

Repaso de Clase 10

- Ondas de gravedad
- Fluido de presión p_A sobre fluido incompresible, irrotacional e ideal
- Caso de profundidad infinita $\gg \omega^2 = gk$
- Caso de profundidad finita $\gg \omega^2 = gk \tanh(kd) \gg$ Baja profundidad: $\omega^2 \simeq gd k^2$
- Combinación lineal de todas las ramas ($\omega = \pm \dots$) y modos ($\sum_k (\dots)$), y parte real de ($\frac{1}{2}(\dots + c.c.)$)

Flujos compresibles

En flujos compresibles, sabemos que debemos usar la ecuación de continuidad

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

Las ondas acústicas son un ejemplo palpable (o mejor dicho audible) de la compresibilidad de un fluido como el aire.

Haremos un planteo 1D e ideal partiendo de un equilibrio:

$$\left. \begin{array}{l} \rho = \rho_0 \\ p = p_0 \\ \underline{u} = 0 \end{array} \right\} \text{Equilibrio} \rightarrow \text{Perturbación} \left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho_0 + \delta \rho \\ p = p_0 + \delta p \\ \underline{u} = \delta \underline{u} \end{array} \right.$$

Linealizamos las ecuaciones en $\delta \rho, \delta p, \delta \underline{u} = \hat{x} \delta u$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0 \rightarrow \partial_t \delta \rho + \rho_0 \partial_x \delta u = 0$$

$$\rho [\partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}] = -\nabla p \rightarrow \rho_0 \partial_t \delta u = -\partial_x \delta p$$

Las incógnitas son $\delta \rho(x,t)$, $\delta p(x,t)$ y $\delta u(x,t)$.

Falta una ecuación!

Planteamos una relación politrópica entre p y ρ , es decir $\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cte}$. Entonces:

$$\frac{p_0 + \delta p}{(\rho_0 + \delta \rho)^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \rightarrow \delta p = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \delta \rho$$

Definimos: $c^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$ c : velocidad del sonido

Para el sistema de ecuaciones recuadradas proponemos:

$$\delta \rho, \delta p, \delta u \sim e^{ikx - i\omega t} \rightarrow \begin{cases} -i\omega \delta \rho + ik \rho_0 \delta u = 0 \\ -i\omega \rho_0 \delta u + ik \delta p = 0 \end{cases}$$

La relación de dispersión resultante es $\omega^2 = c^2 k^2$ $\delta p = c^2 \delta \rho$

- Las ondas acústicas son no dispersivas, lo cual es indispensable para podernos comunicar.
- Es un modo longitudinal, ya que $\delta \underline{u} \parallel \underline{k}$.

Generación de ondas de choque

El término convectivo (no lineal) conduce a la formación de superficies de discontinuidad en el seno del fluido, conocidas como ondas de choque.

Veamos un caso muy simple, 1D y sin fuerzas de corto ni largo alcance:

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0$$

Comprobemos que la solución (implícita) de esta ecuación es

$$u = F(x - ut) \quad \text{donde} \begin{cases} u = u(x, t) \\ F \text{ arbitraria} \end{cases}$$

Para verificarlo, definimos

$$\xi(x, t) = x - u(x, t)t$$

Entonces:

- $\partial_t u = \frac{dF}{d\xi} \partial_t \xi = F' \cdot (-\partial_t u \cdot t - u)$
- $\partial_x u = \frac{dF}{d\xi} \partial_x \xi = F' \cdot (1 - \partial_x u \cdot t)$

$$\partial_t u = (-\partial_t u \cdot t - u) F' \rightarrow \partial_t u = -\frac{u F'}{1 + t F'}$$

$$\partial_x u = (1 - \partial_x u \cdot t) F' \rightarrow \partial_x u = \frac{F'}{1 + t F'}$$

que desde luego satisface $\partial_t u + u \partial_x u = 0$

¿Quién es F ?

Si planteamos que la condición inicial es $u_0(x)$:

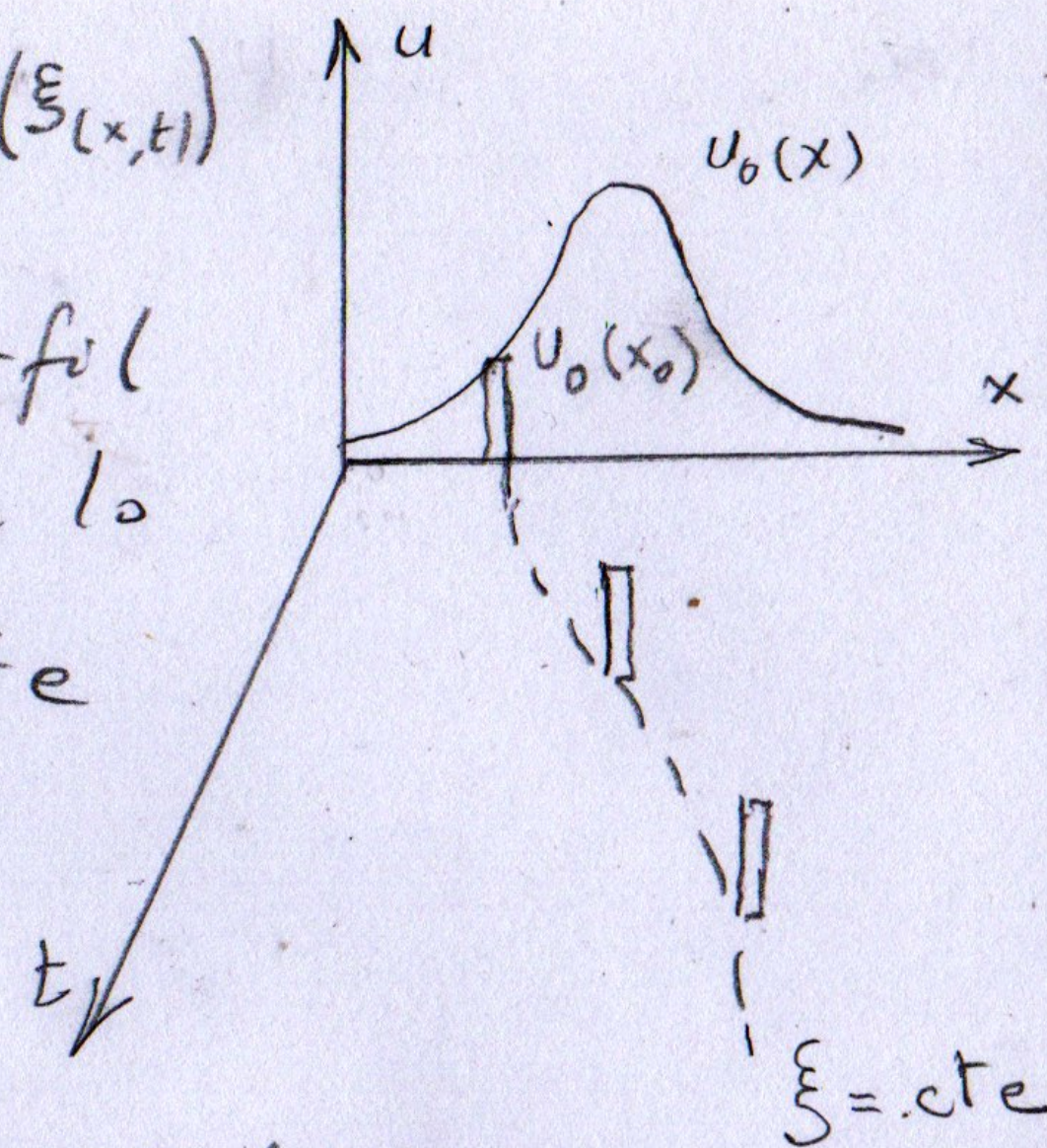
$$t=0 \rightarrow u(x, 0) = F(x) = u_0(x) \rightarrow F \equiv u_0$$

$$\therefore u(x, t) = u_0(x - u(x, t)t)$$

- Esta solución implícita dice que toda la información sobre la evolución está en el perfil inicial $u_0(x)$, ya que la velocidad en $u(x, t)$ es la velocidad que inicialmente tenía el punto $x - u(x, t)t$.
- Lo anterior es conceptualmente cierto, pero muy poco práctico.

Curvas características

- La solución formal $u(x,t) = u_0(\xi(x,t))$ con $\xi(x,t) = x - u(x,t)t$ permite imaginar que el perfil inicial $u_0(x)$ se propaga a lo largo de curvas $\xi(x,t) = \text{cte}$ en el plano (x,t) .

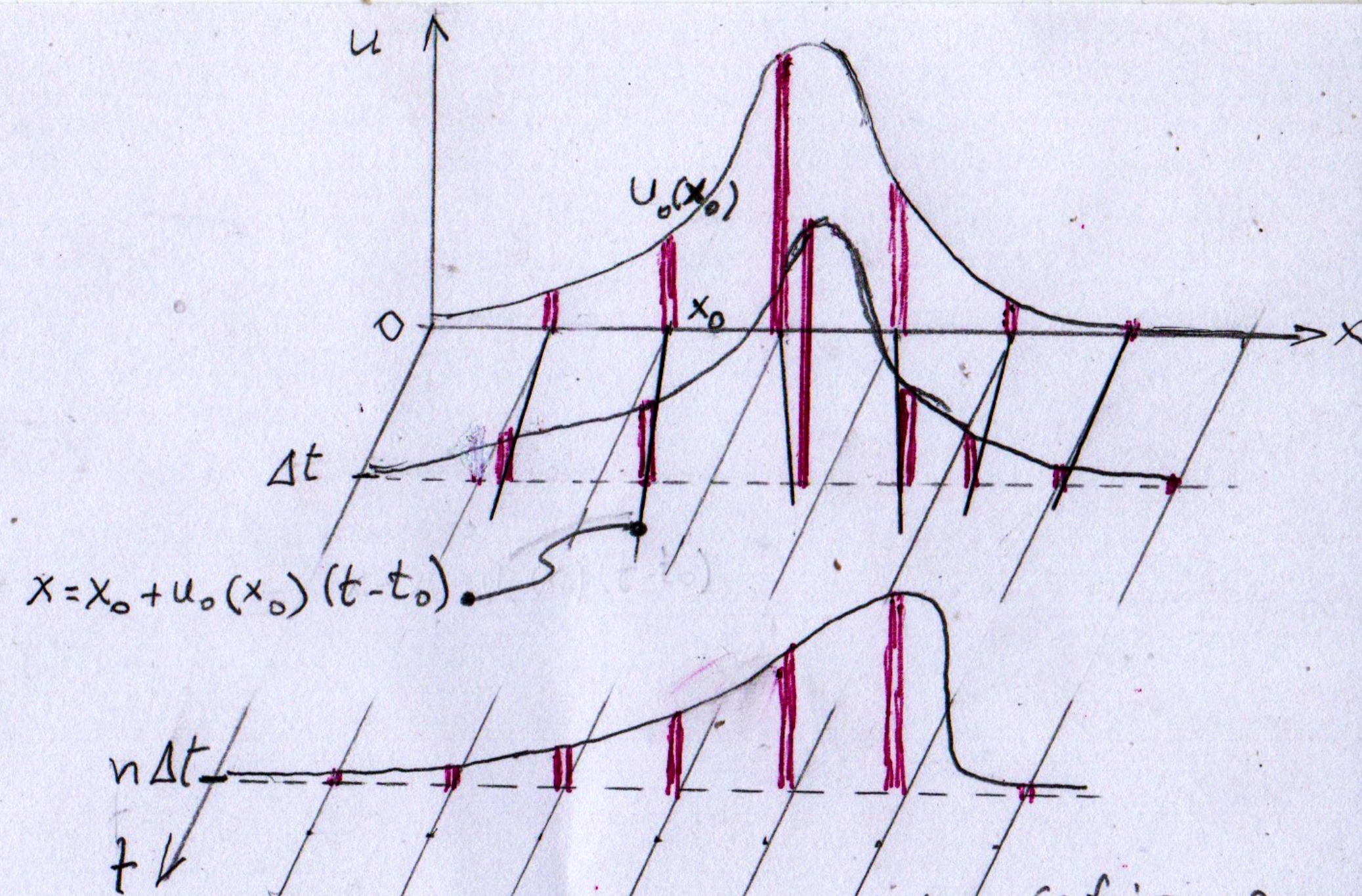


- A las curvas $\xi(x,t) = \text{cte}$ las llamamos curvas características.
- No conocemos esas curvas, pero podemos intentar un método perturbativo para ir de $t=0$ a $t=\Delta t$:

$$\xi(x,t) = x - u(x,t)t = \text{cte}$$

$$t=0 \rightarrow t=\Delta t \Rightarrow \Delta \xi = 0 = \Delta x - u_0(x_0) \Delta t$$

$$x = x_0 + u_0(x_0)(t - t_0)$$



- Es decir que entre 0 y Δt las características son (aprox.) rectas de pendiente $u_0(x_0)$ en (x,t)
- De Δt a $2\Delta t$ repetimos el procedimiento y vemos que la región $u'_0 > 0$ se dispersa, mientras que la $u'_0 < 0$ se concentra.
- Eventualmente, la cresta del perfil da origen a una estructura con $\partial_x u \sim -\infty$ (choque).

Método de las características

Veamos los efectos no lineales en la evolución de flujos ideales en 1D, a lo largo de x :

Ec. cont.: $\partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u = 0$

Ec. mov.: $\partial_t u + u \partial_x u + \frac{1}{\rho} \partial_x p = 0$

Polítropa: $p = \text{cte. } \rho^\gamma$

Def. la variable:

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{\gamma p}{\rho} \quad c = c(x, t)$$

Reemplazamos $p = \text{cte. } \rho^\gamma$ en la ec. movimiento:

$$\frac{1}{\rho} \partial_x p = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \partial_x \rho = c^2 \frac{\partial_x \rho}{\rho}$$

y ahora ponemos $p(x, t)$ en términos de $c(x, t)$:

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \text{cte. } \gamma \rho^{\gamma-1} \rightarrow \rho = \left(\frac{c^2}{\text{cte. } \gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \rightarrow \frac{\partial_x \rho}{\rho} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{\partial_x c}{c}$$

Entonces:

Ec. cont.: $\frac{2}{\gamma-1} (\partial_t c + u \partial_x c) + c \partial_x u = 0$

Ec. mov.: $\partial_t u + u \partial_x u + \frac{2}{\gamma-1} c \partial_x c = 0$

Son dos ecs. acopladas para los campos de velocidades $u(x, t)$ y $c(x, t)$. Podemos reescribirlas como:

$$\partial_t \left(\frac{u}{2} \right) + u \partial_x \left(\frac{u}{2} \right) + c \partial_x \left(\frac{c}{\gamma-1} \right) = 0$$

$$\partial_t \left(\frac{c}{\gamma-1} \right) + u \partial_x \left(\frac{c}{\gamma-1} \right) + c \partial_x \left(\frac{u}{2} \right) = 0$$

Sumando y restando estas ecuaciones:

$$\boxed{\left[\partial_t + (u \pm c) \partial_x \right] \left(\frac{u}{2} \pm \frac{c}{\gamma-1} \right) = 0}$$

Estas dos ecuaciones no lineales son de la forma $[\partial_t + u \partial_x] u = 0$. Veamos como resolverlas.

Curvas características e invariantes de Riemann

Dada una función $F(x,t)$ y una curva $(x(t), t)$ en el plano (x,t) , la variación de F sobre la curva está dada por

$$F(t) = F(x(t), t) \rightarrow \frac{dF}{dt} = \partial_t F + \frac{dx}{dt} \partial_x F$$

En particular, si $F = \text{cte}$ sobre $x(t)$ entonces:

$$\frac{dF}{dt} = \partial_t F + \frac{dx}{dt} \partial_x F = 0$$

Noten que las ecuaciones

$$\left[\partial_t + \underbrace{\left(\frac{u \pm c}{2} \right)}_{\frac{dx}{dt}} \partial_x \right] \underbrace{\left(\frac{u \pm c}{2} \right)}_F = 0$$

tienen esta forma.

- Las curvas $\frac{dx}{dt} = u \pm c$ se llaman características.
- Las funciones $F^\pm = \frac{u \pm c}{2}$ que permanecen constantes sobre ellas, se llaman invariantes de Riemann.

Es decir que:

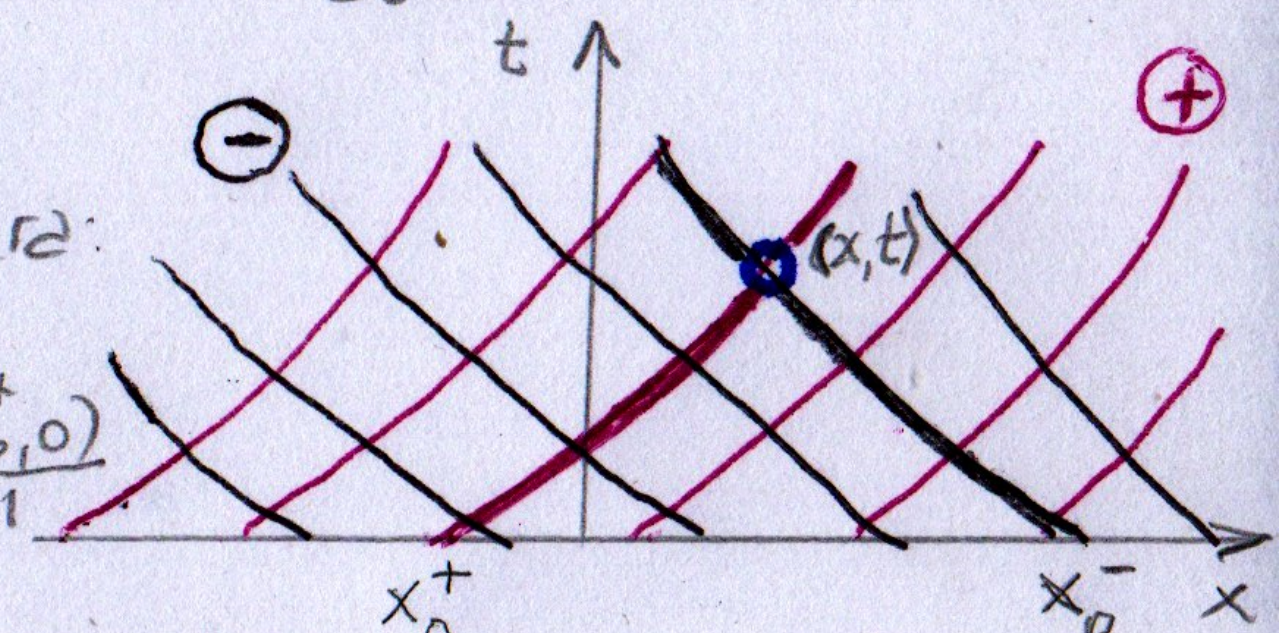
$$F^+ = \frac{u}{2} + \frac{c}{2} = \text{cte}^+ \text{ sobre } x^+(t) \text{ tq } \frac{dx^+}{dt} = u + c \text{ (curvas } \oplus)$$

$$F^- = \frac{u}{2} - \frac{c}{2} = \text{cte}^- \text{ sobre } x^-(t) \text{ tq } \frac{dx^-}{dt} = u - c \text{ (curvas } \ominus)$$

Entonces, para cualquier punto (x,t) como el de la figura:

$$F^+ = \frac{u(x,t)}{2} + \frac{c(x,t)}{2} = \frac{u(x_0^+, 0)}{2} + \frac{c(x_0^+, 0)}{2}$$

$$F^- = \frac{u(x,t)}{2} - \frac{c(x,t)}{2} = \frac{u(x_0^-, 0)}{2} - \frac{c(x_0^-, 0)}{2}$$



donde $u_0^\pm = u_0(x_0^\pm, 0)$ y $c_0^\pm = c(x_0^\pm, 0)$ son condiciones iniciales. De las ecs. anteriores, obtenemos $u(x,t)$ y $c(x,t)$ en función de las cond. iniciales:

$$u(x,t) = \frac{u_0^+ + u_0^-}{2} + \frac{c_0^+ - c_0^-}{2}$$

$$2 \frac{c(x,t)}{2} = \frac{u_0^+ - u_0^-}{2} + \frac{c_0^+ + c_0^-}{2}$$

Hemos resuelto parte del problema. Debemos todavía obtener las curvas. $x^\pm(t)$ tq $\frac{dx^\pm}{dt} = u \pm c$

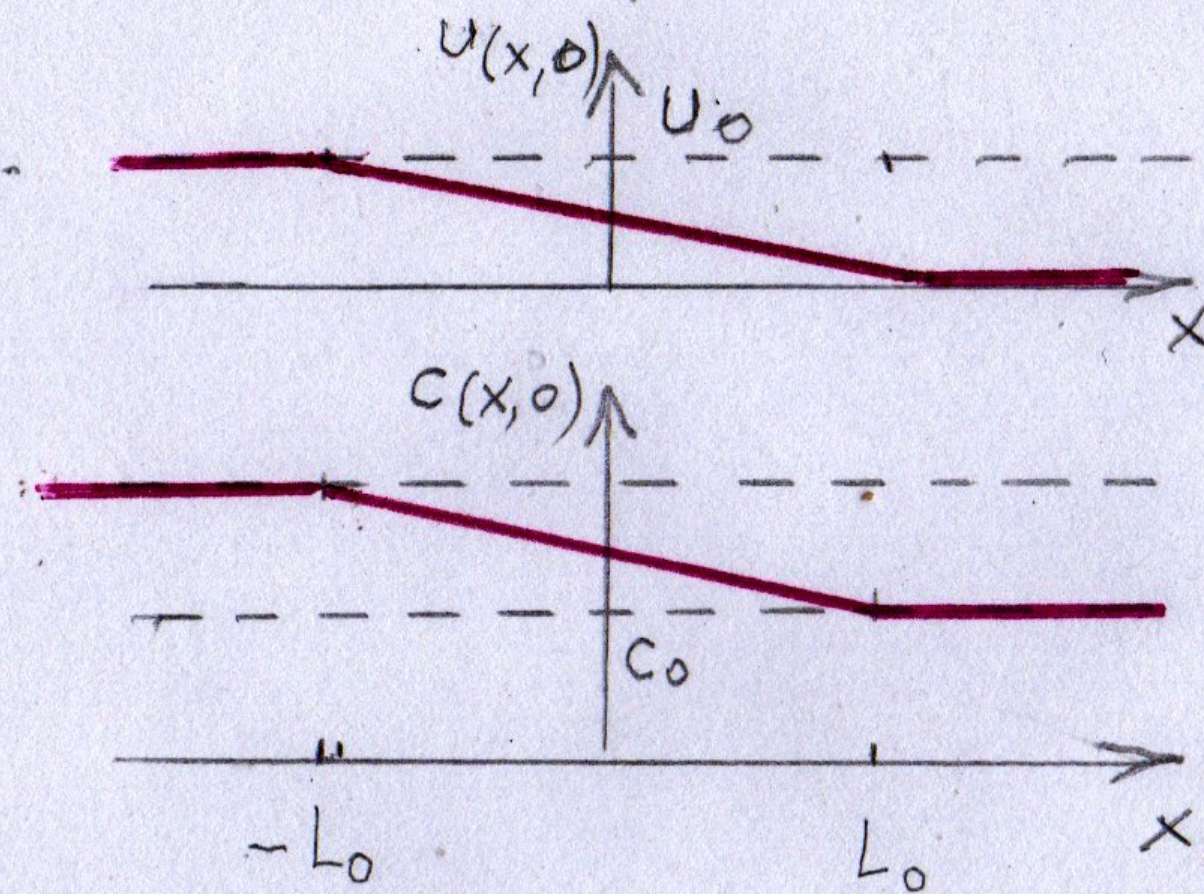
Formación y propagación de ondas de choque

Veamos un ejemplo que muestra la formación de una onda de choque.

Sean las cond. iniciales:

$$u(x,0) = \frac{u_0}{2} \left(1 - \tanh\left(\frac{x}{L_0}\right) \right)$$

$$c(x,0) = c_0 + \frac{\gamma-1}{2} u(x,0)$$



Calculemos $F^-(x,0)$:

$$F^-(x,0) = \frac{u(x,0)}{2} - \frac{1}{\gamma-1} \left(c_0 + \frac{\gamma-1}{2} u(x,0) \right) = -\frac{c_0}{\gamma-1} = \text{cte}^-$$

Noten que F^- no solo es cte en cada curva $\ominus$ sino que es indep. de x en $t=0$

Entonces: $F^-(x,t) = -\frac{c_0}{\gamma-1} = \text{cte}^-$, $\forall (x,t)$

Como evoluciona $c(x,t)$?

$$F^+ - F^- = \frac{2}{\gamma-1} c \rightarrow c(x,t) = \frac{\gamma-1}{2} (F^+ - F^-) = \text{cte}^+$$

$\forall u(x,t)$?

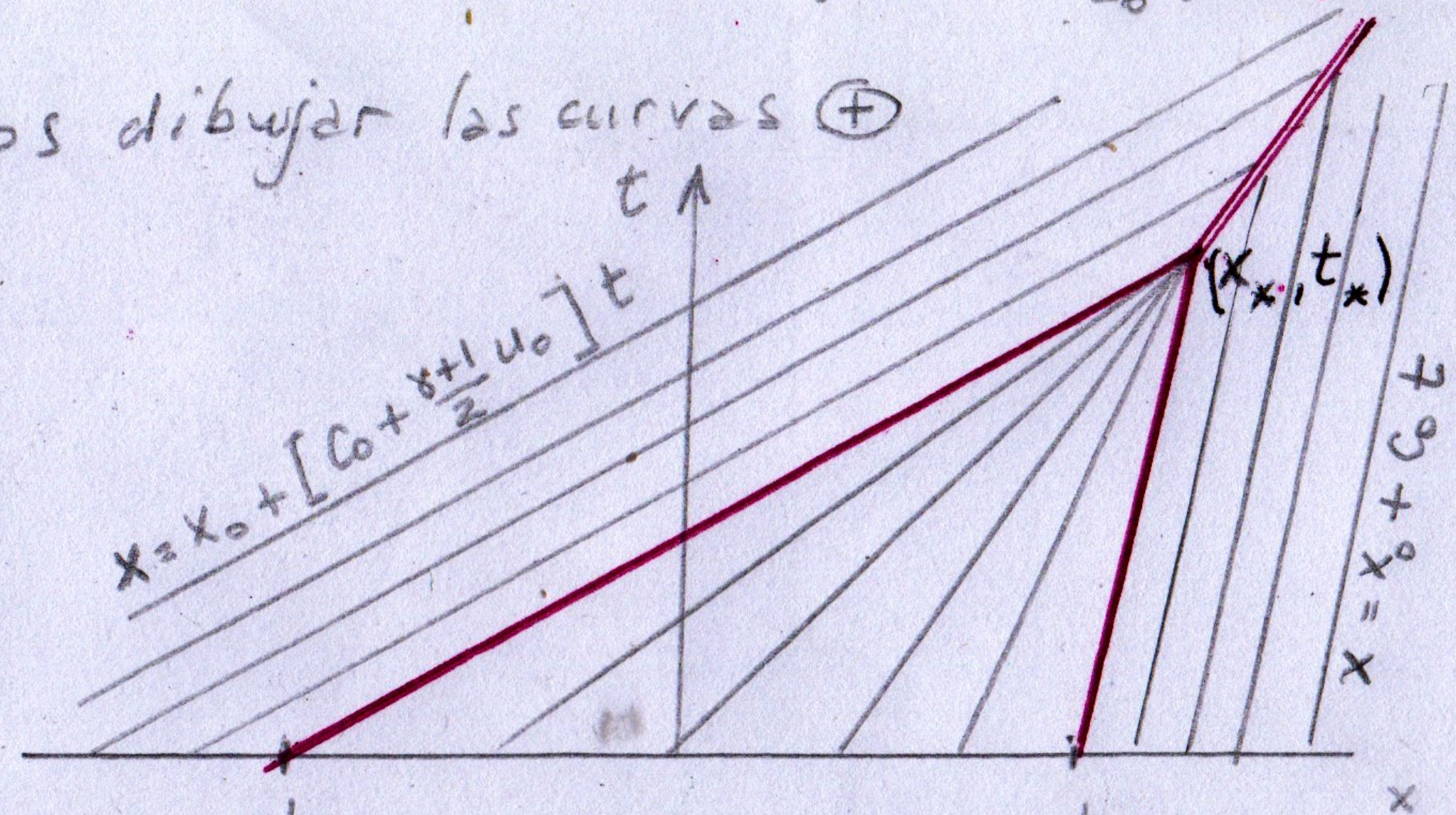
$$F^+(x,t) = \frac{u(x,t)}{2} + \frac{c(x,t)}{\gamma-1} \rightarrow u(x,t) = \text{cte}^+$$

Que forma tienen las curvas $\oplus$?

$$\frac{dx^+}{dt} = u + c \rightarrow x^+ = x_0^+ + [u(x_0,0) + c(x_0,0)] t$$

Si aproximamos $\tanh\left(\frac{x}{L_0}\right) \approx \begin{cases} 1 & x > L_0 \\ x/L_0 & -L_0 < x < L_0 \\ -1 & -L_0 > x \end{cases}$

Podemos dibujar las curvas $\oplus$



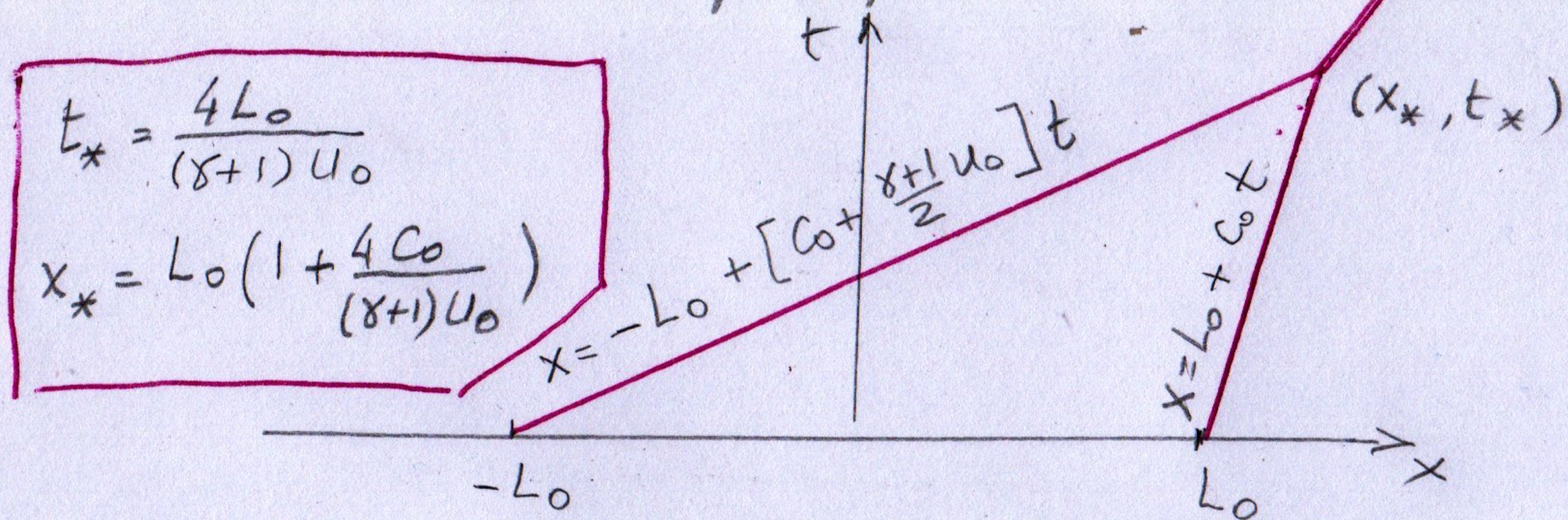
Formación y propagación de ondas de choque

• Para $x < -L_0 \rightarrow \tanh\left(\frac{x}{L_0}\right) \sim -1 \rightarrow \begin{cases} u(x,0) \approx U_0 \\ c(x,0) \approx c_0 + \frac{\gamma-1}{2} U_0 \end{cases}$

• Para $x > L_0 \rightarrow \tanh\left(\frac{x}{L_0}\right) \sim 1 \rightarrow \begin{cases} u(x,0) \approx 0 \\ c(x,0) \approx c_0 \end{cases}$

• Para $-L_0 < x < L_0$ las pendientes de las rectas van variando de manera dprox. lineal ($\tanh\left(\frac{x}{L_0}\right) \approx \frac{x}{L_0}$) entre $-L_0$ y L_0 .

• Noten que las rectas características se cortan. Lo hacen por "primera vez" en (x_*, t_*)



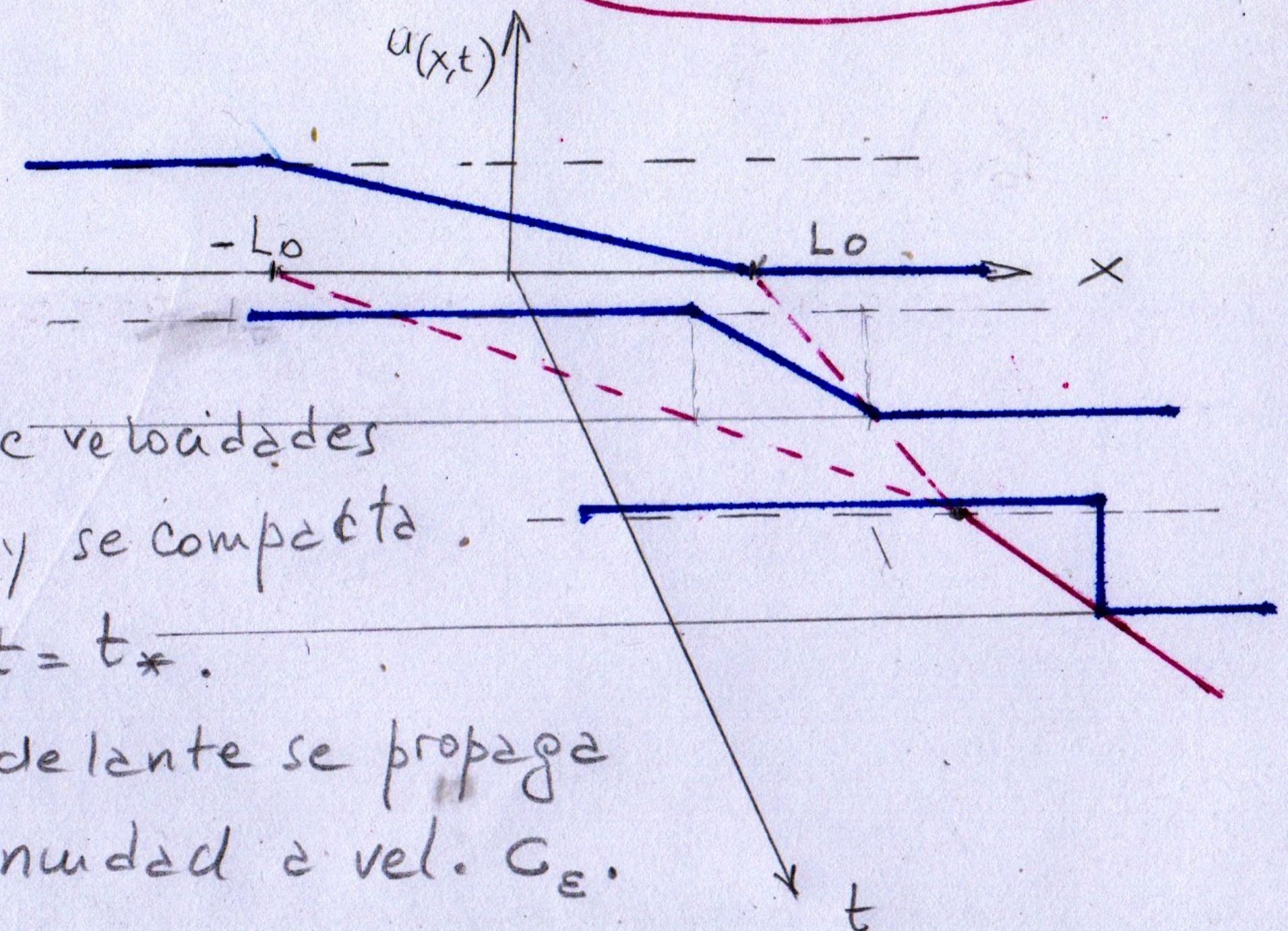
Las sucesivas rectas con $x_0^\pm = \pm(L_0 + \epsilon)$ se cruzan en

$$t_\epsilon = \frac{4(L_0 + \epsilon)}{(\gamma+1)U_0}$$

$$x_\epsilon = (L_0 + \epsilon) \left(1 + \frac{4c_0}{(\gamma+1)U_0}\right)$$

De modo que la velocidad del choque (x_ϵ, t_ϵ) resulta simplemente:

$$c_\epsilon = \frac{x_\epsilon}{t_\epsilon} \rightarrow c_\epsilon = c_0 + \frac{\gamma+1}{4} U_0$$



El perfil de velocidades se propaga y se compacta de $t=0$ a $t=t_*$.

De t_* en adelante se propaga una discontinuidad a vel. c_ϵ .