Práctica 1:

Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 1: Hallar las trayectorias y las líneas de corriente correspondiente a una fuente lineal de caudal constante superpuesta a una corriente uniforme cuya velocidad aumenta linealmente con el tiempo.

Solución:
Vamos a introducir una pequeña modificación, tomaremos $U = U_0 + \alpha t$.
La fuente de caudal Q se puede escribir así:

$$\vec{V}_Q = \frac{Q}{2\pi r} = \frac{Q}{2\pi r^2}\vec{r} = \frac{Q}{2\pi(x^2+y^2)}(x\hat{i} + y\hat{j}) \tag{1}$$

Ahora superponemos los dos campos de velocidades:

$$\vec{V} = \left[\frac{Q}{2\pi(x^2+y^2)}x + U_0 + \alpha t\right]\hat{i} + \frac{Q}{2\pi(x^2+y^2)}y\hat{j} \tag{2}$$

En el caso de las trayectorias tenemos que:

$$dx = \left[\frac{Q}{2\pi(x^2+y^2)}x + U_0 + \alpha t\right]dt \tag{3}$$

$$dy = \frac{Qy}{2\pi(x^2+y^2)}dt \tag{4}$$

Caso $U_0 = 0$ y $\alpha = 0$:

No parece muy amable la expresión, veamos primero cuando tenemos solo una fuente de caudal Q: En este caso, queda:

$$dx = \frac{Qx}{2\pi(x^2+y^2)}dt \tag{5}$$

$$dy = \frac{Qy}{2\pi(x^2+y^2)}dt \tag{6}$$

Las trayectorias y líneas de corriente son radiales respecto de la fuente.
Para la trayectoria conviene expresarlo en polares porque: $v_r = \dfrac{Q}{2\pi r}$ y $v_\theta = 0$

$$v_r = \frac{dr}{dt} \qquad\qquad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} \tag{7}$$

Se obtiene:

$$r(t) = \pm\sqrt{r_0^2 + \frac{Qt}{\pi}} \tag{8}$$

y

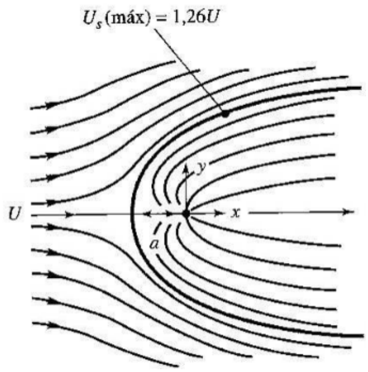
$$\theta(t) = \theta_0 \tag{9}$$

Caso $U_0 \neq 0$ y $\alpha = 0$

$$dx = \left[\frac{Q}{2\pi(x^2+y^2)}x + U_0\right]dt \tag{10}$$

$$dy = \frac{Qy}{2\pi(x^2+y^2)}dt \tag{11}$$

En este caso, me parece ilustrativo pasar un apunte que escribió Guillermo Frank en un curso anterior que les adjunto. Mas adelante veremos como calcularlo haciendo uso de la función corriente. Dado que es una fuente en presencia de un campo uniforme de velocidades, se puede construir de manera "intuitiva" la forma de las líneas de corriente:



Oportunamente les pasaremos el apunte donde se puede calcular utilizando el formalismo de la práctica 4.

El caso donde $\alpha \neq 0$ **pero** $U_0 = 0$ cualitativamente no es diferente para las líneas de corriente. Ya que el campo de velocidades superpuesto se supone laminar, se puede pensar que es una fuente de caudal lineal en un plano inclinado en presencia de gravedad.

$$U_x = \frac{Q}{2\pi(x^2+y^2)}x + \alpha t \tag{12}$$

$$U_y = \frac{Qy}{2\pi(x^2+y^2)}dt \tag{13}$$

Para las líneas de corriente lo mas simple es pensarlo en polares:

$$\frac{U_x}{U_y} = \text{cotg}\theta + \frac{2\pi r}{Q}\frac{\alpha t}{\sin\theta} \tag{14}$$

En cuanto a las trayectorias lo mas simple es aplicar superposición del caso de flujo a velocidad uniforme y fuente de caudal lineal. Resolverlo estrictamente en cartesianas presenta la dificultad de tener las variables acopladas.