Práctica 4: Estabilidad de flujos

Inestabilidades Hidrodinámicas

Problema 1. Considere un fluido ideal incompresible con densidad uniforme ρ_0 , y con un campo de velocidades bidimensional $\vec{u} = U(z)\hat{x}$ donde

$$U(z) = U_0 \begin{cases} 1 & \text{si} \quad z > 0 \\ -1 & \text{si} \quad z < 0 \end{cases} .$$

Analice la estabilidad del flujo resolviendo la ecuación de Rayleigh en cada tramo y pidiendo continuidad de la presión y de la velocidad perpendicular a la interfaz.

Problema 2. Para un fluido ideal homogeneo analice la estabilidad de un perfil lineal en contacto con una pared en $z = 0$, dado por $\vec{u} = U(z)\hat{x}$ con

$$U(z) = U_0 \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z > L \\ 1 - z/L & \text{si} \quad 0 < z < L \end{cases} .$$

Recuerde que sobre el contorno sólido debe cumplirse $0 = \delta u_z = -\partial_x \delta\psi$. Muestre que esto implica $\Phi = 0$.

Problema 3. (∗) Usando la ecuación de Rayleigh, analice la estabilidad del flujo ideal bidimensional $\vec{u} = U(z)\hat{x}$, donde

$$U(z) = U_0 \begin{cases} 1 & \text{si} \quad z > L \\ z/L & \text{si} \quad -L < z < L \\ -1 & \text{si} \quad z < -L \end{cases} .$$

Note que cuando $L \to 0$, el sistema se reduce al del Problema 1. Interprete.

Problema 4. Una versión suave del flujo del Problema 3 puede obtenerse considerando $U(z) = U_0 \tanh\big(z/L\big)$. Dado que este flujo no es lineal a trozos, es necesario trabajar con la ecuación de Rayleigh completa y de forma numérica. Para esto, considere que el sistema tiene contornos en $z = \pm a$. Note que la escala L de este problema no coincide exactamente con la del Problema 3, ¿por qué?.
(i) Escriba el perfil $U(z)$ adimensionalizado utilizando U_0 y L como velocidad y longitud característica respectivamente.
(ii)$^{(N)}$ Obtenga la relación de dispersión $\omega(k) = \omega_0(k) + i\gamma(k)$ para valores de $1 \leq a/L \leq 3$, variando los valores del número de onda adimensional $0 < k' \leq 1{,}5$ y con $dz = \times 10^{-2}$. Estime el valor de a/L a partir del cual existen modos inestables. ¿Cómo se comporta el sistema ante perturbaciones con $k' > 1$?

Problema 5. (∗) Estudie numéricamente la estabilidad frente a pequeñas perturbaciones de un chorro sumergido suave dado por $\vec{u} = U_0 \operatorname{sech}^2(z/L)\hat{x}$ y contornos en $z = \pm a$.
(i) Escriba el perfil $U(z)$ adimensionalizado utilizando U_0 y L como velocidad y longitud característica respectivamente.
(ii) Calcule los puntos de inflexión para este perfil en términos de $\alpha = a/L$. Sabiendo que $|z| \leq \alpha$ y

usando el criterio de Rayleigh, ¿para que valores de α espera que el flujo sea estable?
(iii)$^{(N)}$ Obtenga la relación de dispersión $\omega(k) = \omega_0(k) + i\gamma(k)$ para valores de $0,5 \leq \alpha \leq 2$, variando los valores del número de onda adimensional $0 < k' \leq 2{,}5$ y con $dz = 5 \times 10^{-3}$. Relacione el resultado con lo obtenido en el inciso anterior. *Ayuda: Al igual que en el Problema 4, evite $k' = 0$.*

Ondas de Gravedad

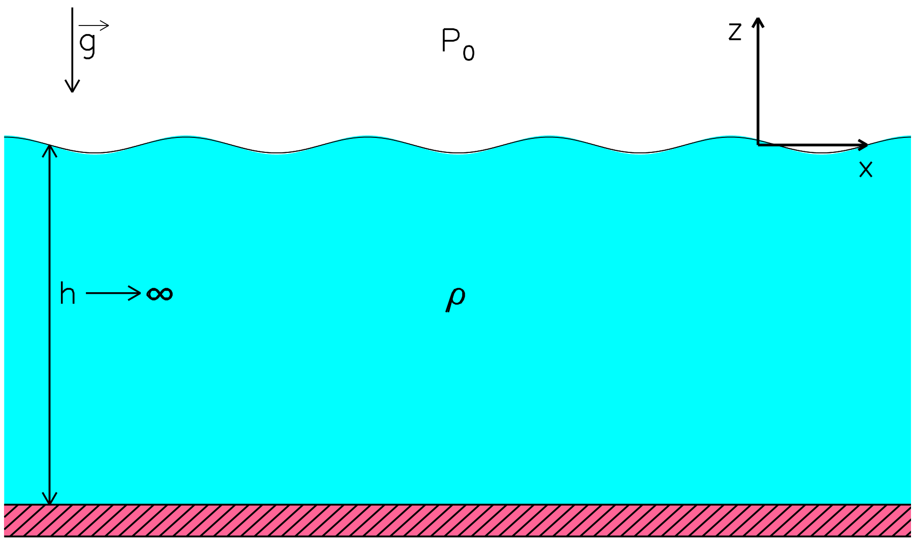
Problema 6. Ondas de superficie en aguas profundas Considere un fluido ideal incompresible con superficie libre en equilibrio en $z = 0$ como se indica en la figura. El campo de velocidades está dado por $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$, donde el potencial ϕ satisface las ecuaciones

$$\nabla^2\phi = 0 \quad , \quad \left.\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)\right|_{z=0} = 0 \quad .$$

(i) Obtenga la relación de dispersión $\omega = \omega(k)$ para ondas de superficie que se propagan en la dirección x, asumiendo simetría de traslación en y y que el fluido tiene profundidad infinita.
(ii) Halle soluciones para el potencial de velocidades de la forma

$$\phi(x, z, t) = f(z)\cos(kx - \omega t) \quad ,$$

y halle el campo de velocidades $\vec{v}$ para todo tiempo (déjelo expresado en función de una constante de amplitud a determinar).
(iii) Calcule la trayectoria de las partículas de fluido en la onda.
(iv) Calcule la velocidad de grupo y la de fase de las ondas.



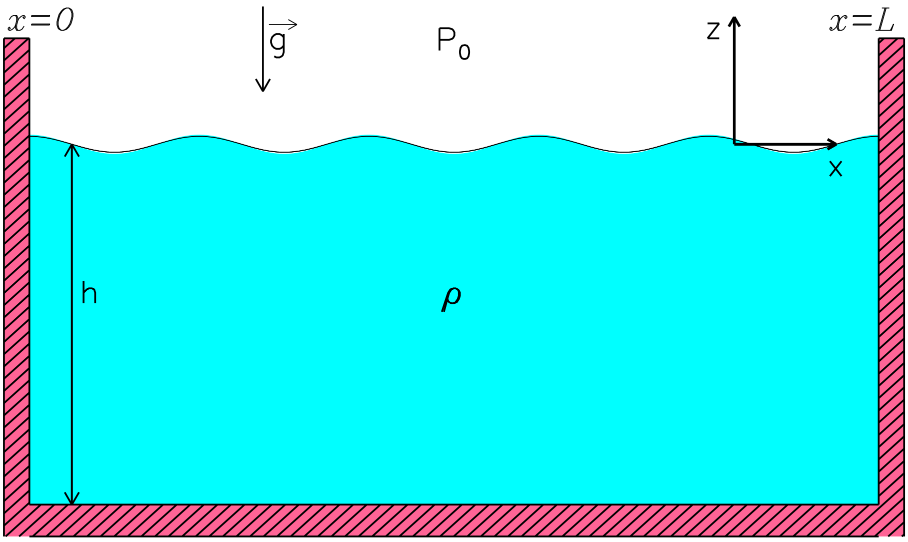
Problema 7. Ondas de superficie en aguas poco profundas Considere un estanque con profundidad finita h.

(i) Obtenga la solución para ϕ en este caso, tomando la condición de contorno en el fondo

$$v_z(z = h) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0 \quad .$$

(ii) Obtenga la relación de dispersión y estudie los límites:
(a) Estanque profundo, $h \to \infty$, para recuperar el caso anterior (estanque muy profundo).
(b) Estanque poco profundo, $h \ll \lambda$, donde λ es la longitud de onda de la perturbación.
Analice en qué casos es dispersivo o no el medio.

Problema 8. Modos de oscilación Considere un estanque con profundidad h y con paredes laterales separadas por una distancia L como se muestra en la figura. Halle la solución para el potencial de velocidad ϕ en este caso.



Note que tiene que imponer condiciones de contorno adicionales en las paredes laterales,

$$v_x(x = 0) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x=0} = v_x(x = L) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \quad .$$

¿Qué tipo de soluciones obtiene? Encuentre las posibles frecuencias de oscilación de las ondas que se generan en la superficie.

Problema 9. Ondas interfaciales entre dos fluidos no miscibles Se tienen dos fluidos ideales incompresibles en contacto. En el estado de equilibrio, la superficie de separación entre ambos es plana (los fluidos no se mezclan ni reaccionan) y corresponde al plano $z = 0$. El fluido superior tiene densidad ρ' y profundidad h', y está en contacto con una atmósfera tenue a presión p_0. El fluido inferior tiene densidad ρ y profundidad h (que puede ser infinita).
(i) Verifique que las ecuaciones para los potenciales de velocidad son

$$\nabla^2 \phi' = 0 \quad , \quad \nabla^2 \phi = 0 \quad ,$$

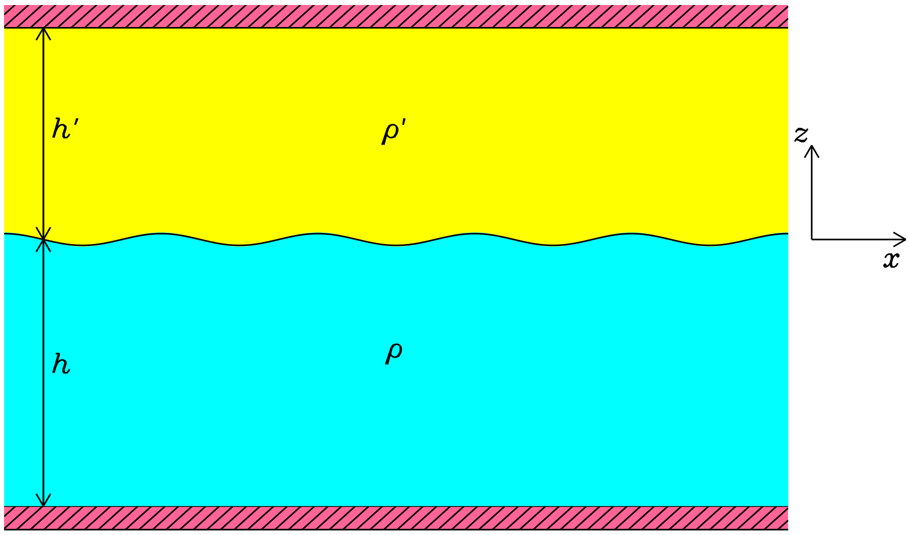
$$\left.\left(\frac{\partial \phi'}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} \right)\right|_{z=h'} = 0 \quad ,$$

$$\left[g(\rho-\rho')\frac{\partial\phi}{\partial z}+\rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\rho'\frac{\partial^2\phi'}{\partial t^2}\right]\Bigg|_{z=0}=0 \quad .$$

(ii) Observe que además deben darse condiciones de contorno y de empalme por continuidad de los potenciales de velocidad para cada fluido. Escriba estas condiciones de contorno cuando alguno de los fluidos se encuentra limitado (superior o inferiormente) por un plano infinito paralelo a la superficie en reposo.
(iii) Obtenga la expresión de las funciones que representan la forma de la superficie de contacto entre los fluidos, $\xi=\xi(x,t)$, y de la superficie libre del fluido superior, $\eta=\eta(x,t)$.

Problema 10. (∗) Ondas interfaciales entre dos fluidos limitados verticalmente

(i) Determine la relación de dispersión de las ondas de gravedad que se propagan en la superficie de contacto entre dos líquidos ideales si el sistema está limitado exteriormente por dos planos horizontales infinitos como se muestra en la figura. La densidad y la profundidad del líquido inferior son ρ y h respectivamente, y las del superior ρ' y h' ($\rho>\rho'$).



(ii) Considere el caso límite $kh\gg1$ y $kh'\gg1$ (ambos fluidos con profundidad infinita).
(iii) Considere el caso límite $kh\ll1$ y $kh'\ll1$ (ondas largas).
(iv)^N Compruebe numéricamente los resultados de los tres incisos anteriores. Para realizar este estudio utilice las densidades en relación a la máxima con $\rho'/\rho_0=0{,}5$ (tomando $\rho_0=\rho$ cómo la densidad de referencia); use el origen de coordenadas en la interfaz, entonces $z_{int}=0$, y las demás alturas iguales, es decir $h'/h=1$. Con el fin de poder ver para $kh=kh'\ll1$ y $kh=kh'\gg1$, utilice el número de onda adimensionalizado en el rango $(10^{-2},10^{2})$. *Ayuda: Use escala logarítmica para poder ver bien las dos leyes de potencias que se predicen para ambos límites. No utilice el valor* $k'=0$ *ya que conlleva a divergencias.*
(v)^N Utilizando el mismo procedimiento anterior, resuelva el problema para el caso con tres fluidos. Considere contornos en $z=\pm h$ y tres fluidos con densidades $\rho_2=\rho_0/10$, $\rho_1=\rho_0/2$ y ρ_0 (de arriba hacia abajo), separados por interfaces en $z_1=0{,}9h$ y $z_0=0$. Utilice el mismo rango para k, notando que ahora habrá dos ramas para $\omega(k)$ al tener dos interfaces.

Problema 11. Para la configuración del ejercicio 10, resuelva el caso en que el fluido superior posee su superficie libre de moverse y el inferior tiene profundidad infinita. Discuta la posibilidad de existencia de modos que se propagan en la interfase cuando la perturbación en la superficie es imperceptible (aguas muertas).

Problema 12. Para la configuración del ejercicio 10, resuelva el caso en que el fluido inferior se encuentra limitado por el fondo a una distancia h, y el superior tiene su superficie libre.