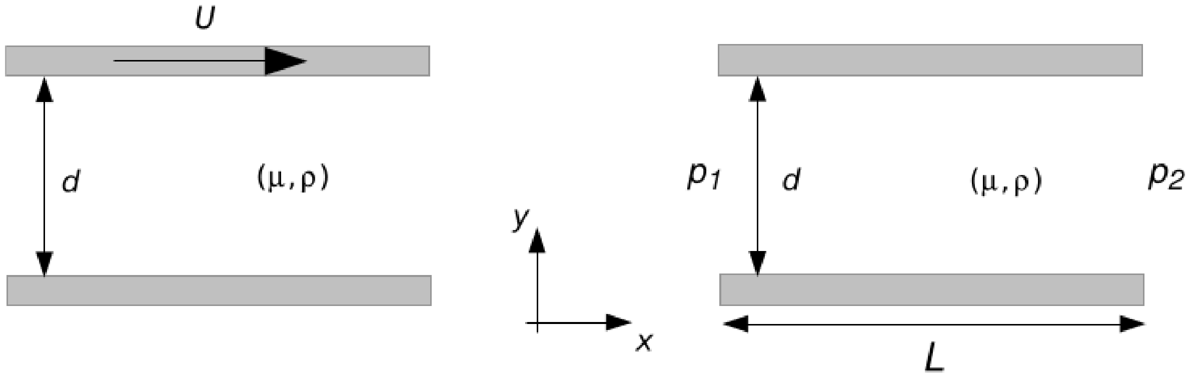
Práctica 5: Flujos viscosos

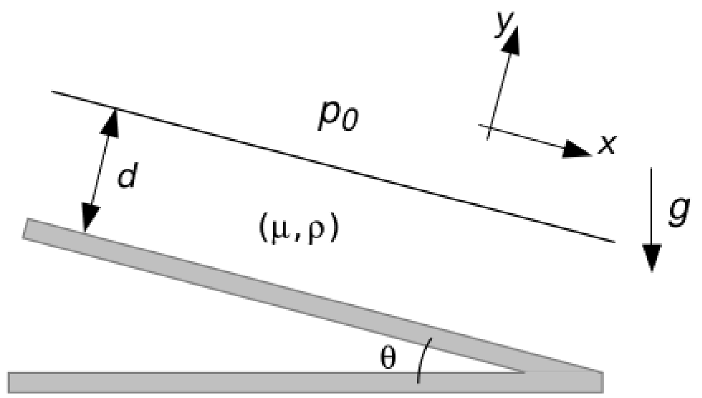
Problema 1. Considere el caso del flujo estacionario de un fluido viscoso con viscosidad dinámica μ y densidad ρ constantes, cuyo campo de velocidades $\vec{v}$ es solamente función de la coordenada transversal al movimiento

$$\vec{v}(\vec{r}) = v_x(y)\hat{x} \quad .$$

El flujo tiene simetría de traslación en la dirección $\hat{z}$.
(i) Demuestre que en estas condiciones $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\vec{v} = 0$.
(ii) Encuentre el campo de velocidades cuando el fluido satisface las siguientes condiciones de contorno:
(a) El movimiento del fluido está limitado por dos planos infinitos separados una distancia d. El plano inferior está en reposo y el superior se desplaza en la dirección x con velocidad U constante.
(b) Idem (a) pero ahora el movimiento se establece por un gradiente de presión constante igual a $\Delta p/L = (p_2 - p_1)/L$, donde L es una distancia característica de variación de la presión, y las presiones p_1 y p_2 son medidas como se indica en la figura.
(iii) Para ambos casos, calcule el esfuerzo viscoso sobre el contorno sólido.



Problema 2. Una capa de líquido muy viscoso fluye bajo la acción de la gravedad sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal.
(i) Suponiendo que el espesor de la capa de fluido d es uniforme, y que el flujo es estacionario, halle la velocidad del líquido en función de la distancia normal al plano y.
(ii) Determine la relación entre la velocidad promedio y la velocidad máxima en el fluido.
(iii) Calcule el caudal másico por unidad de ancho del plano.



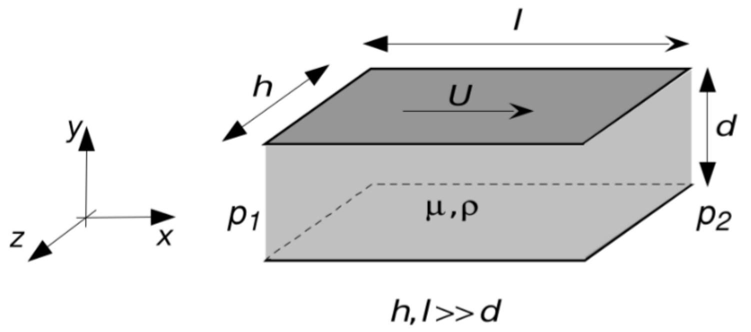
Problema 3. Resuelva nuevamente el problema 2.(i), pero ahora considerando dos fluidos con densidades ρ_1 y ρ_2 y viscosidades dinámicas μ_1 y μ_2 respectivamente, que se encuentran uno encima del otro, con espesores $h1$ y $h2$.

Problema 4. Un fluido se desplaza en el interior de un conducto cilíndrico de radio a, siendo su movimiento establecido por un gradiente de presiones constante igual a $\Delta p/L$, donde L es la longitud del cilindro.
(i) Calcule el campo de velocidades considerando que el mismo es solo función de la coordenada transversal al movimiento.
(ii) Calcule el esfuerzo viscoso sobre el contorno sólido.

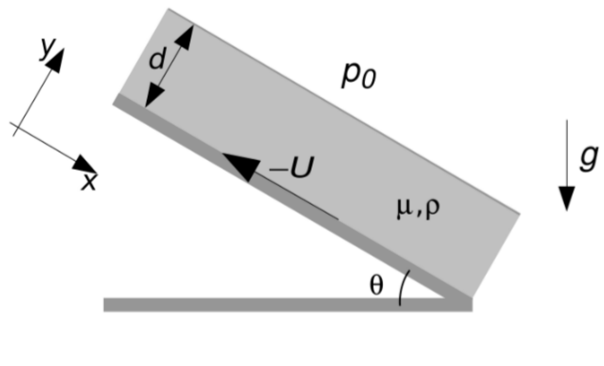
Problema 5. Mediante análisis dimensional, muestre que la cantidad de masa de fluido que pasa por unidad de tiempo (el caudal Q, también llamado "descarga") a través de un conducto de sección circular como en el flujo de Poiseuille, depende de la potencia cuarta del radio del conducto. Además, vea que es proporcional al gradiente de presiones entre los extremos del tubo e inversamente proporcional a la viscosidad cinemática.

Problema 6. Para las configuraciones de líquidos con viscosidad dinámica μ y densidad ρ que se listan en (i)-(iv):
(i) Encuentre una solución laminar y estacionaria para el campo de velocidades.
(ii) Realice el análisis dimensional de la magnitud que se indica, y compruébelo luego por cálculo analítico.

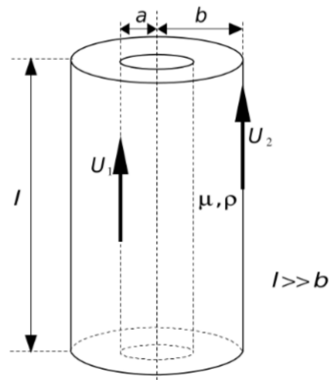
i. y_0: ubicación del punto de velocidad máxima.



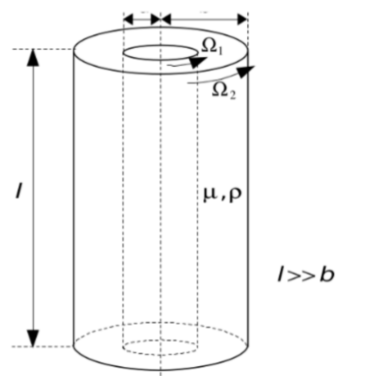
ii. σ: fuerza que realiza el plano por unidad de superficie.



iii. Q: caudal.



iv. $N_{1,2}$: cupla que realiza cada cilindro.



Problema 7. Considere el movimiento estacionario de una esfera sólida de masa m y diámetro D en el seno de un líquido viscoso en reposo, con viscosidad dinámica μ y densidad ρ. La esfera se mueve con velocidad constante $-U\hat{x}$, y para que el movimiento pueda ser considerado estacionario debe describirse desde un sistema inercial fijo a la esfera. Desde el mismo, el fluido se desplaza lejos de la esfera con velocidad U. Se quiere analizar la fuerza de arrastre que el fluido ejerce sobre la esfera.
(i) Estime mediante análisis dimensional la forma funcional de esta fuerza, en los casos de velocidades muy bajas y muy altas, es decir, cuando el número de Reynolds $Re = UL/\nu$ es muy pequeño ($Re \ll 1$), y cuando el número de Reynolds es muy grande ($Re \gg 1$). Aquí L es alguna escala característica del problema, y $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática.
(ii) Con el resultado de (i), encuentre las expresiones correspondientes a la velocidad límite que alcanza la esfera cayendo bajo la acción de la gravedad en el seno del fluido. Observe que la fuerza obtenida en (i) no depende solamente del número de Reynolds, ya que la gravedad es importante en este caso. El otro número adimensional que interviene en la fuerza es el número de Froude

$$F = \frac{U^2}{Lg} \quad ,$$

donde g es la aceleración de la gravedad.
(iii) Considere ahora el flujo no estacionario, donde además de los parámetros y variables del inciso (i), interviene un tiempo característico τ que determina la tasa de variación del flujo (por ejemplo, el período de una oscilación que realiza el cuerpo). Vea entonces que las dos cantidades adimensionales que pueden formarse son el número de Reynolds y el de Strouhal

$$S = \frac{U\tau}{L} \quad .$$

Problema 8. Considere un fluido inicialmente en reposo que llena el semiespacio $y > 0$, con viscosidad dinámica μ y densidad ρ uniforme. En $y = 0$, el fluido está en contacto con un plano infinito. A $t = 0$ el plano es puesto súbitamente en movimiento con velocidad constante $U\hat{x}$. Asumiendo que el campo de velocidades es solo función del tiempo y de la coordenada vertical y:
(i) Realice el análisis dimensional y encuentre una solución autosimilar para el campo de velocidades como función del tiempo.
(ii) Realice un gráfico cualitativo del campo de velocidades para tiempos próximos al momento posterior del arranque, y otro para tiempos largos.
(iii) Calcule la vorticidad.
(iv) El arranque inmediato del plano genera una lámina de vorticidad infinita en $y = 0$, que difunde en el tiempo por acción de la viscosidad hacia el interior del fluido. Estime el tiempo que le toma a la vorticidad difundir una distancia L.

Problema 9. A $t = 0$, se genera un vórtice de circulación Γ_0 en el seno de un fluido con viscosidad dinámica μ y densidad ρ. Aparece entonces un campo de velocidades azimultal y que sólo depende de la coordenada radial. Debido a la viscosidad, el fluido no puede mantener en el tiempo este flujo y como en el problema anterior se produce una difusión de la vorticidad.
(i) Estudie este proceso para $t > 0$ en términos de la circulación $\Gamma(r, t) = 2\pi r v_\theta(r, t)$ como variable dependiente del problema. Haga análisis dimensional para poner de manifiesto el tipo de solución auto-semejante.
(ii) Obtenga el campo de velocidades. Vea que para distancias r desde el eje que satisfacen $r \ll \sqrt{4\nu t}$, el

flujo no es más irrotacional, sino que viene dado aproximadamente por

$$v_\theta = \frac{\Gamma_0 r}{8\pi\nu t} \quad ,$$

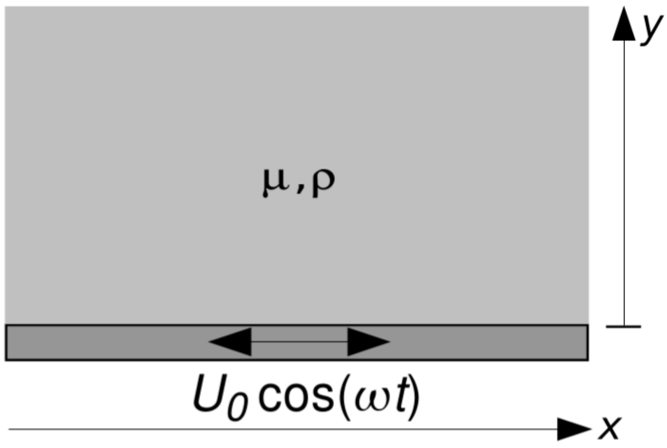
que corresponde a un movimiento de rotación con velocidad angular

$$\Omega = \frac{\Gamma_0}{8\pi\nu t} \quad .$$

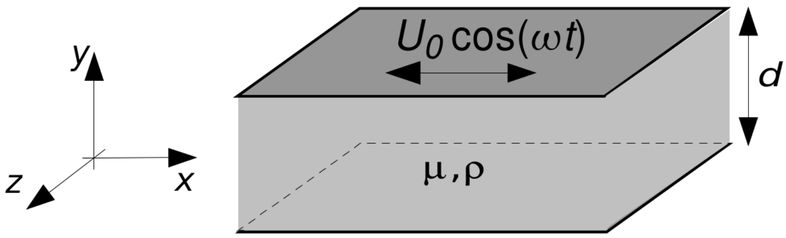
Problema 10. En la configuración que se muestra en la figura, el líquido ha alcanzado un régimen oscilante. El campo de velocidades puede escribirse como una solución separable

$$v(y,t) = \mathrm{Re}\Big\{\tilde{v}(y)\, e^{i\omega t}\Big\} \quad .$$

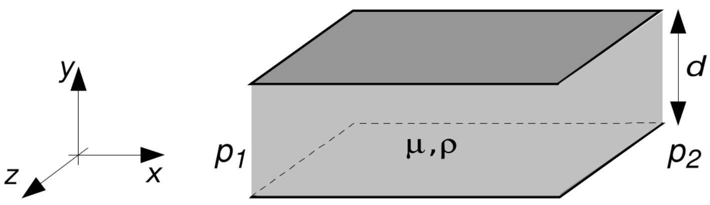
(i) Hallar el campo de velocidades.
(ii) A partir de análisis dimensional, determine la relación funcional entre la longitud de penetración δ y los datos del problema.
(iii) Haga un gráfico cualitativo del campo de velocidades.



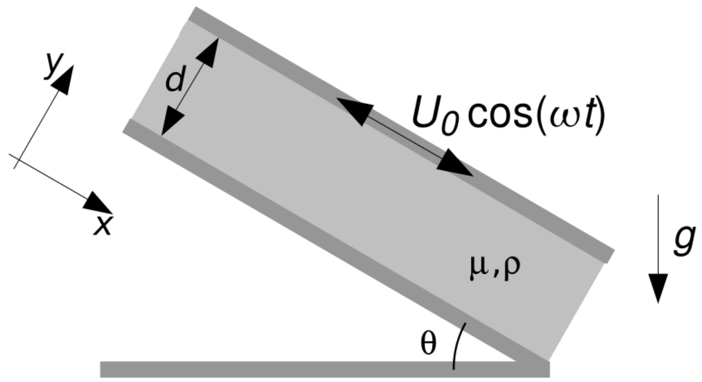
Problema 11. Un fluido muy viscoso, con viscosidad dinámica μ y densidad ρ, se encuentra entre dos planos de dimensiones infinitas. El plano inferior está en reposo mientras que el plano superior, a una distancia d, se mueve con un movimiento armónico con velocidad $U_0 \cos(\omega t)$.



(i) Hallar el campo de velocidades.
(ii) Analice los casos $\delta \ll d$ y $\delta \gg d$, donde δ es la longitud de penetración.
(iii) Haga un gráfico cualitativo del campo de velocidades para los dos casos.



Problema 12. Resuelva el caso de un líquido entre dos planos en reposo de dimensiones infinitas, movido por un gradiente de presion oscilante en forma armónica en el tiempo, del tipo $\Delta p = p_2 - p_1 = p_0 \cos(\omega t)$. Utilice análisis dimensional para obtener la dependencia funcional del caudal medio $\langle Q \rangle$ (en un semi-período) que se establece a través de una sección transversal al movimiento.

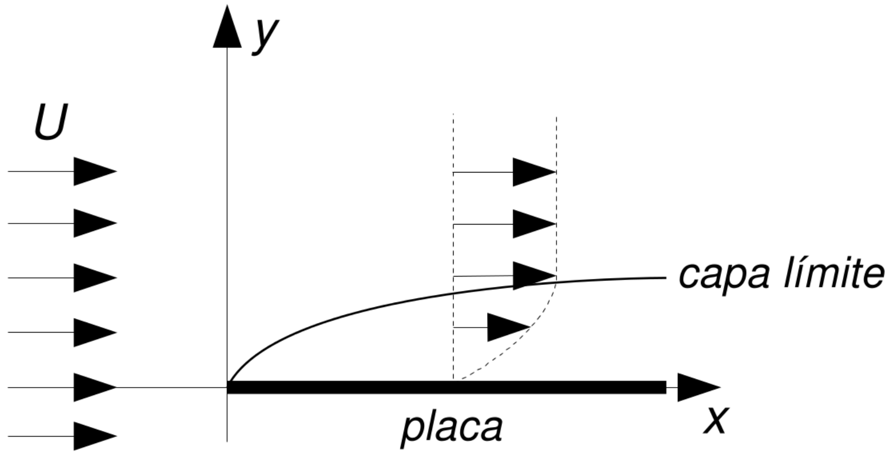


Problema 13. Para la situación que se muestra en la figura:
(i) Muestre que el campo de velocidades puede ser calculado a partir de la superposición del campo de velocidades de un problema estacionario y el de un problema dependiente del tiempo. ¿Cuáles son las condiciones para poder hacerlo?
(ii) Mediante análisis dimensional, estime la dependencia funcional de la potencia media entregada al fluido por el plano superior.

Problema 14. Resuelva nuevamente el problema 12, pero ahora considerando una variación de la presión de la forma $\Delta p = p_2 - p_1 = P + p_0 \cos(\omega t)$, donde P y p_0 son constantes.

Problema 15. Considere nuevamente la configuración del problema 8, pero ahora el fluido no se extiende indefinidamente en la región $0 < y < \infty$, si no que a distancia h se encuentra un plano infinito en reposo paralelo al fondo rígido.
(i) ¿Cómo se modifican las condiciones de contorno?
(ii) Encuentre la solución al campo de velocidades. Para ello, el problema debe separarse como superposición de otros dos. ¿Por qué es necesario hacer esto?
(iii) Observe que el problema 8 se obtiene en el límite $h \to \infty$. Cuando alguno de los parámetros que aparecen en las condiciones iniciales y/o de contorno se comporta de manera singular, el paso al límite de la solución del transitorio dependiente del tiempo es regular y tiende a una solución autosemejante de primera especie, en donde el parámetro h deja de ser relevante en la solución. Demuestre esta afirmación tomando $h \to \infty$ en la solución del transitorio para el módulo de la vorticidad, para arribar a la solución hallada en el problema 8.

Problema 16. Considere una placa plana semi-infinita en el plano xz, con su borde en $x = 0$ como se muestra en la figura. Un flujo estacionario e uniforme con velocidad $U\hat{x}$ incide sobre el borde de la placa. Lejos del borde la presión es uniforme y toma valor p_0.



(i) Muestre que las ecuaciones de la capa límite se reducen en este caso a

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad , \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad ,$$

y escriba las condiciones de contorno para v_x y v_y.
(ii) A partir de análisis dimensional, muestre que la función corriente (tal que $\vec{v} = \nabla\psi \times \hat{z}$) debe ser de la forma

$$\psi(x, y) = \sqrt{U\nu x} f(u) \quad , \quad u = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \quad .$$

(iii) Usando la expresión de ψ, halle expresiones para v_x y v_y en términos de U , ν, x, u, y de la función f y sus derivadas.
(iv) Reemplazando las expresiones de v_x y v_y en las ecuaciones de la capa límite, muestre que f satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$f\,f'' + 2f''' = 0 \quad ,$$

con condiciones de contorno $f(0) = f'(0) = 0$ y $f'(\infty) = 1$.
(v) Note que las curvas de nivel de v_x corresponden a $u =$ constante. Muestre entonces que el ancho de la capa límite crece como $x^{1/2}$.

Problema 17. Utilizando análisis dimensional, muestre que el ancho de la capa límite en un fluido viscoso en contacto con una placa infinita que gira con velocidad angular Ω, es proporcional a $\sqrt{\nu/\Omega}$.