

Práctica 0: Vectores y Tensores

Problema 1. Delta de Krönecker y densidad tensorial de Levi-Civita. La delta de Krönecker es un tensor isótropo de segundo orden cuyas componentes están dadas

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases},$$

con $1 \leq i, j \leq 3$. La densidad tensorial de Levi-Civita es un pseudotensor de tercer orden con componentes

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j, k\} \text{ son una permutación par de } \{1, 2, 3\} \\ -1 & \text{si } \{i, j, k\} \text{ son una permutación impar de } \{1, 2, 3\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

(i) Visualice gráficamente la densidad tensorial ϵ_{ijk} . ¿Cuántos elementos tiene?

(ii) Compruebe la identidad:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}.$$

(iii) Verifique las siguientes identidades:

- a. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{irs} = \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}$
- b. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$
- c. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$
- d. $\delta_{mn}\delta_{mn} = 3$

(iv) Si $\{\hat{e}_i, i = 1, 2, 3\}$ es una terna de versores ortogonales, verifique que:

- a. $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \hat{e}_i = \epsilon_{ijk}A_jB_k$
- b. $(\vec{\nabla} \times \vec{C}) \cdot \hat{e}_i = \epsilon_{ijk}\partial_jC_k$

Problema 2. Descomposición de un tensor de segundo orden Demuestre que todo tensor de segundo orden σ_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) se puede descomponer como

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij} + s_{ij} + a_{ij},$$

donde λ es un escalar, s_{ij} es un tensor simétrico de traza nula, y a_{ij} es un tensor antisimétrico.

Problema 3. Identidades vectoriales empleando notación indicial Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ y \vec{s} cuatro vectores, y ψ y ϕ dos funciones escalares. Utilizando notación indicial, verifique las siguientes identidades:

- (i) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$
- (ii) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{w}) - \vec{w}(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- (iii) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{w} \times \vec{s}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})(\vec{v} \cdot \vec{s}) - (\vec{u} \cdot \vec{s})(\vec{v} \cdot \vec{w})$
- (iv) $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$, donde $\vec{r} = (x, y, z)$
- (v) $\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$

$$(vi) \vec{\nabla}|\vec{r}| = \frac{\vec{r}}{r}, \text{ donde } r = |\vec{r}|$$

$$(vii) \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$(viii) \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0$$

$$(ix) \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0$$

$$(x) \nabla^2\psi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\psi)$$

$$(xi) \nabla^2(\phi\psi) = \phi\nabla^2\psi + \psi\nabla^2\phi + 2\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi$$

$$(xii) \vec{\nabla}(\phi\psi) = \phi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\phi$$

$$(xiii) \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) - \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v})$$

$$(xiv) \vec{\nabla} \cdot (\phi\vec{u}) = \phi\vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\phi$$

$$(xv) \vec{\nabla} \times (\phi\vec{u}) = \phi\vec{\nabla} \times \vec{u} + \vec{\nabla}\phi \times \vec{u}$$

$$(xvi) \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$$

$$(xvii) \vec{\nabla}(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})$$

$$(xviii) \nabla^2\vec{u} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u}$$

$$(xix) (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})$$