Repaso de Clase 5

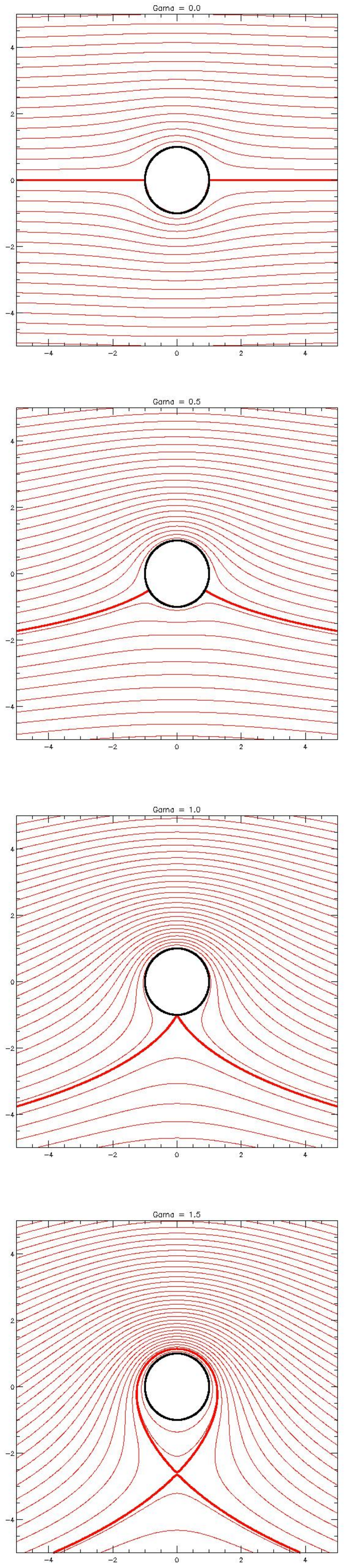
- Método de imágenes para contornos circulares:

  - Teorema del círculo >>> $W = W_0(z) \; + \; W_0^*(\frac{a^2}{z^*})$

- Agregado de vórtice en el orígen >>> Flujo alrededor de un cilindro

- Puntos de estancamiento, separatrices

- Fuerza de un flujo plano sobre un obstáculo >>> Teorema de Blasius

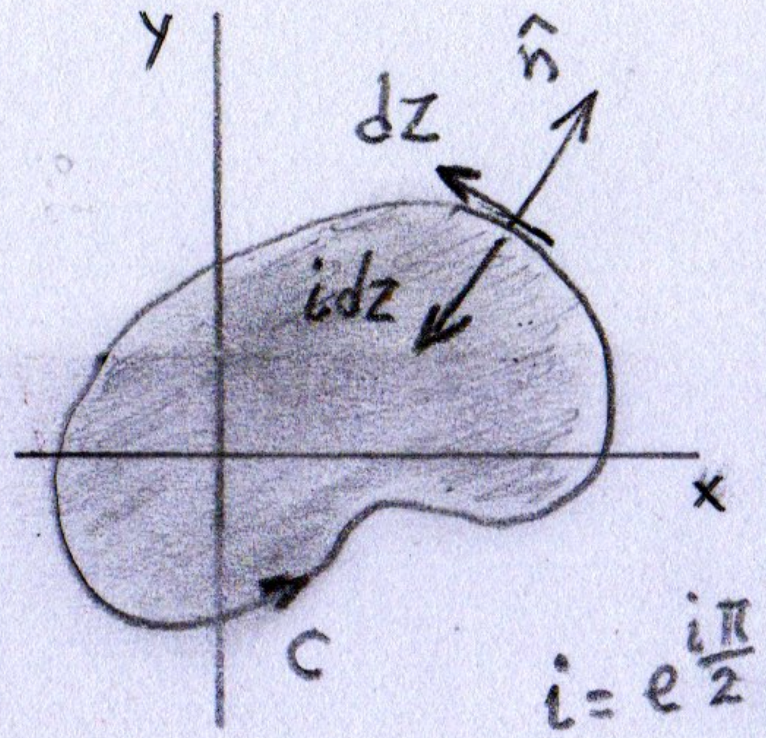


Teorema de Blasius (1911)

Sea un flujo estacionario con potencial complejo W(z) alrededor de un sólido delimitado por la curva cerrada C. La fuerza del fluído sobre el sólido resulta: $F^* = F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint_C dz\left(\frac{dW}{dz}\right)^2$

<u>Demostración</u>

La fuerza del fluído al sólido se ejerce a través de la pared y vale $\underline{F} = -\oint_C p\,\hat{n}\,ds$



$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

En notación compleja: $\begin{cases} \hat{n}\,ds \longrightarrow -i\,dz \\ \underline{F} \longrightarrow \mathbb{F} = F_x + iF_y \end{cases}$

Es decir que:

$$\mathbb{F} = F_x + iF_y = i\oint_C p\,dz \rightarrow \mathbb{F}^* = F_x - iF_y = -i\oint_C p\,dz^*$$

Por Bernoulli 2: $p = p_0 - \rho\frac{u^2}{2} = p_0 - \frac{\rho}{2}\left|\frac{dW}{dz}\right|^2$

$$\therefore F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint_C \left|\frac{dW}{dz}\right|^2 dz^* \quad \text{(porque } \oint_C p_0\,dz = 0\text{)}$$

Se parece al resultado, pero no es.

Como sobre C es $Im(W) = cte \longrightarrow Im(dW) = 0$

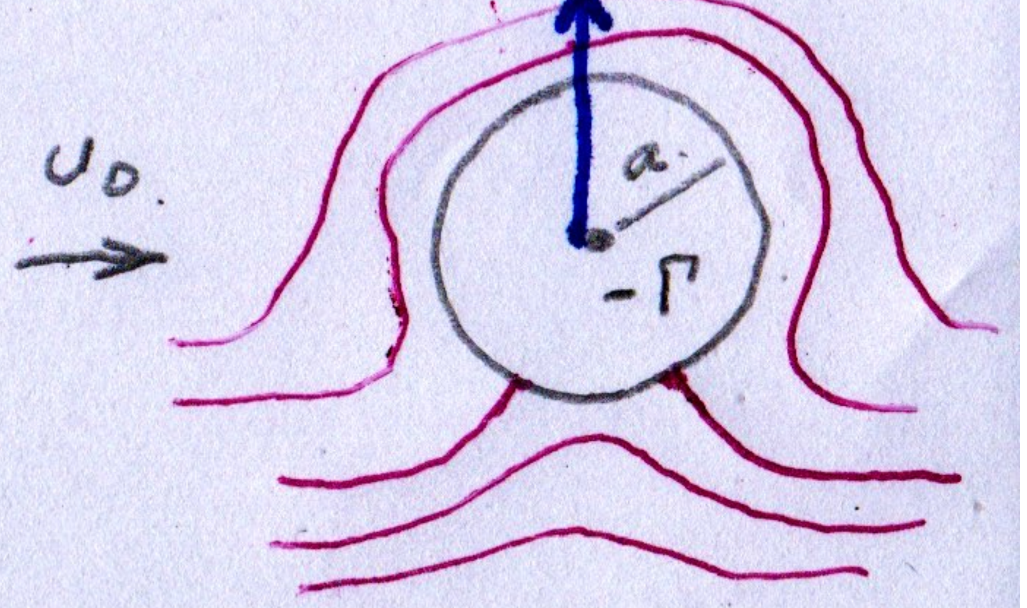
Sobre C es $dW = dW^* \longrightarrow \frac{dW}{dz}dz = \left(\frac{dW}{dz}dz\right)^* = \left(\frac{dW}{dz}\right)^* dz^*$

Entonces $\left|\frac{dW}{dz}\right|^2 dz^* = \frac{dW}{dz}\left(\frac{dW}{dz}\right)^* dz^* = \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz$ sobre C

$$\therefore F^* = F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint_C dz\left(\frac{dW}{dz}\right)^2$$

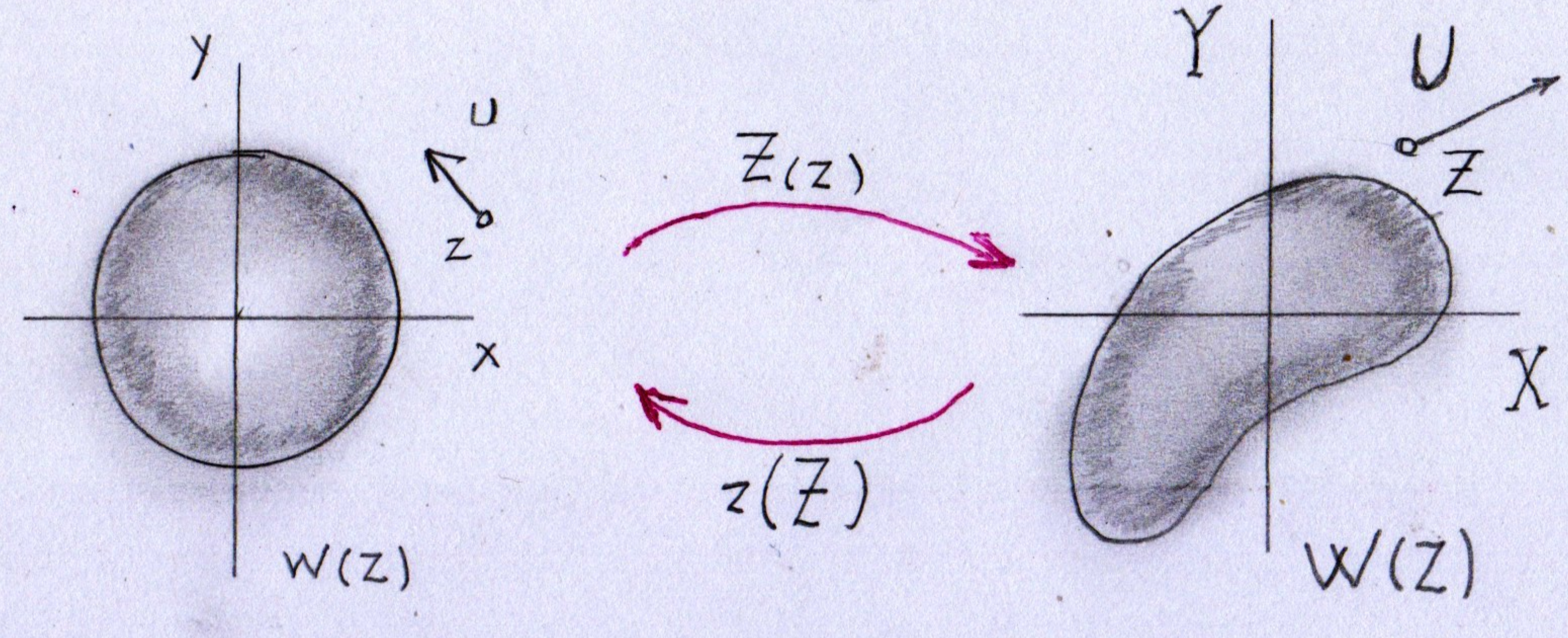
<u>Ejercicio</u>: Muestren que la fuerza de un flujo $u_0\hat{x}$ sobre un círculo de radio a con vórtice $-\Gamma$ en el origen es

$$\underline{F} = \hat{y}\,\rho u_0 \Gamma$$



Transformaciones conformes

Una transformación $Z = Z(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se dice **conforme** si es **analítica** (desarrollable en Taylor), salvo en unos pocos puntos singulares.



Definimos $W(Z)$ tq. $W(Z) \equiv w(z(Z))$

Entonces

$$U^* = \frac{dW}{dZ} = \frac{dw}{dz}\frac{dz}{dZ} \longrightarrow \frac{dW}{dZ} = \frac{dw/dz}{Z'(z)}$$

$$\frac{dz}{dZ} = \frac{1}{Z'(z)}$$

Es decir que: $$U_x - iU_y = \frac{u_x - i u_y}{Z'(z)}$$

Teorema de Riemann

Todo contorno cerrado y derivable en el plano $Z = X + iY$ puede mapearse en una circunferencia en $z = x + iy$ a través de alguna transf. conforme $z(Z)$

NOTA: Las transf. conformes conservan los ángulos, para todo z_0 tq. $Z'(z_0) \neq 0$.

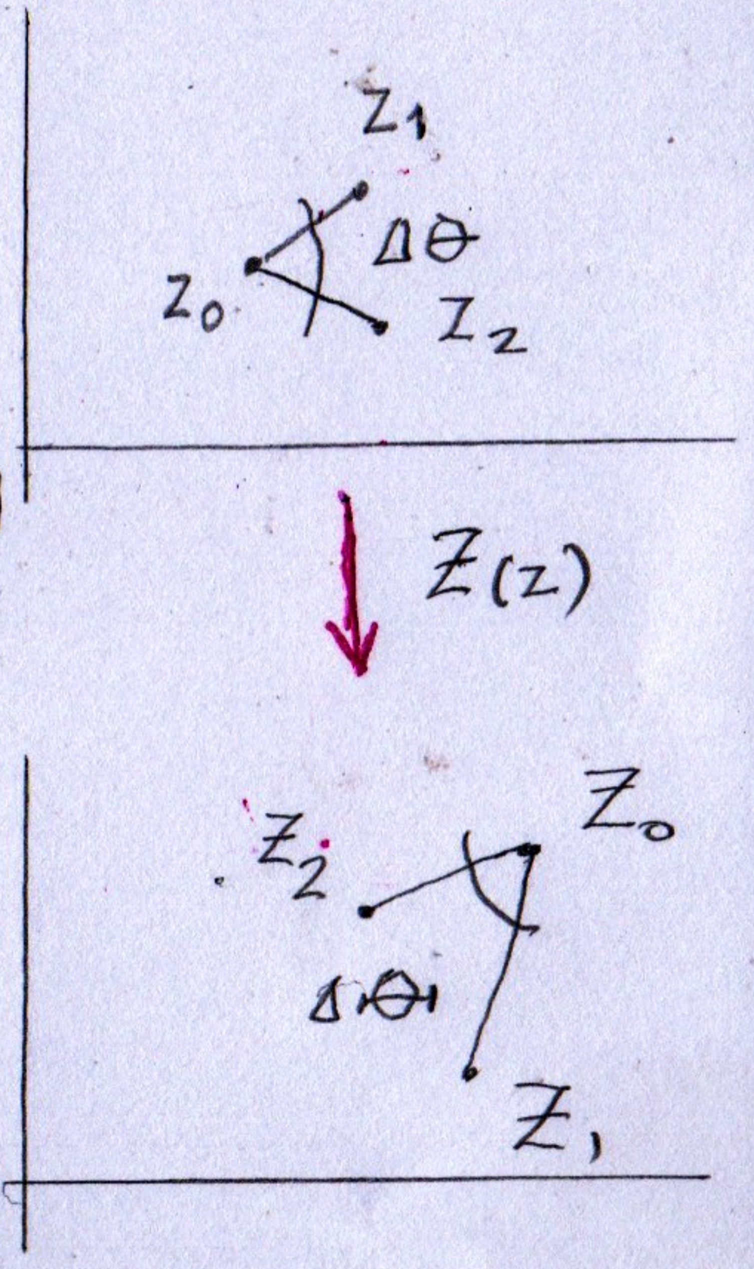
$Z(z)$ analítica:

$$Z - Z_0 \simeq Z'(z_0)(z - z_0) + \cdots$$

Para todo par z_1, z_2 próximo a z_0:

$$\frac{Z_1 - Z_0}{Z_2 - Z_0} = \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \quad \text{si } Z'(z) \neq 0.$$

$$e^{i(\Theta_1 - \Theta_2)} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \longrightarrow \Delta\Theta = \Delta\theta$$

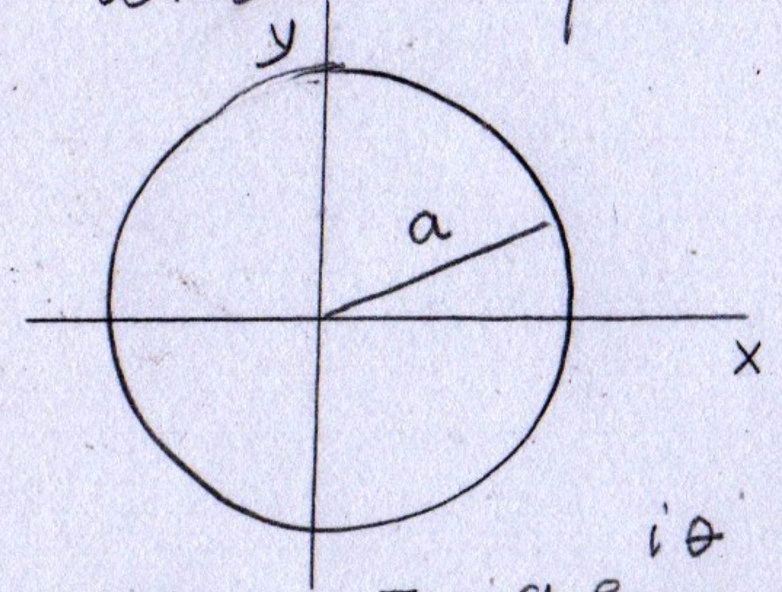


Transformación de Zhukovsky (1910)

Estudiemos las transf. conformes

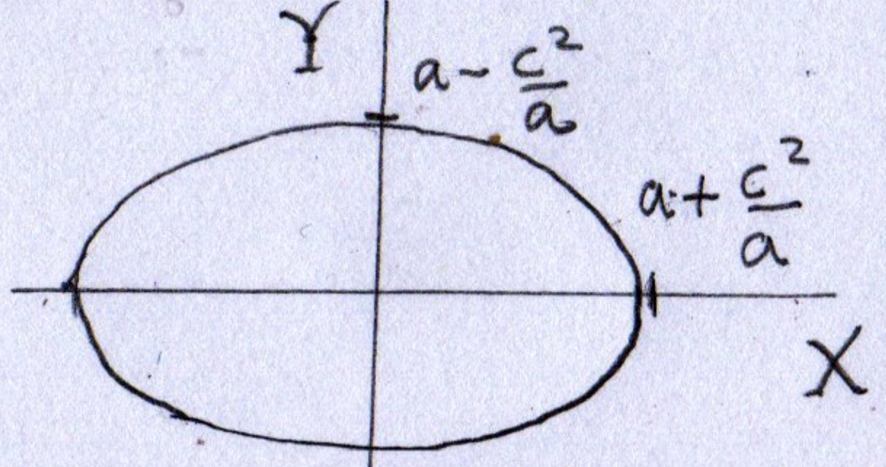
$$Z = z + \frac{c^2}{z} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Como se mapea una circunferencia de radio a?



$$z = a e^{i\theta}$$
$$0 \leq \theta < 2\pi$$

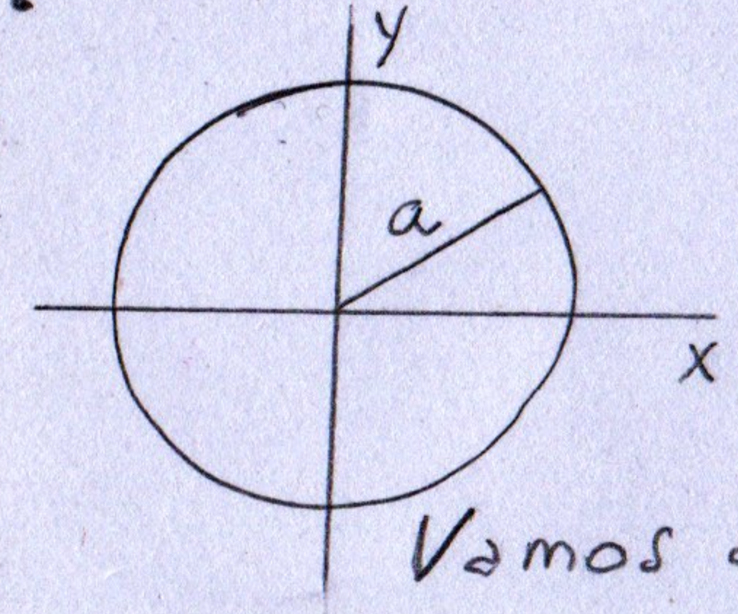
$$Z = a e^{i\theta} + \frac{c^2}{a e^{i\theta}}$$

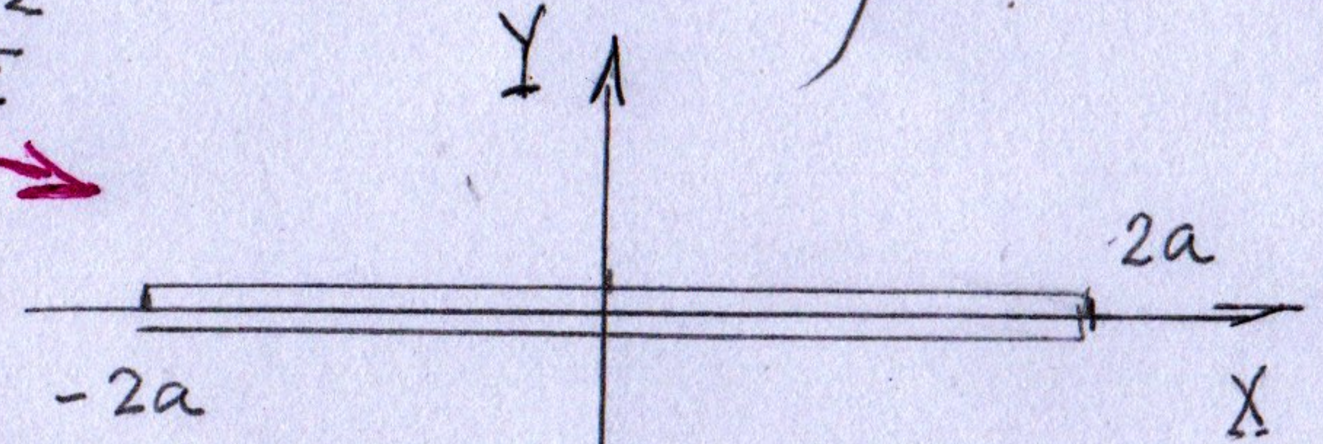


$$\left.\begin{aligned} X &= \mathrm{Re}\, Z = \left(a + \frac{c^2}{a}\right)\cos\theta \\ Y &= \mathrm{Im}\, Z = \left(a - \frac{c^2}{a}\right)\sin\theta \end{aligned}\right\} \boxed{\frac{X^2}{\left(a+\frac{c^2}{a}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(a-\frac{c^2}{a}\right)^2} = 1}$$

- Se mapea en elipses con mayor o menor elongación, según el valor del parámetro c de la transformación
- Un caso interesante es la transf. Zhukovsky con c = a.

$$Z = z + \frac{a^2}{z}$$

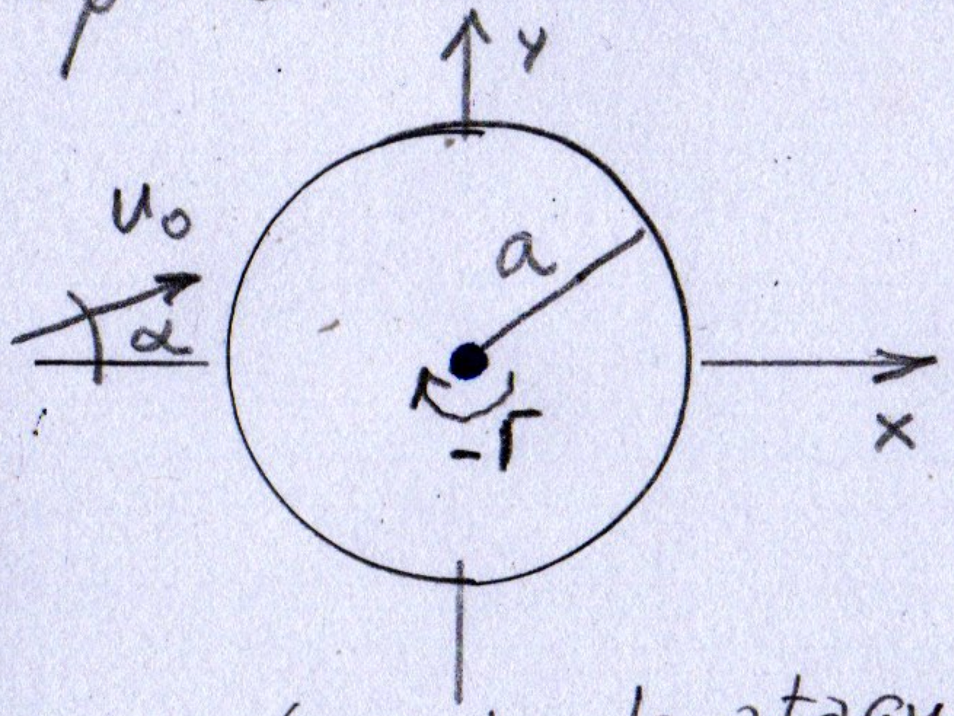




Vamos a suponer que el nuevo contorno corresponde a un corte de un ala plana de avión.

Ejemplo: Ala plana de avión (avión de papel)

Planteamos un flujo uniforme incidiendo sobre un círculo con un vórtice en el origen. Y luego aplicamos Zhukovsky con c = a



α: ángulo de ataque

$$W(z) = U_0\left(z e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z} e^{i\alpha}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$$

Si transformamos Zhukovsky con c = a, el campo de velocidades transformado:

$$U_x - iU_y = \frac{dW}{dZ} = \frac{dw/dz}{Z'(z)} = \frac{U_0\left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2}{z^2} e^{i\alpha}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z}}{1 - \frac{a^2}{z^2}}$$

Si calculamos la velocidad en el contorno del ala:

$$\left.\begin{aligned} z &= a e^{i\theta} \\ 0 &\leq \theta < 2\pi \end{aligned}\right\} \longrightarrow U_x - iU_y = \frac{U_0\left(e^{-i\alpha} - e^{i(\alpha - 2\theta)}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{-i\theta}}{1 - e^{-2i\theta}}$$

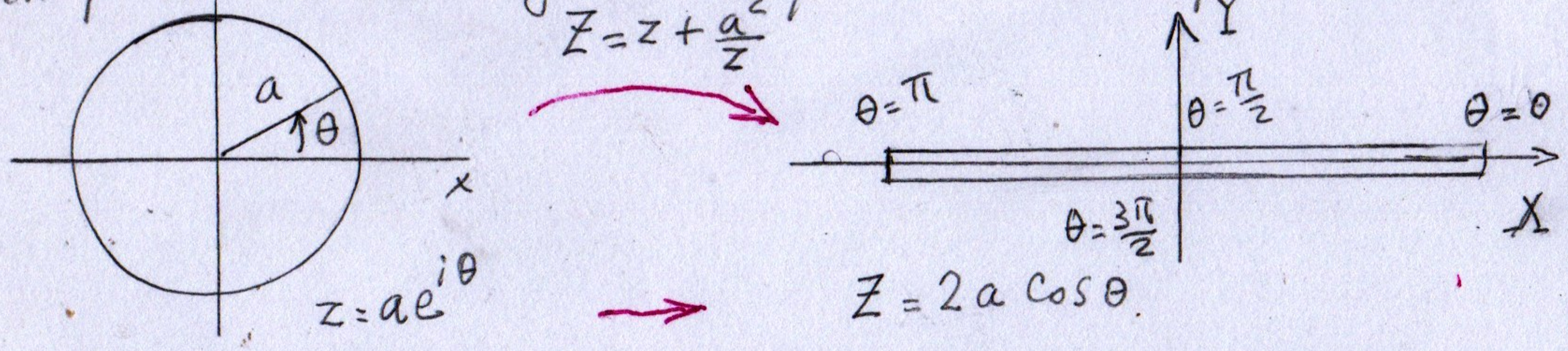
$$U_x - iU_y = \frac{U_0\left(e^{i(\theta-\alpha)} - e^{i(\alpha-\theta)}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi a}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$$

Ala plana de avión

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \longrightarrow U_x - iU_y = \frac{U_0\sin(\theta-\alpha)+\frac{\Gamma}{4\pi a}}{\sin\theta}$$

$$\gamma = \frac{\Gamma}{4\pi U_0 a} \longrightarrow U_x - iU_y = U_0\,\frac{\sin(\theta-\alpha)+\gamma}{\sin\theta} \longrightarrow U_y = 0$$

Obtenemos la velocidad en el contorno transformado, en función del angulo de polares en el plano z.



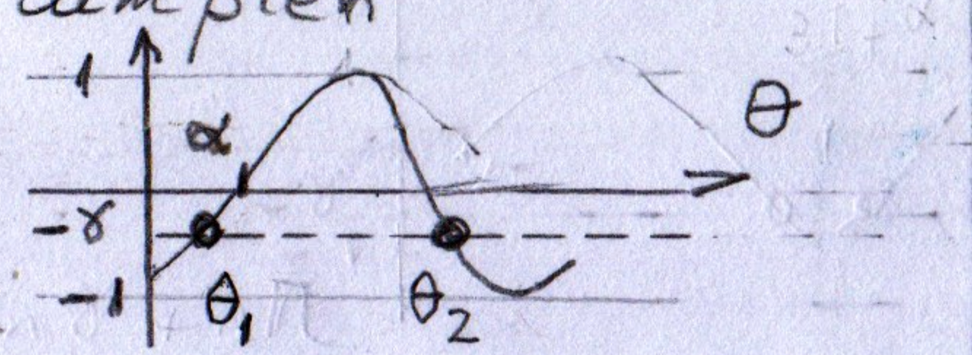
$$Z = z + \frac{a^2}{z}$$

$$z = ae^{i\theta} \longrightarrow Z = 2a\cos\theta$$

• Los puntos de estancamiento cumplen

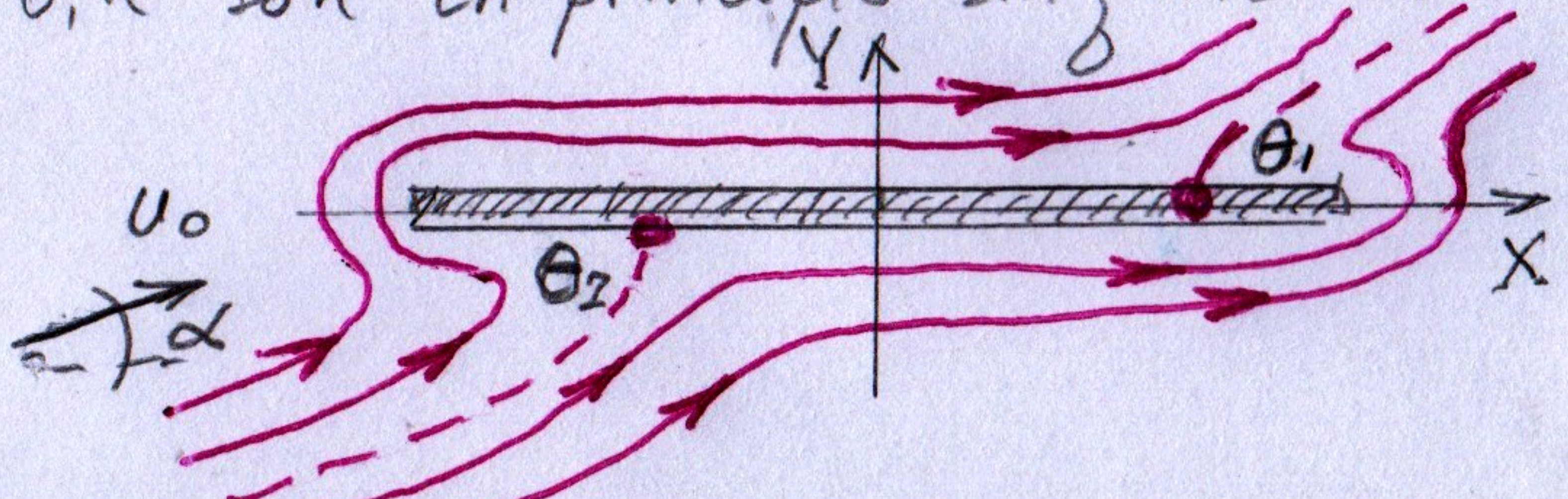
$$U_x = 0 \longrightarrow \sin(\theta-\alpha) = -\gamma$$

$$\therefore\ \theta = \alpha - \arcsin\gamma + n\pi$$

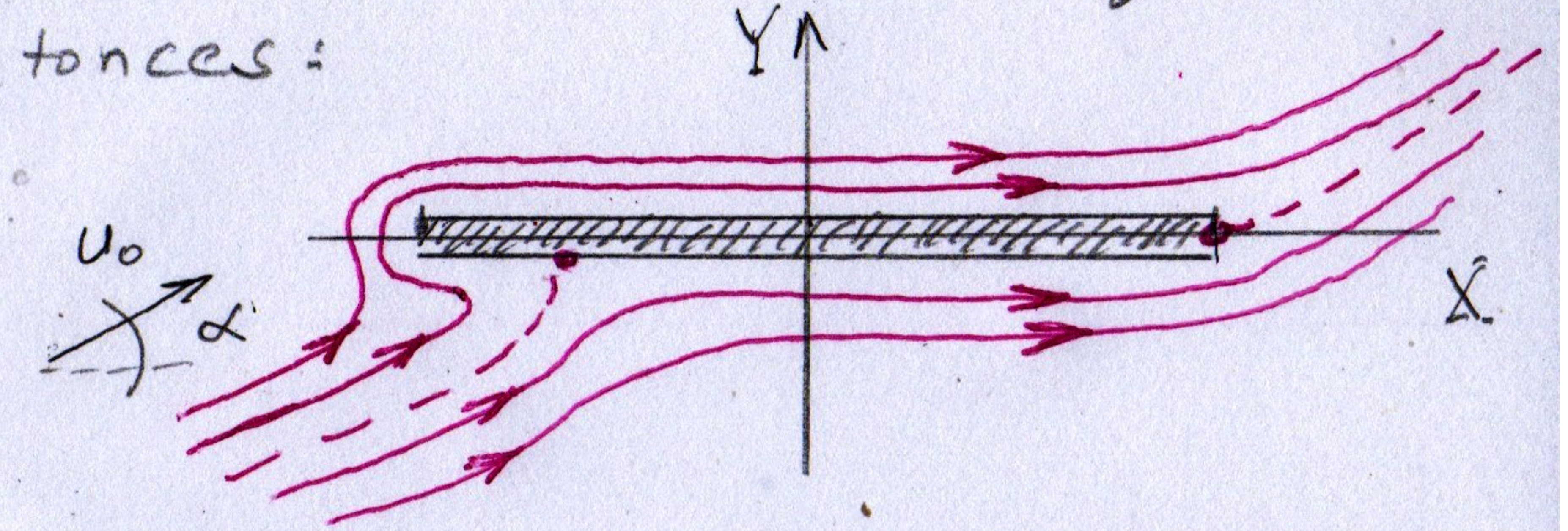


• Los puntos $\theta = 0, \pi$ son en principio singulares.

• Las líneas de corriente son



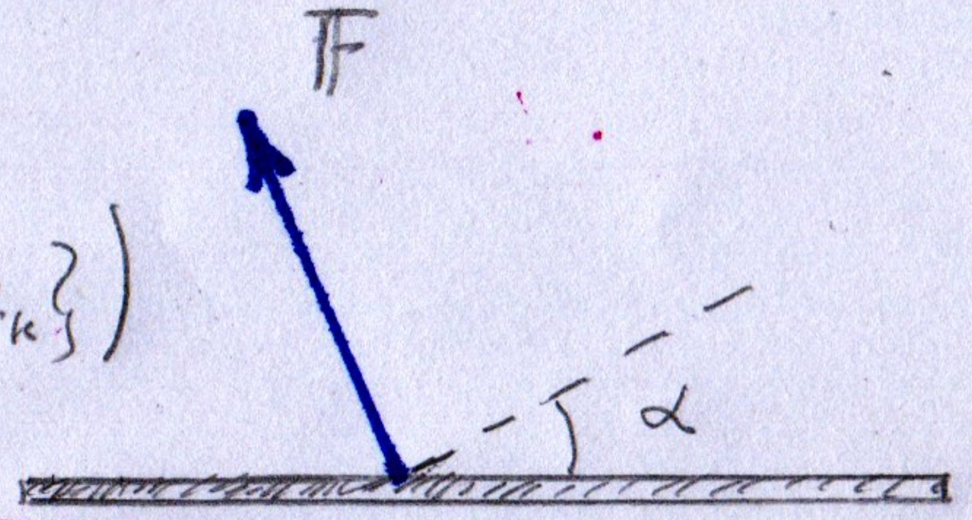
Ejercicio: Mostrar que existe un valor del angulo de ataque α para el cual se evita la singularidad en $\theta = 0$ y entonces:



Podemos usar Blasius para obtener la fuerza de sustentación sobre el ala plana:

$$\mathbb{F}_x - i\mathbb{F}_y = \frac{i\rho}{2}\oint\left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 dZ = \frac{i\rho}{2}\oint_{C}\frac{\left(dW/dz\right)^2}{Z'^2}\,Z'dz$$

Aplicando el Teorema de los Residuos $\left(\oint_c f(z)\,dz = 2\pi i\sum_k Res\{f, z_k\}\right)$



obtenemos

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}_x - i\mathbb{F}_y = \rho U_0 \Gamma e^{-i(\alpha+\frac{\pi}{2})}$$