

Repaso de Clase 11

- Flujos compresibles >>> Ecuación de continuidad.
- Propagación de ondas acústicas >>> Ondas no dispersivas.
- Generación de ondas de choque >>> $\partial_t u + u \partial_x u = 0$
- Método de las características



Método de las características

Veamos los efectos no lineales en la evolución de flujos ideales en 1D, a lo largo de x :

Ec. cont.: $\partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u = 0$

Ec. mov.: $\partial_t u + u \partial_x u + \frac{1}{\rho} \partial_x p = 0$

Polítropa: $p = \text{cte. } \rho^\gamma$

Def. la variable:

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{\gamma p}{\rho} \quad c = c(x, t)$$

Reemplazamos $p = \text{cte. } \rho^\gamma$ en la ec. movimiento:

$$\frac{1}{\rho} \partial_x p = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \partial_x \rho = c^2 \frac{\partial_x \rho}{\rho}$$

y ahora ponemos $p(x, t)$ en términos de $c(x, t)$:

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \text{cte. } \gamma \rho^{\gamma-1} \rightarrow \rho = \left(\frac{c^2}{\text{cte. } \gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \rightarrow \frac{\partial_x \rho}{\rho} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{\partial_x c}{c}$$

Entonces:

Ec. cont.: $\frac{2}{\gamma-1} (\partial_t c + u \partial_x c) + c \partial_x u = 0$

Ec. mov.: $\partial_t u + u \partial_x u + \frac{2}{\gamma-1} c \partial_x c = 0$

Son dos ecs. acopladas para los campos de velocidades $u(x, t)$ y $c(x, t)$. Podemos reescribirlas como:

$$\partial_t \left(\frac{u}{2} \right) + u \partial_x \left(\frac{u}{2} \right) + c \partial_x \left(\frac{c}{\gamma-1} \right) = 0$$

$$\partial_t \left(\frac{c}{\gamma-1} \right) + u \partial_x \left(\frac{c}{\gamma-1} \right) + c \partial_x \left(\frac{u}{2} \right) = 0$$

Sumando y restando estas ecuaciones:

$$\boxed{[\partial_t + (u \pm c) \partial_x] \left(\frac{u}{2} \pm \frac{c}{\gamma-1} \right) = 0}$$

Estas dos ecuaciones no lineales son de la forma $[\partial_t + u \partial_x] u = 0$. Veamos como resolverlas.

Curvas características e invariantes de Riemann

Dada una función $F(x,t)$ y una curva $(x(t), t)$ en el plano (x,t) , la variación de F sobre la curva está dada por

$$F(t) = F(x(t), t) \rightarrow \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial F}{\partial x}$$

En particular, si $F = cte$ sobre $x(t)$ entonces:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Noten que las ecuaciones

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{(u \pm c)}_{\frac{dx}{dt}} \frac{\partial}{\partial x} \right] \underbrace{\left(\frac{u \pm c}{2} \right)}_F = 0$$

tienen esta forma.

- Las curvas $\frac{dx}{dt} = u \pm c$ se llaman características.
- Las funciones $F^\pm = \frac{u \pm c}{2}$ que permanecen constantes sobre ellas, se llaman invariantes de Riemann.

Es decir que:

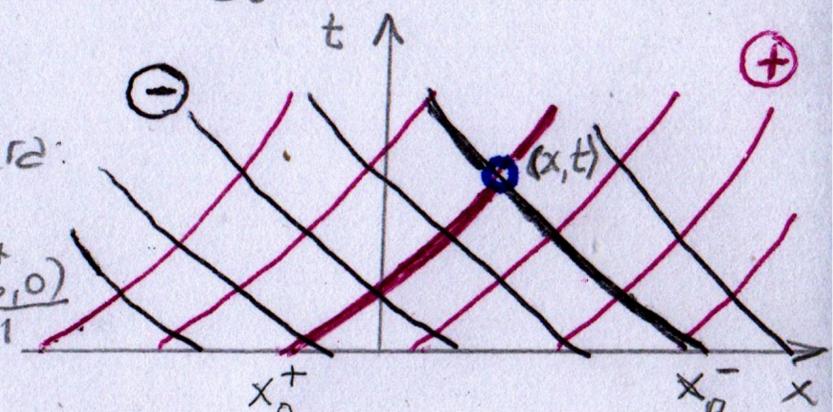
$$F^+ = \frac{u}{2} + \frac{c}{2} = cte^+ \text{ sobre } x^+(t) \text{ tq } \frac{dx^+}{dt} = u + c \text{ (curvas } \oplus)$$

$$F^- = \frac{u}{2} - \frac{c}{2} = cte^- \text{ sobre } x^-(t) \text{ tq } \frac{dx^-}{dt} = u - c \text{ (curvas } \ominus)$$

Entonces, para cualquier punto (x,t) como el de la figura:

$$F^+ = \frac{u(x,t)}{2} + \frac{c(x,t)}{2} = \frac{u(x_0^+, 0)}{2} + \frac{c(x_0^+, 0)}{2}$$

$$F^- = \frac{u(x,t)}{2} - \frac{c(x,t)}{2} = \frac{u(x_0^-, 0)}{2} - \frac{c(x_0^-, 0)}{2}$$



donde $u_0^\pm = u_0(x_0^\pm, 0)$ y $c_0^\pm = c_0(x_0^\pm, 0)$ son condiciones iniciales. De las ecs. anteriores, obtenemos $u(x,t)$ y $c(x,t)$ en función de las cond. iniciales:

$$u(x,t) = \frac{u_0^+ + u_0^-}{2} + \frac{c_0^+ - c_0^-}{2}$$

$$2 \frac{c(x,t)}{2} = \frac{u_0^+ - u_0^-}{2} + \frac{c_0^+ + c_0^-}{2}$$

Hemos resuelto parte del problema. Debemos todavía obtener las curvas.

$$x^\pm(t) \text{ tq } \frac{dx^\pm}{dt} = u \pm c$$

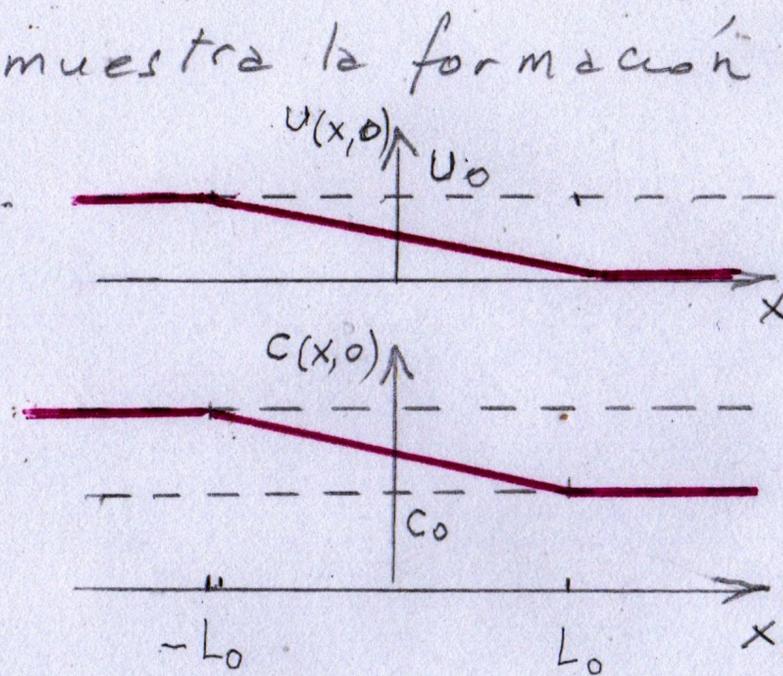
Formación y propagación de ondas de choque

Veamos un ejemplo que muestra la formación de una onda de choque.

Sean las cond. iniciales:

$$u(x,0) = \frac{u_0}{2} \left(1 - \operatorname{tgh} \left(\frac{x}{L_0} \right) \right)$$

$$c(x,0) = c_0 + \frac{\gamma-1}{2} u(x,0)$$



Calculamos $F^-(x,0)$:

$$F^-(x,0) = \frac{u(x,0)}{2} - \frac{1}{\gamma-1} \left(c_0 + \frac{\gamma-1}{2} u(x,0) \right) = -\frac{c_0}{\gamma-1} = \text{cte}^-$$

Noten que F^- no solo es cte en cada curva \ominus sino que es indep. de x en $t=0$

Entonces: $F^-(x,t) = -\frac{c_0}{\gamma-1} = \text{cte}^-$, $\forall (x,t)$

Como evoluciona $c(x,t)$?

$$F^+ - F^- = \frac{2}{\gamma-1} c \rightarrow c(x,t) = \frac{\gamma-1}{2} (F^+ - F^-) = \text{cte}^+$$

$\forall u(x,t)$?

$$F^+(x,t) = \frac{u(x,t)}{2} + \frac{c(x,t)}{\gamma-1} \rightarrow u(x,t) = \text{cte}^+$$

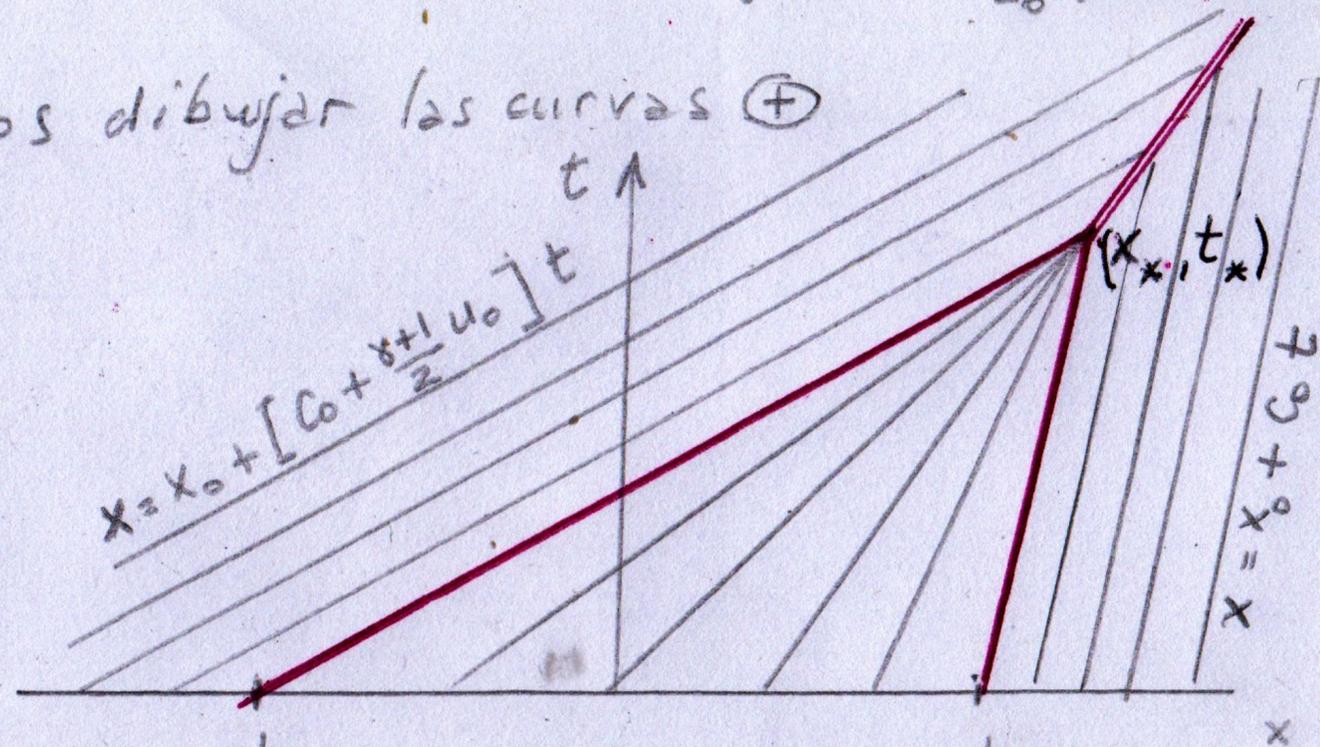
Que forma tienen las curvas \oplus ?

$$\frac{dx^+}{dt} = u + c \rightarrow x^+ = x_0^+ + [u(x_0,0) + c(x_0,0)] t$$

rectas!

Si aproximamos $\operatorname{tgh} \left(\frac{x}{L_0} \right) \approx \begin{cases} 1 & x > L_0 \\ x/L_0 & -L_0 < x < L_0 \\ -1 & -L_0 > x \end{cases}$

Podemos dibujar las curvas \oplus



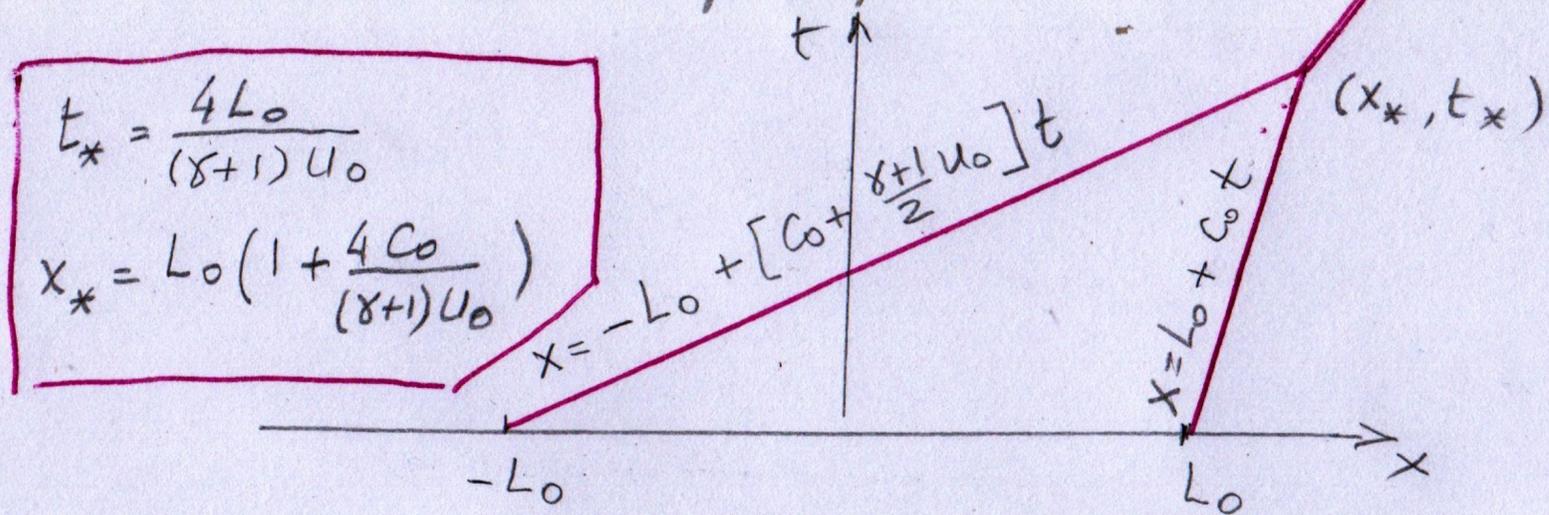
Formación y propagación de ondas de choque

• Para $x < -L_0 \rightarrow \operatorname{tgh}\left(\frac{x}{L_0}\right) \sim -1 \rightarrow \begin{cases} u(x,0) \approx U_0 \\ c(x,0) \approx c_0 + \frac{\gamma-1}{2} U_0 \end{cases}$

• Para $x > L_0 \rightarrow \operatorname{tgh}\left(\frac{x}{L_0}\right) \sim 1 \rightarrow \begin{cases} u(x,0) \approx 0 \\ c(x,0) \approx c_0 \end{cases}$

• Para $-L_0 < x < L_0$ las pendientes de las rectas van variando de manera dprox. lineal ($\operatorname{tgh}\left(\frac{x}{L_0}\right) \approx \frac{x}{L_0}$) entre $-L_0$ y L_0 .

• Noten que las rectas características se cortan. Lo hacen por "primera vez" en (x_*, t_*)

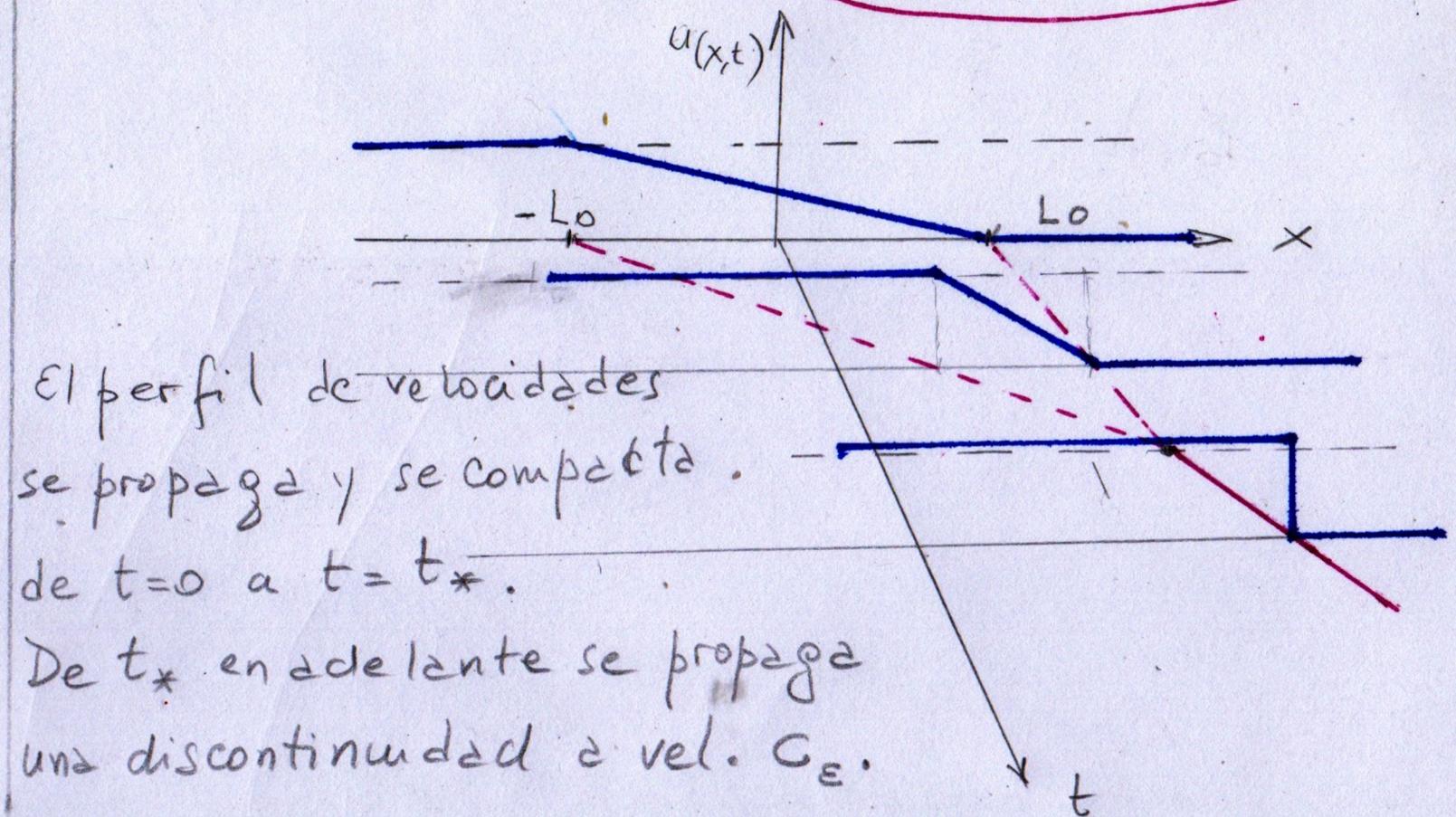


Las sucesivas rectas con $x_0^\pm = \pm(L_0 + \epsilon)$ se cruzan en

$$t_\epsilon = \frac{4(L_0 + \epsilon)}{(\gamma+1)U_0} \quad x_\epsilon = (L_0 + \epsilon) \left(1 + \frac{4c_0}{(\gamma+1)U_0}\right)$$

De modo que la velocidad del choque (x_ϵ, t_ϵ) resulta simplemente:

$$c_\epsilon = \frac{x_\epsilon}{t_\epsilon} \rightarrow c_\epsilon = c_0 + \frac{\gamma+1}{4} U_0$$

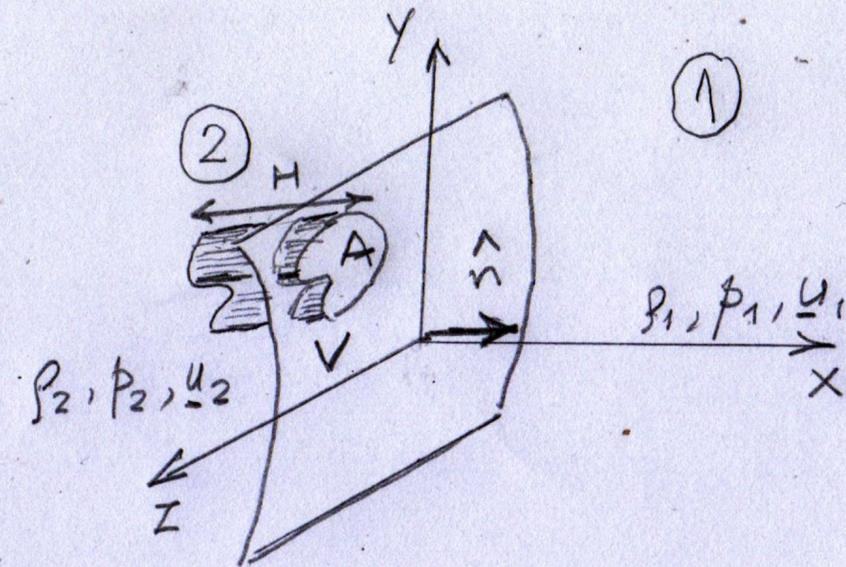


Choques: Flujo de masa

Una vez formada la superficie de discontinuidad o choque, a uno y otro lado tenemos recintos donde las variables que describen el estado del fluido ($\rho(\underline{r}, t)$, $p(\underline{r}, t)$, $\underline{u}(\underline{r}, t)$) evolucionan en forma continua y derivable. Pero que ecuaciones se cumplen en el choque, donde las derivadas no están definidas?

Flujo de masa

- En el referencial fijo al choque, vemos un medio ① caracterizado por $p_1, \rho_1, \underline{u}_1$ y un medio ② dado por $p_2, \rho_2, \underline{u}_2$.



- Integramos la ecuación de continuidad en el pequeño cilindro de volumen $V = A \cdot H$:

$$\int_V \partial_t \rho \, d^3r = - \int_V \nabla \cdot (\rho \underline{u}) \, d^3r = - \oint_{S_V} \rho \underline{u} \cdot d\underline{S}$$

La superficie S_V tiene caras S_1, S_2 y S_{lat} .

Por lo tanto:

$$\int_V d^3r \partial_t \rho = - \int_{S_{lat}} \rho \underline{u} \cdot d\underline{S} - \int_{S_1} \rho \underline{u} \cdot d\underline{S}_1 - \int_{S_2} \rho \underline{u} \cdot d\underline{S}_2$$

$\swarrow H \rightarrow 0$ $\swarrow H \rightarrow 0$
 0 0

Como $d\underline{S}_1 \approx A \hat{n}$ } $\rightarrow -\rho_1 \underline{u}_1 \cdot \hat{n} A + \rho_2 \underline{u}_2 \cdot \hat{n} A = 0$
 $d\underline{S}_2 \approx -A \hat{n}$ }

Si definimos $[[F]] = F_2 - F_1$ Primera relación de $[[\rho \underline{u} \cdot \hat{n}]] = 0$ RH1 Rankine-Hugoniot

Esta expresión establece que el flujo de masa que ingresa al choque desde un medio, es igual al que egresa por el otro. Es decir que en el choque no se crea ni destruye masa.

Choques: Flujo de impulso lineal y energía

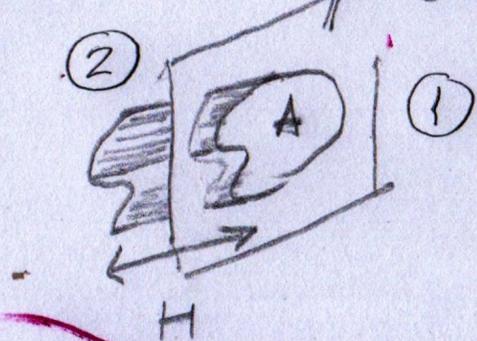
Flujo de impulso lineal

Para un fluido ideal, vimos que combinando las ecuaciones de continuidad y de Euler se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) &= 0 \\ \rho [\partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}] &= -\nabla p \end{aligned} \right\} \rightarrow \partial_t (\rho \underline{u}) = -\nabla \cdot \underline{\underline{\pi}}$$

$\underline{\underline{\pi}} = p \underline{\underline{1}} + \rho \underline{u} \underline{u}$: flujo de impulso

Integrando ahora esta ecuación en el cilindro de volumen V ; obtenemos para $H \rightarrow 0$:



$$[\underline{\underline{\pi}} \cdot \hat{n}] = 0 \rightarrow \boxed{[\rho \underline{u} \underline{u} \cdot \hat{n} + p \hat{n}] = 0} \text{ RH2}$$

Llamamos RH2 a esta relación vectorial, que expresa la conservación de impulso lineal al atravesar el choque.

Flujo de energía

Para un flujo compresible y adiabático, la densidad de energía es

$$\frac{\rho u^2}{2} + \rho \epsilon \quad \epsilon = \frac{\text{energía interna}}{\text{masa}}$$

Por el Primer Principio de la Termodinámica:

$$d\epsilon = \delta Q - p dV = \delta Q - p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

En el caso adiabático:

$$\left. \begin{aligned} \delta Q &= 0 \\ p &= K \rho^\gamma \end{aligned} \right\} \rightarrow d\epsilon = \frac{p}{\rho^2} d\rho = K \rho^{\gamma-2} d\rho = d\left[\frac{p}{(\gamma-1)\rho}\right]$$

Entonces: $\epsilon = \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$

La variación de energía del fluido es:

$$\partial_t \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1} \right) = \frac{u^2}{2} \partial_t \rho + \rho \underline{u} \cdot \partial_t \underline{u} + \frac{1}{\gamma-1} \partial_t p$$

Relaciones de Rankine-Hugoniot

$$\therefore \partial_t \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1} \right) = -\frac{u^2}{2} \nabla \cdot (\rho \underline{u}) - \underline{u} \cdot [\rho (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} + \nabla p] + \frac{\kappa \gamma p^{\gamma-1}}{\gamma-1} \partial_t p$$

$$\partial_t \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1} \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{\rho u^2}{2} \underline{u} \right) - \underline{u} \cdot \nabla p - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \nabla \cdot (\rho \underline{u})$$

En el último término:

$$-\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} (\rho \nabla \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \rho) = -\frac{\gamma}{\gamma-1} p \nabla \cdot \underline{u} - \frac{1}{\gamma-1} \underline{u} \cdot \nabla p$$

en síntesis:

$$\underbrace{\partial_t \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1} \right)}_{\text{densidad de energía}} = -\nabla \cdot \underbrace{\left[\frac{\rho u^2}{2} \underline{u} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p \underline{u} \right]}_{\text{flujo de energía}}$$

Entonces, integrado en el volumen $V = A \cdot H$,

en el límite $H \rightarrow 0$

$$\boxed{\left[\left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p \right) \underline{u} \cdot \hat{n} \right]} = 0 \quad \text{RH3}$$

Entonces, pese a que las variables no son derivables en la superficie de discontinuidad, deben satisfacerse las relaciones de Rankine-Hugoniot, que son expresiones integrales de las ecuaciones y funcionan como condiciones de contorno de una interfase interna del fluido.

$$\boxed{[\rho \underline{u} \cdot \hat{n}] = 0}$$

$$\boxed{[\rho \underline{u} \underline{u} \cdot \hat{n} + p \hat{n}] = 0}$$

$$\boxed{\left[\left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p \right) \underline{u} \cdot \hat{n} \right]} = 0$$

Rankine
Hugoniot

Dos tipos de choques

Podemos distinguir dos tipos de choques:

(a) sin flujo de masa

$$\left. \begin{array}{l} \rho_1 \underline{u}_1 \cdot \hat{n} = \rho_2 \underline{u}_2 \cdot \hat{n} \\ \text{Sup. } \rho_1 \neq 0 \neq \rho_2 \end{array} \right\} \rightarrow \rho_{1x} = 0 = \rho_{2x}$$

También se llaman discontinuidades tangenciales o de contacto ya que los E.F. no cruzan el choque.

$$\text{RH2 } [\rho \underline{u} u_x + p \hat{x}] = 0 \rightarrow \rho_1 = \rho_2$$

$$\text{RH3 } \left[u_x \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p \right) \right] = 0 \text{ se satisface trivialmente}$$

(b) con flujo de masa

$$\dot{j} = \rho_1 u_{1x} = \rho_2 u_{2x} \neq 0$$

$$\text{RH2 } [\rho \underline{u} u_x + p \hat{x}] = 0 \xrightarrow{\hat{i}} [u_x] = 0$$

$$\xrightarrow{\hat{i}} [\rho u_x^2 + p] = 0$$

$$\text{RH3 } \left[u_x \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p \right) \right] = 0 \rightarrow \left[\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \right] = 0$$

La relación $[u_x] = 0$ permite, desde el referencial \underline{u}_{1L} , ver el problema como 1D. Es decir $\underline{u} = u \hat{x}$

$$\left. \begin{array}{l} j = \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \\ \rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 \\ \frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Dados } \rho_1, u_1, p_1 \\ \text{puedo obtener} \\ \rho_2, u_2, p_2 \end{array}$$

Noten que las velocidades u_1, u_2 son respecto del referencial del choque. Si en la práctica uno de los medios se encuentra en reposo, debemos realizar una transformación de Galileo.