Práctica 0: Vectores y Tensores

Problema 1. Delta de Krönecker y densidad tensorial de Levi-Civita

La delta de Krönecker es un tensor isótropo de segundo orden cuyas componentes están dadas

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad ,$$

con $1 \leq i, j \leq 3$. La densidad tensorial de Levi-Civita es un pseudotensor de tercer orden con componentes

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i,j,k\} \text{ es una permutación par de } & \{1,2,3\} \\ -1 & \text{si } \{i,j,k\} \text{ es una permutación impar de } & \{1,2,3\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad .$$

(i) Visualice gráficamente la densidad tensorial ϵ_{ijk}. ¿Cuántos elementos tiene?
(ii) Compruebe la identidad:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \quad .$$

(iii) Verifique las siguientes identidades:
a. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{irs} = \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}$
b. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$
c. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$
d. $\delta_{mn}\delta_{mn} = 3$
(iv) Si $\{\hat{e}_i, \;\; i = 1,2,3\}$ es una terna de versores ortogonales, verifique que:
a. $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \hat{e}_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$
b. $(\vec{\nabla} \times \vec{C}) \cdot \hat{e}_i = \epsilon_{ijk} \partial_j C_k$

Problema 2. Descomposición de un tensor de segundo orden

Demuestre que todo tensor de segundo orden $\sigma_{ij} \;\; (1 \leq i, j \leq n)$ se puede descomponer como

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} + s_{ij} + a_{ij} \quad ,$$

donde λ es un escalar, s_{ij} es un tensor simétrico de traza nula, y a_{ij} es un tensor antisimétrico.

Problema 3. Identidades vectoriales empleando notación indicial

Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ y $\vec{s}$ cuatro vectores, y ψ y ϕ dos funciones escalares. Utilizando notación indicial, verifique las siguientes identidades:

(i) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$

(ii) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{w}) - \vec{w}(\vec{u} \cdot \vec{v})$

(iii) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{w} \times \vec{s}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})(\vec{v} \cdot \vec{s}) - (\vec{u} \cdot \vec{s})(\vec{v} \cdot \vec{w})$

(iv) $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$, donde $\vec{r} = (x, y, z)$

(v) $\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$

(vi) $\vec{\nabla}|\vec{r}| = \dfrac{\vec{r}}{r}$, donde $r = |\vec{r}|$

(vii) $\vec{\nabla}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{\vec{r}}{r^3}$

(viii) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0$

(ix) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0$

(x) $\nabla^2\psi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\psi)$

(xi) $\nabla^2(\phi\psi) = \phi\nabla^2\psi + \psi\nabla^2\phi + 2\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi$

(xii) $\vec{\nabla}(\phi\psi) = \phi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\phi$

(xiii) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) - \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v})$

(xiv) $\vec{\nabla} \cdot (\phi\vec{u}) = \phi\vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\phi$

(xv) $\vec{\nabla} \times (\phi\vec{u}) = \phi\vec{\nabla} \times \vec{u} + \vec{\nabla}\phi \times \vec{u}$

(xvi) $\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$

(xvii) $\vec{\nabla}(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})$

(xviii) $\nabla^2\vec{u} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u}$

(xix) $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \dfrac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})$