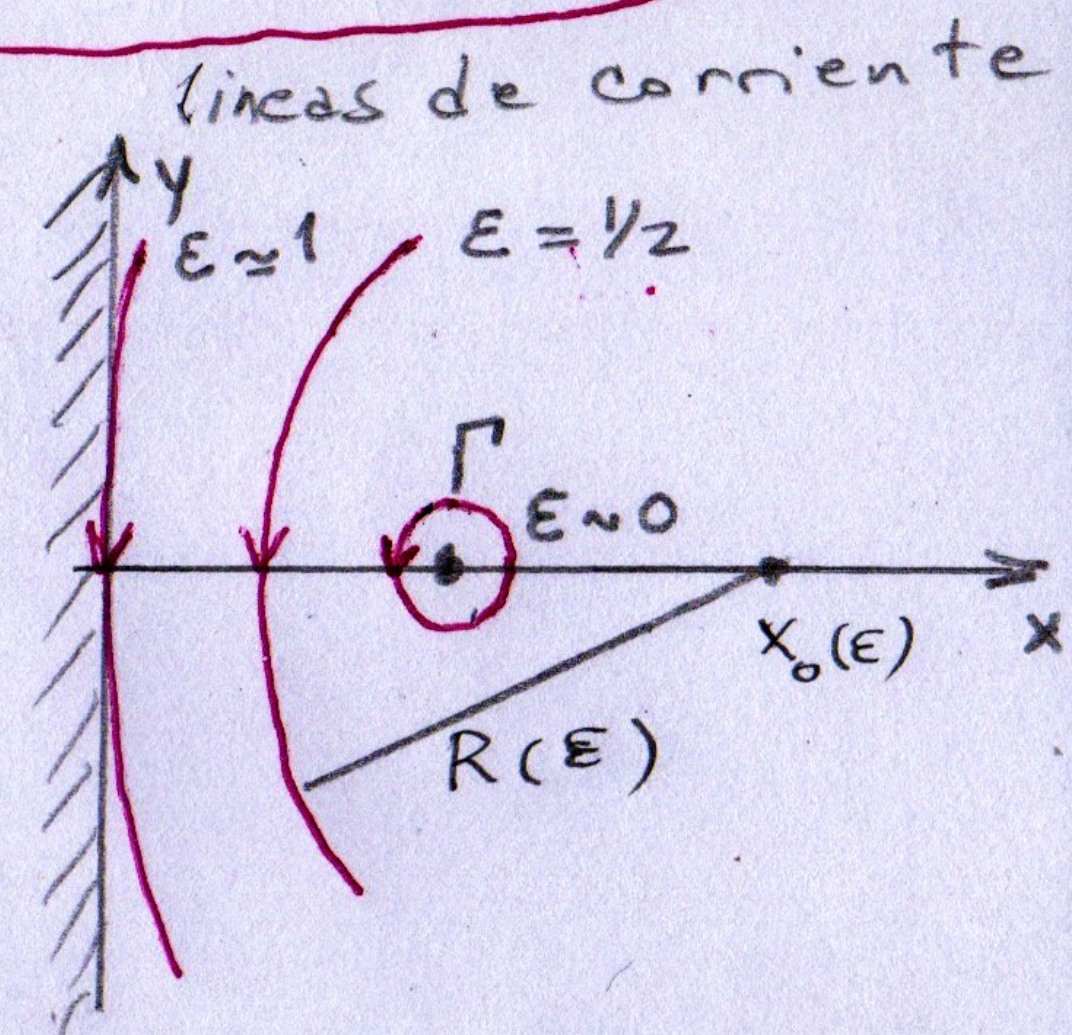
Entonces:

$$\left(x - d \cdot \frac{1+\epsilon^2}{1-\epsilon^2} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{2d\epsilon}{1-\epsilon^2} \right)^2$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{x_0(\epsilon)} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{R(\epsilon)}$

Las líneas de corriente son circunferencias no concéntricas, centradas en $x_0(\epsilon)$ y con radio $R(\epsilon)$ para $0 < \epsilon < 1$.

- Para $\epsilon \sim 0 \Rightarrow x_0 \sim d, R \sim 0$
- $\epsilon = 1/2 \Rightarrow x_0 = \frac{5d}{3}, R \sim \frac{4d}{3}$
- $\epsilon \sim 1 \Rightarrow x_0 \sim \infty, R \sim \infty$

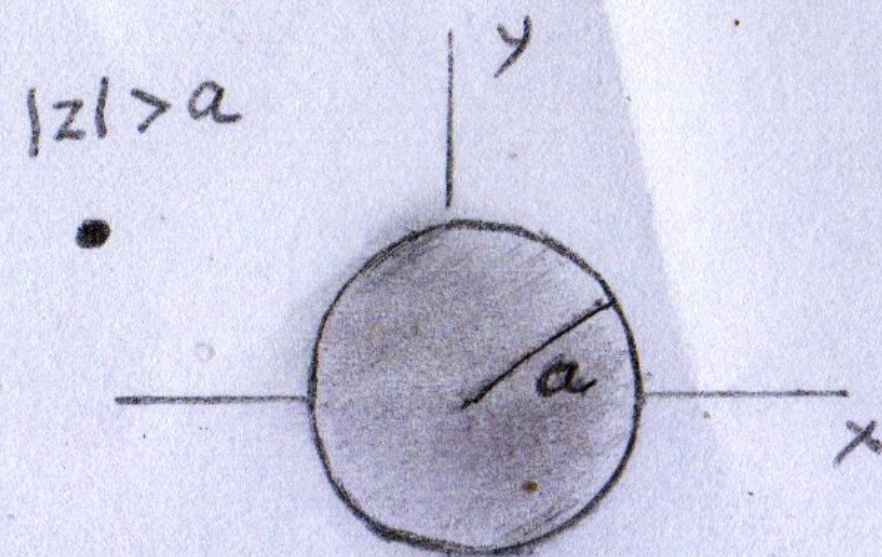


Teorema del círculo (Milne-Thomson, 1940)

Sea un flujo con potencial complejo $W = W_0(z)$ con singularidades en $|z| > a$. Entonces, $W = W_0(z) + W_0^*\left(\frac{a^2}{z^*}\right)$ es el potencial complejo con las mismas singularidades que W_0 en $|z| > a$ y con $|z| = a$ como línea de corriente.

Demostración

(i) Sing. de $W_0(z)$
en $|z| > a$ (fuera del círculo)



↓
Sing. de $W_0\left(\frac{a^2}{z^*}\right)$ en $\left|\frac{a^2}{z^*}\right| > a \Rightarrow |z| < a$
(dentro del círculo).

Es decir que $W_0^*\left(\frac{a^2}{z^*}\right)$ agrega singularidades (virtuales) dentro del círculo.

(ii) En $|z| = a \Rightarrow z z^* = a^2 \Rightarrow \frac{a^2}{z^*} = z$

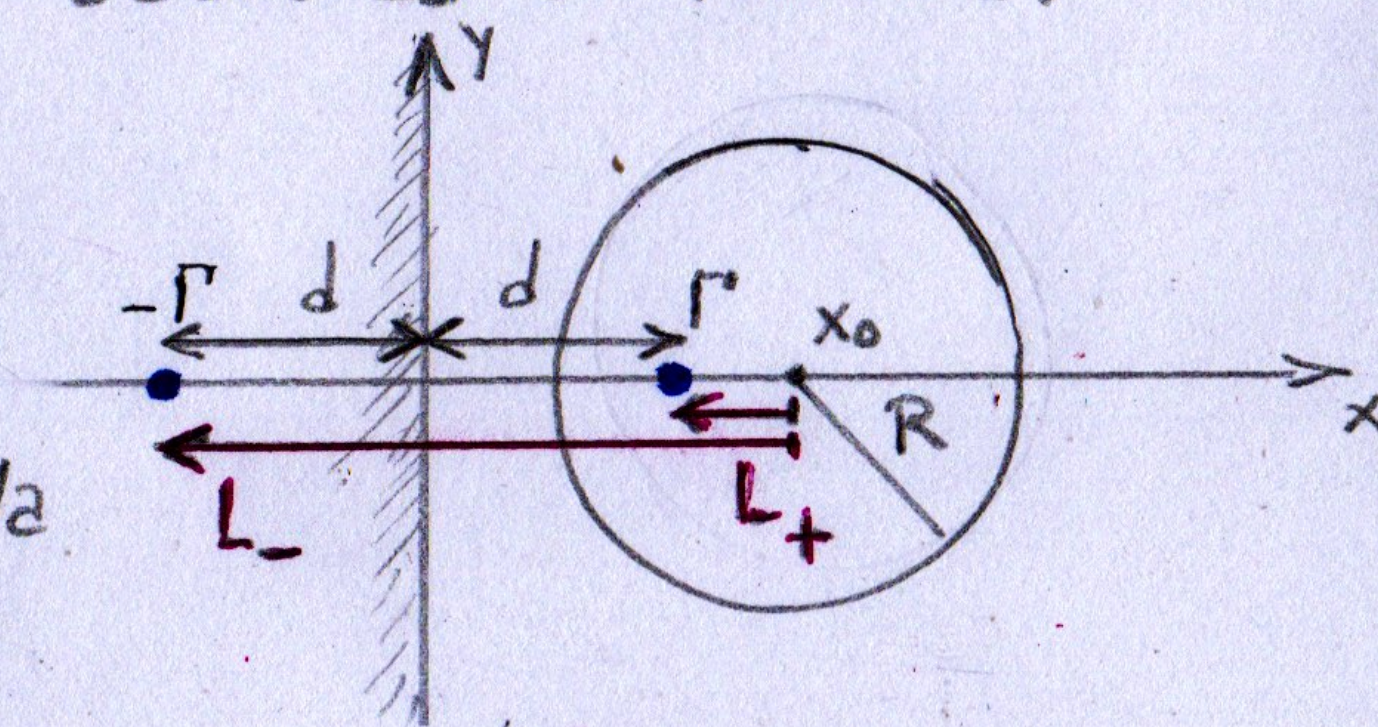
Entonces $W(|z| = a) = W_0(z) + W_0^*(z) \in \mathbb{R}$

$\therefore \text{Im}[W(|z| = a)] = 0 = \text{cte} \Rightarrow |z| = a$ es una línea de corriente

NOTA: El teorema es compatible con el agregado de un vórtice Γ en el origen; $W(z) = W_0(z) + W_0^*\left(\frac{a^2}{z^*}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$

Veamos que con el ejemplo anterior y un poco de ingenio, pudimos haber deducido el teorema.

• El problema original es un vórtice Γ a distancia d de la pared.



• La circunferencia centrada en x_0 de radio R es una línea de corriente.

• Y si colocamos un círculo de radio R y centro x_0 frente a un vórtice $-\Gamma$ a distancia L_- ?

• Se requiere un vórtice virtual $+\Gamma$ a distancia L_+

$$L_{\pm} = x_0 \mp d \xrightarrow{\text{ejercicio}} L_+ \cdot L_- = R^2 \rightarrow L_+ = \frac{R^2}{L_-}$$

Flujo alrededor de un cilindro

Sea un flujo horizontal y uniforme U_0 sobre un círculo de radio a

$$W_0(z) = U_0 z \Rightarrow W = U_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

Verifiquen que

$$\psi = 0 \text{ en } |z| = a$$

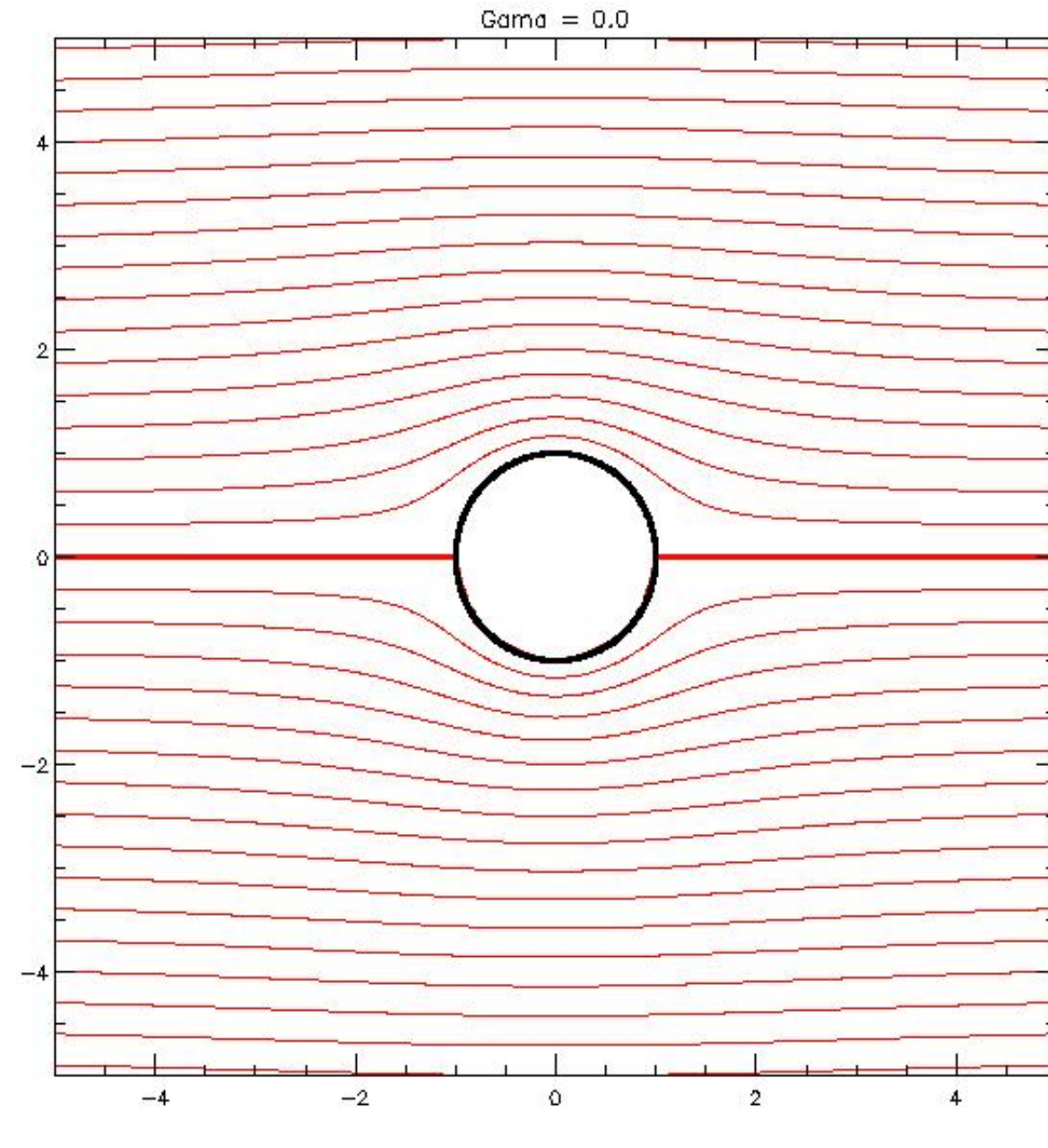
Noten que las líneas de corriente son simétricas respecto de $x \leftrightarrow -x$ y también $y \leftrightarrow -y$.

Agregamos ahora un vórtice $-\Gamma$ en el origen:

$$W(z) = U_0 z + U_0 \frac{a^2}{z} + \frac{-\Gamma}{2\pi i} \ln z$$

$$\psi = \text{Im}(W) = U_0 y - \frac{U_0 a^2 y}{x^2 + y^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

Utilizamos las constantes U_0 y a para adimensionalizar el problema:



$$\left. \begin{array}{l} \psi \rightarrow U_0 a \psi \\ (x, y) \rightarrow a(x, y) \end{array} \right\} \Rightarrow \psi(x, y) = y \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) + \gamma \ln(x^2 + y^2)$$

$$\gamma = \frac{\Gamma}{4\pi U_0 a}$$

Noten que la versión adimensional ya no depende de U_0, Γ, a sino solamente de γ .

El vórtice rompe la simetría $y \leftrightarrow -y$.

Busquemos puntos de estancamiento sobre $|z| = a$, donde se insertan líneas de corriente que

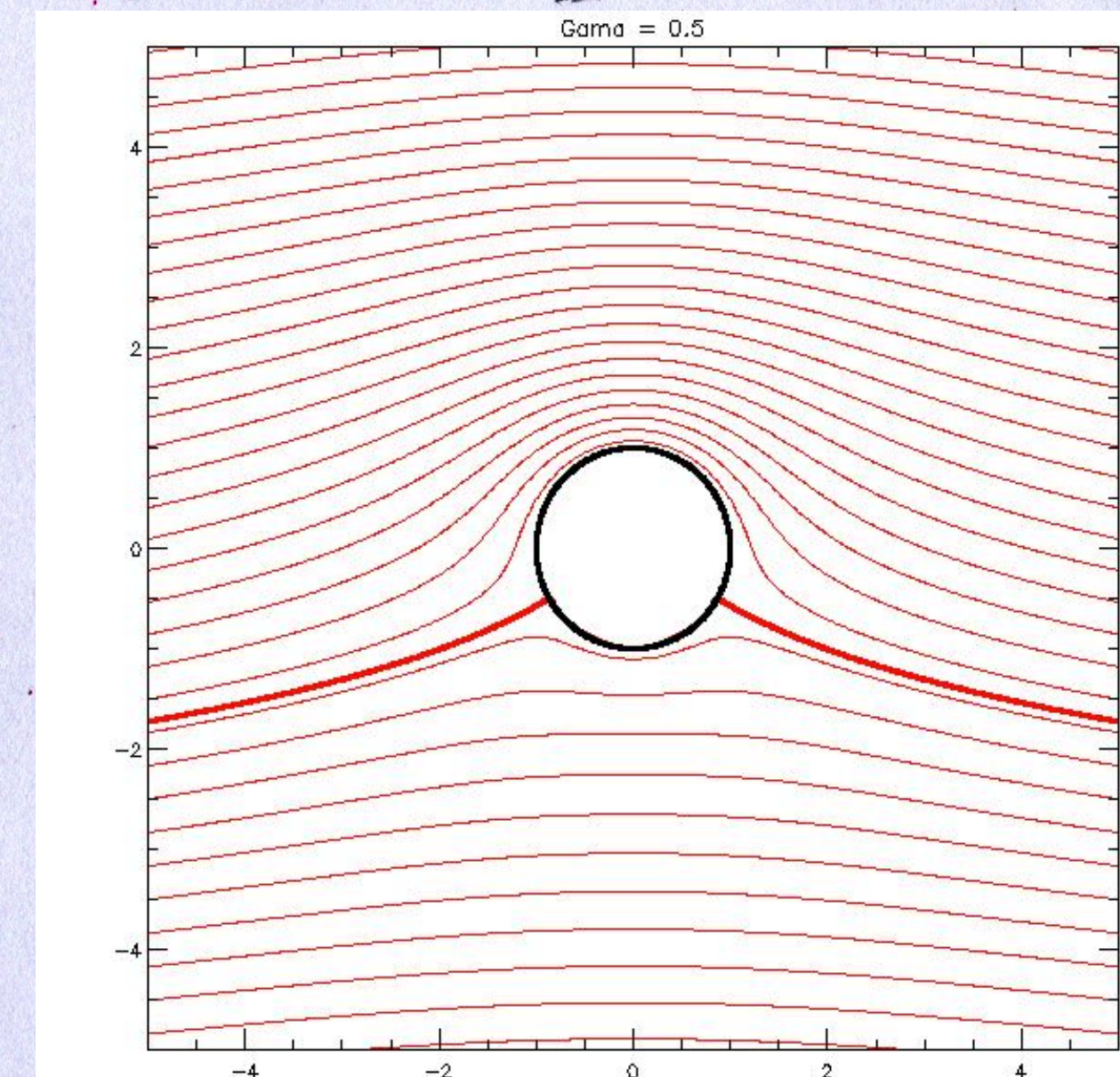
llamamos separatrices.

$$\text{En polares: } \begin{cases} U_\theta = \partial_r \psi \\ U_r = \frac{1}{r} \partial_\theta \psi \end{cases}$$

$$\psi(r, \theta) = r \sin \theta \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) + 2\gamma \ln r$$

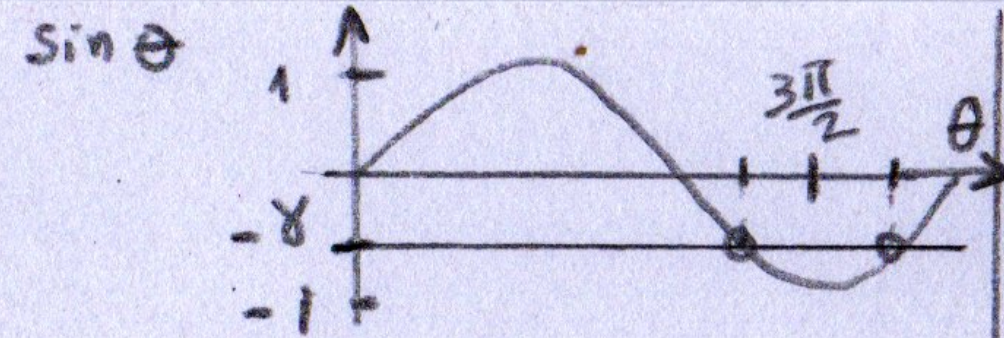
$$U_\theta(r=1) = 2 \sin \theta + 2\gamma = 0$$

$$\sin \theta = -\gamma \quad \text{Ptos. estanc. si } -1 < \gamma < 1$$



Flujo alrededor de un cilindro

Noten que las soluciones de $\sin \theta = -\gamma$ equidistan de $\theta = \frac{3\pi}{2}$



Para $\gamma \rightarrow 1$, los dos puntos coinciden en $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Para $\gamma > 1$ ya no hay puntos de estancamiento sobre el perímetro. Busquemos pto. estancamiento fuera del círculo:

$$u_\theta = \partial_r \psi = \sin \theta \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{2\gamma}{r} = 0$$

$$u_r = \frac{1}{r} \partial_\theta \psi = \cos \theta \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) = 0 \rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

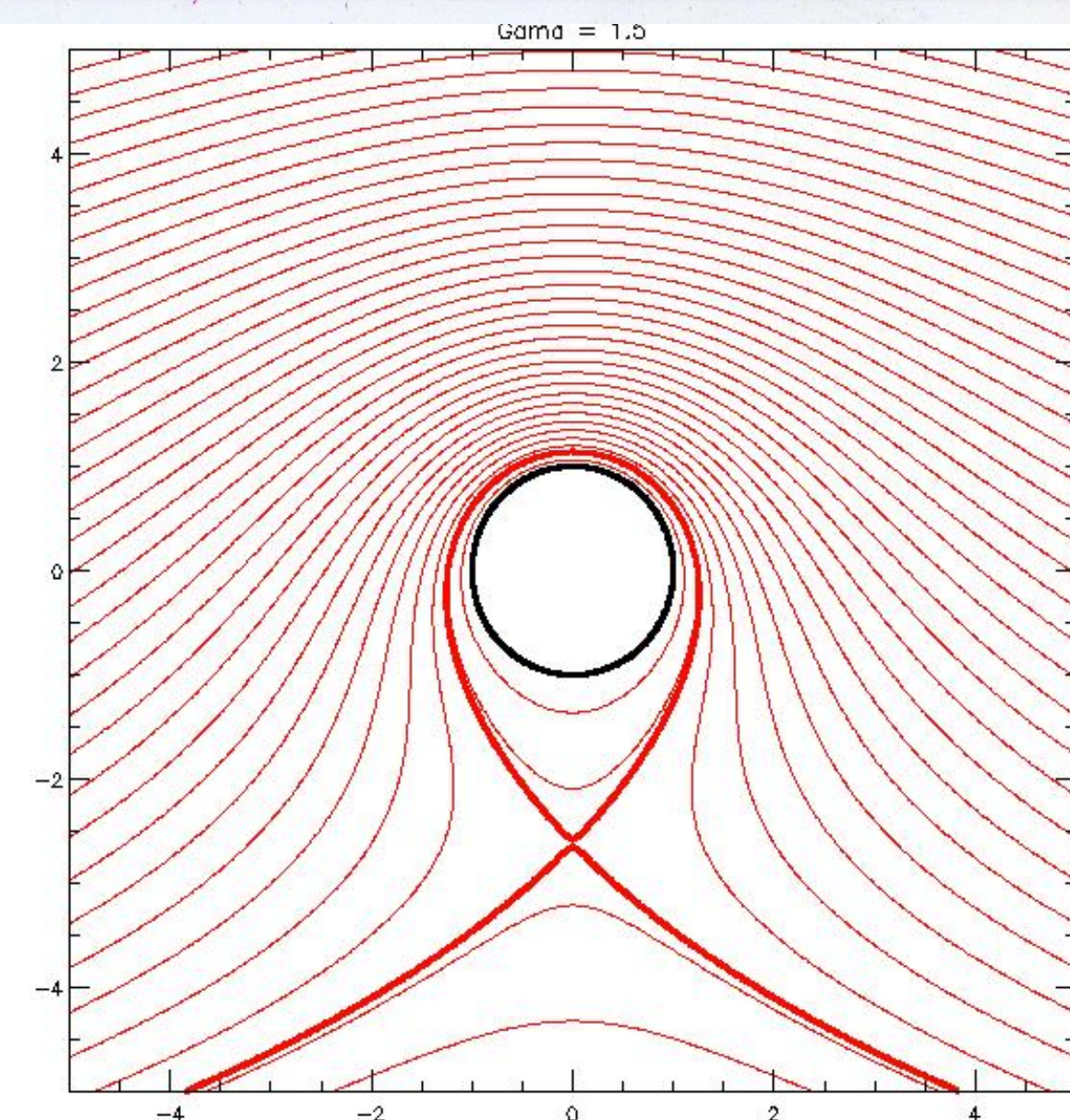
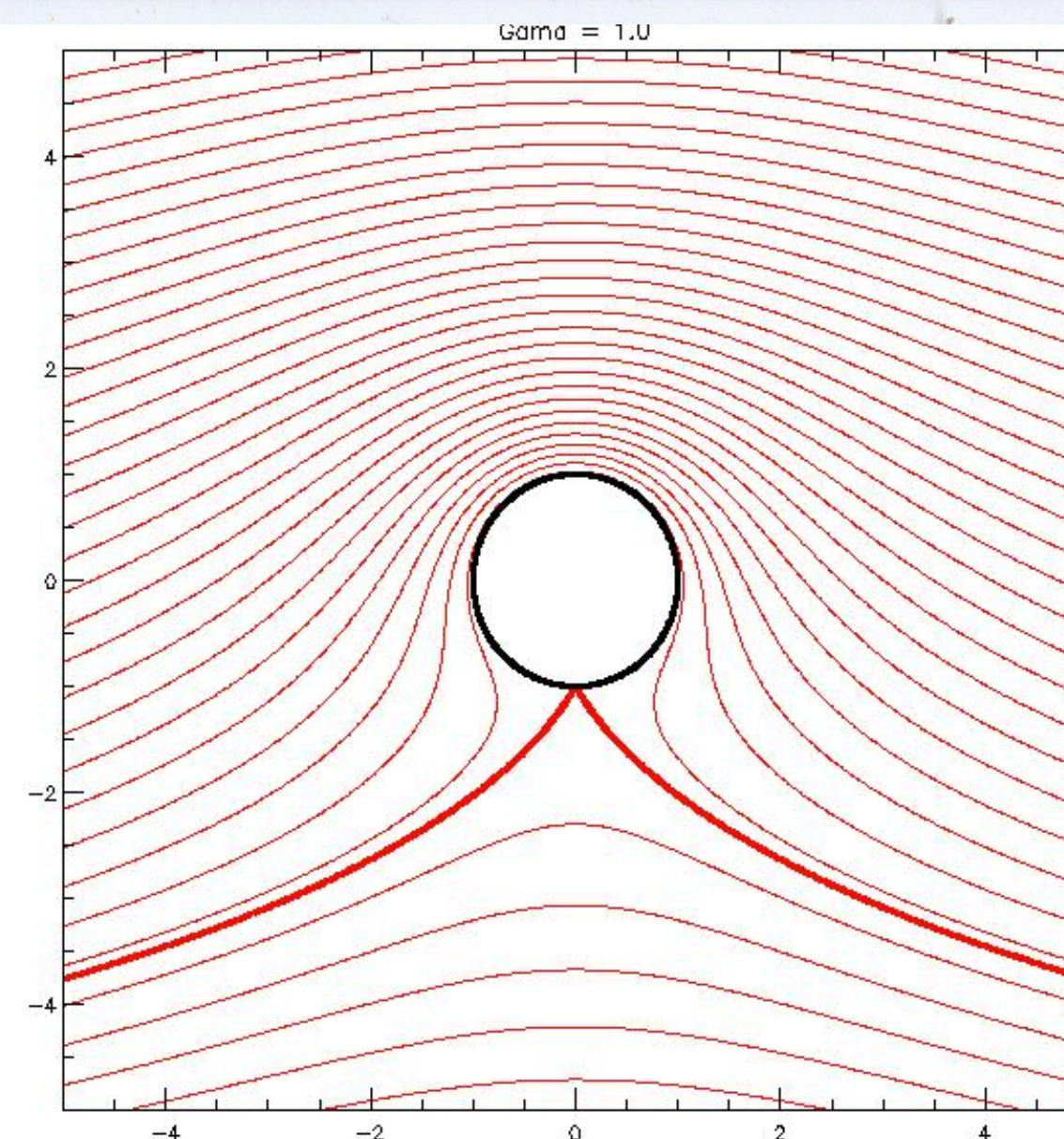
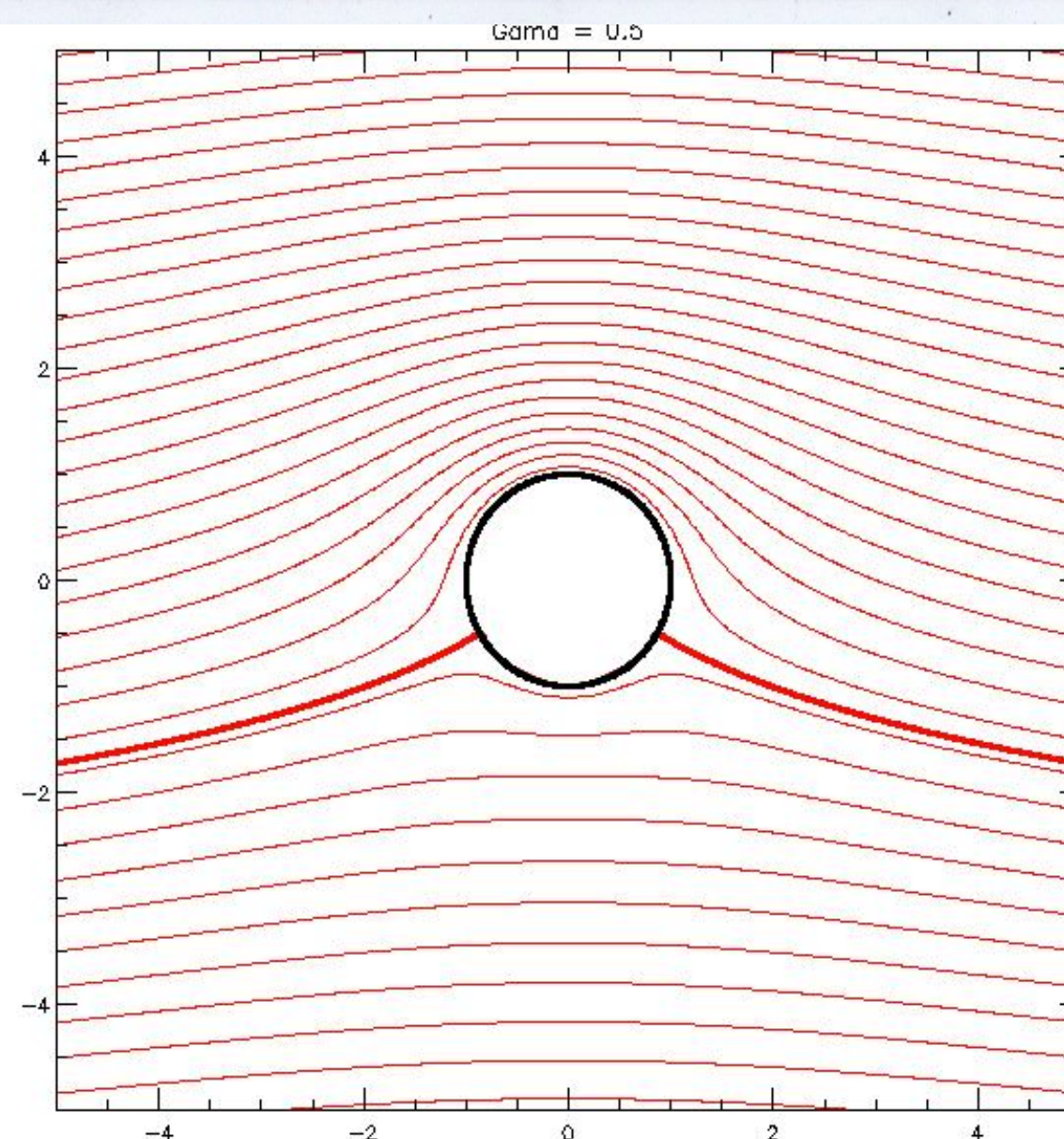
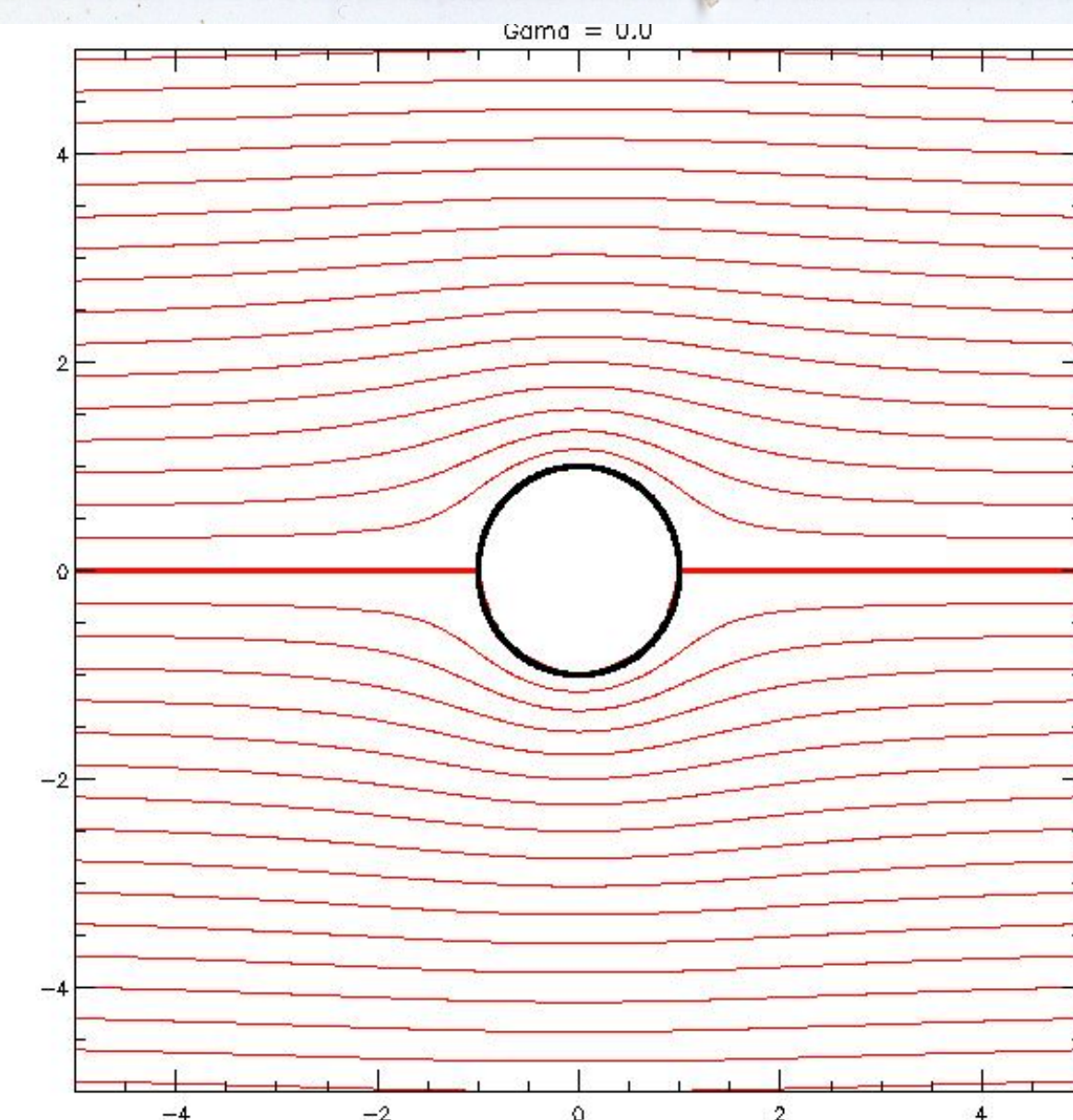
Para satisfacer $u_\theta = 0$ debe ser $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$ y

$$r^2 - 2\gamma r + 1 = 0 \rightarrow r_0 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

La solución r_- resulta $r_- < 1$ si $\gamma > 1$.

Entonces si $\gamma > 1$ hay un único punto de estancamiento en $\theta = \frac{3\pi}{2}$ y $r_0 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1} > 1$.

La separatriz tiene la forma de la figura, separando el flujo que evade al círculo por arriba y por abajo, pero también aislando un flujo estanco alrededor del círculo. Ejemplo: $\gamma = 1.5 \rightarrow r_0 = 2.62$



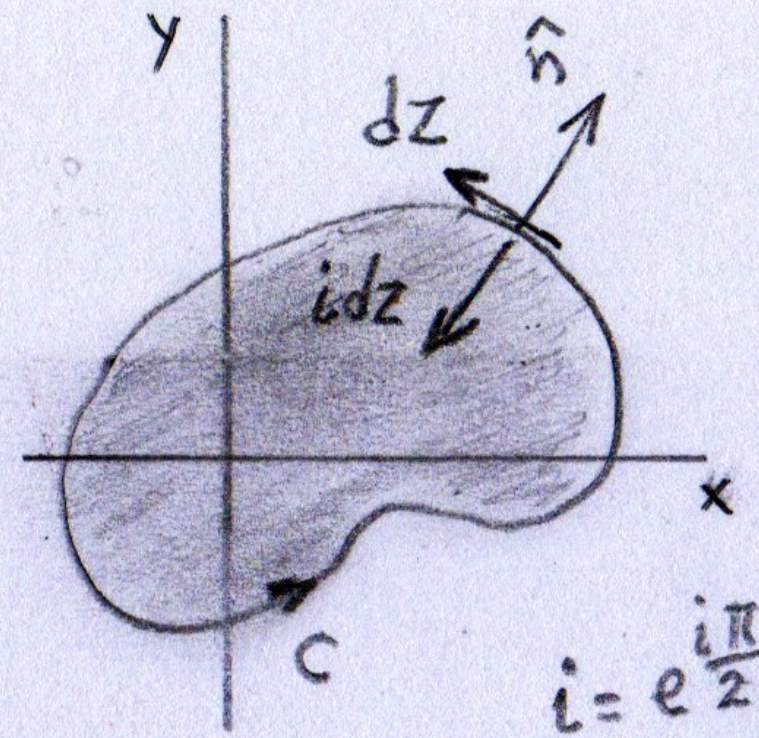
Teorema de Blasius (1911)

Sea un flujo estacionario con potencial complejo $W(z)$ alrededor de un sólido delimitado por la curva cerrada C . La fuerza

del fluido sobre el sólido resulta: $F^* = F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C dz \left(\frac{dW}{dz} \right)^2$

Demostración

La fuerza del fluido al sólido se ejerce a través de la pared y vale $\underline{F} = - \oint_C p \hat{n} ds$



En notación compleja: $\begin{cases} \hat{n} ds \rightarrow -i dz \\ \underline{F} \rightarrow \mathbb{F} = F_x + iF_y \end{cases}$

Es decir que:

$$\mathbb{F} = F_x + iF_y = i \oint_C p dz \rightarrow \mathbb{F}^* = F_x - iF_y = -i \oint_C p dz^*$$

Por Bernoulli 2: $p = p_0 - \frac{\rho u^2}{2} = p_0 - \frac{\rho}{2} \left| \frac{dW}{dz} \right|^2$

$$\therefore F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 dz^* \quad (\text{porque } \oint_C p_0 dz = 0)$$

Se parece al resultado, pero no es.

Como sobre C es $\text{Im}(W) = \text{cte} \rightarrow \text{Im}(dW) = 0$

Sobre C es $dW = dW^* \rightarrow \frac{dW}{dz} dz = \left(\frac{dW}{dz} dz \right)^* = \left(\frac{dW}{dz} \right)^* dz^*$

Entonces $\left| \frac{dW}{dz} \right|^2 dz^* = \frac{dW}{dz} \left(\frac{dW}{dz} \right)^* dz^* = \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz$ sobre C

$$\therefore F^* = F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C dz \left(\frac{dW}{dz} \right)^2$$

Ejercicio: Muestren que la fuerza de un flujo $u_0 \hat{x}$ sobre un círculo de radio a con vórtice $-\Gamma$ en el origen es

$$\underline{F} = \hat{y} \rho u_0 \Gamma$$

