Guía 2 - Clase 1

Introducción a leyes de conservación

Repasemos las leyes de conservación que vieron en la teórica, para tenerlas frescas porque toda la guía 2 va a salir usando alguno de los teoremas de Bernoulli y haciendo uso exhaustivo de la ecuación de continuidad (por lo menos la primera parte de la guía).

Primero recordemos algunas cosas básicas que ya tenemos estudiadas de la guía anterior:

- Un flujo *estacionario* es aquel que cumple $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$.
- En un flujo *irrotacional* la velocidad satisface $\nabla \times \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \nabla \phi$.
- Otra definición conocida es la de flujo *homogéneo*, donde $\nabla \rho = 0$.
- Por otro lado, un flujo que se dice *incompresible* es aquel que cumple que

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla.\mathbf{u} = 0$$

Si consideramos que el flujo es homogéneo, va a ser muy útil usar que si integramos en un volumen V la ecuación anterior, eso, por el teorema de Gauss es equivalente a realizar una integral de superficie sobre el borde del volumen que consideremos S_V

$$\int_V \nabla.\mathbf{u} \; dV = \int_{S_V} \mathbf{u} \; d\mathbf{S} = 0$$

Como seguramente vieron en la teórica, la ecuación de Euler se puede reescribir como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla \frac{u^2}{2} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{F},$$

es fácil obtener, a partir de esta expresión y de las hipótesis impuestas, los 4 teoremas de Bernoulli.

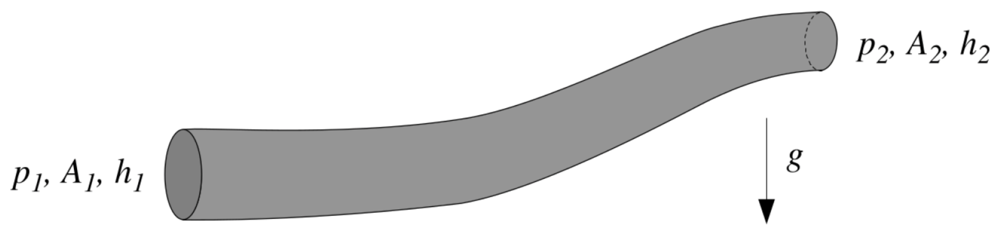
En general, siempre (por lo menos en esta guía) vamos a suponer que los fluidos con los que trabajamos son ideales y que las fuerzas sobre el sistema son conservativas, es decir que $\mathbf{F} = \nabla \Phi$.

Dependiendo de las hipotesis adicionales que consideremos, tendremos que

1. Si el fluido es incompresible, homogéneo y estacionario, sobre un línea de corriente se cumple que[1]:
$$\frac{u^2}{2} + \Phi + \frac{p}{\rho} = \text{cte}_{\text{línea}}.$$
2. Si el fluido es incompresible, homogéneo, estacionario y además irrotacional, en todo el fluido se cumple que:
$$\frac{u^2}{2} + \Phi + \frac{p}{\rho} = \text{cte}.$$
3. Si el fluido es incompresible, homogéneo e irrotacional, tenemos que:
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \Phi + \frac{p}{\rho} = f(t).$$
4. Si el fluido es estacionario, irrotacional y politrópico ($p = p(\rho)$), se cumple que:
$$\frac{u^2}{2} + \Phi + \frac{\gamma}{\gamma + 1}\frac{p}{\rho} = \text{cte}_{\text{línea}}.$$

[1] Esto es porque sobre una línea de corriente se cumple que $(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} \perp \mathbf{u}$

1. Un líquido incompresible de densidad ρ_0 fluye de manera estacionaria por el interior de un conducto de longitud finita y sección variable. En la figura, p_1, A_1 y h_1 denotan la presión, el área y la altura a la que se encuentra uno de los extremos del conducto, mientras que p_2, A_2 y h_2 corresponden al otro extremo. Los extremos 1 y 2 están localizados en regiones del conducto en donde la sección es razonablemente uniforme, así que las velocidades v_1 y v_2 pueden considerarse aproximadamente uniformes sobre toda la sección y paralelas al conducto.



   a) Aplicando el teorema de Bernoulli que corresponda, y suponiendo que $A_1 > A_2$, obtenga una expresión para el caudal en función de los datos dados en los extremos del tubo.
   b) ¿Cuál es la condición para que exista flujo?
   c) Observe que a partir de lo hallado en a) no existe ninguna restricción acerca del sentido de movimiento (este es impuesto por las condiciones iniciales, y los detalles constituyen un problema no estacionario). Suponga que el movimiento se da desde el extremo 1 al 2. ¿Puede haber flujo aún cuando $h_1 < h_2$?
   d) En el caso en que $A_1 = A_2$, ¿cuál es la condición para que haya flujo estacionario?

Resolución:

a) Anotemos inicialmente los datos útiles para simplificar la ecuaciones. Primero nos dicen que el flujo es estacionario, por lo tanto $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$. Segundo tenemos que el fluido es incompresible, eso es que $\frac{d\rho}{dt} = 0$.

   Teniendo en cuenta las hipótesis que se cumplen, podemos usar el *teorema de Bernoulli 1*, es decir

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + gh = \text{cte.}$$

   Eso se puede traducir en la siguiente condición:

$$\frac{p_1}{\rho_0} + \frac{u_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho_0} + \frac{u_2^2}{2} + gh_2,$$

   de aquí desconocemos tanto u_1 como u_2, que son dos cantidades necesarias para calcular los caudales, que es lo que pide el inciso.

La otra ecuación que falta es la de continuidad, la cual en este caso se reduce a

$$\int_{S_{\text{bordes}}} \mathbf{u}\ d\mathbf{S} + \int_{S_{\text{A}_1}} \mathbf{u}\ d\mathbf{S} + \int_{S_{\text{A}_2}} \mathbf{u}\ d\mathbf{S} = 0,$$

considerando que ρ es constante.

Es fácil ver que la primera integral en superficie es nula, pues la velocidad es perpendicular a la normal a la superficie del borde. Por otro lado, las tapas tienen normales en la misma dirección pero con signo opuesto, y como la velocidad es prácticamente uniforme en esas áreas, la ecuación anterior se reduce a

$$A_1 u_1 = A_2 u_2 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = Q_2 = Q.$$

De estas dos ecuaciones, la de continuidad y la que sale del teorema de Bernoulli, podemos despejar la velocidad u_1 en función de cantidades conocidas, eso es

$$u_1^2 = \Big(\frac{2A_2^2}{A_2^2 - A_1^2}\Big)\Big[\frac{p_2 - p_1}{\rho_0} + g(h_2 - h_1)\Big]$$

Finalmente, tenemos que el caudal es

$$Q^2 = \Big(\frac{2A_1^2 A_2^2}{A_2^2 - A_1^2}\Big)\Big[\frac{p_2 - p_1}{\rho_0} + g(h_2 - h_1)\Big]$$

b) Para ver si efectivamente tenemos flujo, es necesario pedir que lo que quede dentro de la raíz sea positivo. Entonces

$$-\frac{p_2 - p_1}{\rho_0} - g(h_2 - h_1) > 0,$$

eso es equivalente a pedir que se cumpla la siguiente relación entre las presiones

$$p_1 > p_2 + \rho_0 g(h_2 - h_1)$$

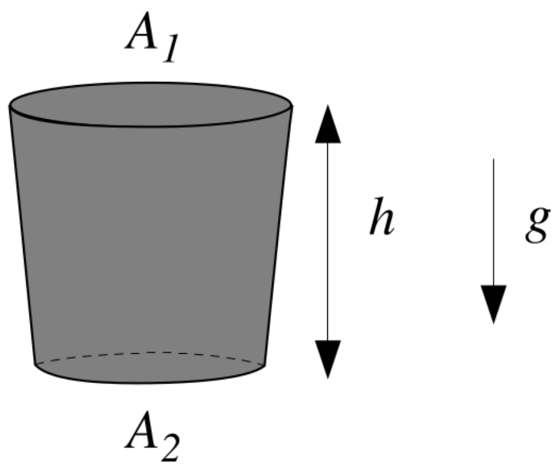
c) Puede haber flujo de 1 a 2 siempre y cuando se siga cumpliendo la relación que encontramos en el ítem anterior.

d) Si ahora $A_1 = A_2$, entonces, por la ecuación de continuidad las velocidades serán iguales, es decir que $u_1 = u_2$. Si usamos esa condición en la ecuación del teorema de Bernoulli se tiene que cumplir que

$$\frac{p_1}{\rho_0} + h_1 g = \frac{p_2}{\rho_0} + h_2 g$$

3. Un recipiente con forma de embudo y simetría axial contiene un líquido incompresible.

   A $t = 0$ se abre la tapa inferior dejándoselo fluir, mientras que al mismo tiempo se va agregando el mismo líquido por la tapa superior, de tal manera de mantener constante el nivel. Cuando la inclinación de las paredes respecto de la vertical es pequeña, se puede obtener una solución aproximada del problema despreciando las componentes horizontales de la velocidad. Suponga que la variación de la sección del embudo es lineal, de la forma $A(z) = (1 + \epsilon \frac{z}{h})A_2$ con $(\epsilon \ll 1)$



   a) ¿Cuál es la velocidad de salida en la tapa inferior como función del tiempo?
   b) ¿Se llega a un régimen estacionario?

Resolución:

a) Lo primero importante notar de este ejercicio es que no es un problema en el que el flujo sea estacionario.

   Es posible ver que si un fluido ideal no puede desarrollar vorticidad, por lo tanto se cumple que $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. Por otro lado, nos dan el dato de que podemos despreciar las componentes horizontales de la velocidad, eso implica que $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}, t)\hat{z}$.

   Juntando estas dos cosas podemos ver que

$$\partial_x u = 0 \quad \text{y} \quad \partial_y u = 0 \quad \Rightarrow \quad u(\mathbf{r}, t)\hat{z} = u(z, t)\hat{z}.$$

   De nuevo tenemos que usar la ecuación de continuidad, en este caso eso se traduce en

$$\int_{S_{\text{bordes}}} \mathbf{u}\; d\mathbf{S} + \int_{S_{\text{A}(z)}} \mathbf{u}\; d\mathbf{S} + \int_{S_{\text{A}_2}} \mathbf{u}\; d\mathbf{S} = u(z, t)A(z) - u_2(t)A_2 = 0,$$

   expresión que nos dice que toda la dependencia espacial de $u(z, t)$ vendrá del término $A(z)$, mientras que la dependencia temporal estará relacionada directamente con $u_2(t)$.

   Despejando de la ecuación anterior, la velocidad la podemos escribir como

$$u(z, t) = \frac{A_2 u_2(t)}{A_2(1 + \frac{\epsilon z}{h})}.$$

Como el flujo es irrotacional, entonces podemos encontrar una función escalar ϕ tal que se cumpla que $\nabla\phi = u(z,t)$, lo que en este caso se reduce a

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = u(z,t) = \frac{u_2(t)}{(1+\frac{\epsilon z}{h})} \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{h}{\epsilon}\ln\left[1+\frac{\epsilon z}{h}\right]u_2(t).$$

Para completar el problema nos falta encontrar $u_2(t)$. Para eso usamos el *teorema de Bernoulli 3* ya que se cumplen todas sus hipótesis, entonces

$$\left.\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\right|_{z=h} + \frac{u_1^2}{2} + gh + \frac{p_0}{\rho} = \left.\frac{\partial\phi_2}{\partial t}\right|_{z=0} + \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}.$$

Usando lo que sabemos de la función ϕ llegamos a que

$$\frac{h}{\epsilon}\ln[1+\epsilon]\frac{du_2}{dt} + \frac{u_2^2}{2(1+\epsilon)^2} + gh = \frac{u_2^2}{2}.$$

Teniendo en cuenta que $\epsilon \ll 1$, podemos hacer las siguientes aproximaciones $\ln[1+\epsilon] \approx \epsilon$ y $(1+\epsilon)^2 = 1-2\epsilon$. Finalmente la ecuacion del teorema de Bernoulli se simplifica a

$$h\frac{du_2}{dt} - 2\epsilon u_2^2 + gh = 0,$$

que podemos escribir como

$$\int_0^{u_2} \frac{du_2}{\left(\frac{\epsilon}{hg}u_2^2 - 1\right)} = \int_0^t g dt,$$

de donde resulta que la velocidad $u_2(t)$ en la salida A_2 tiene la forma

$$u_2(t) = -\sqrt{\frac{gh}{\epsilon}}\tanh\left[\sqrt{\frac{\epsilon g}{h}}t\right].$$

b) Para ver si llega al régimen estacionario usamos que, a tiempos muy grandes, es válido aproximar a la tangente hiperbólica por $\lim_{x\to\infty}\tanh x = 1$.

Con eso dicho, podemos calcular qué ocurre en $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} u_2(t) = \lim_{t\to\infty} -\sqrt{\frac{gh}{\epsilon}}\tanh\left[\sqrt{\frac{\epsilon g}{h}}t\right] = -\sqrt{\frac{gh}{\epsilon}}.$$