Práctico 0 : Vectores y tensores

El objetivo es familiarizarse con la notación indicial.

Introducción: un tensor queda definido de acuerdo a sus reglas de transformación, o dicho de otra forma, ante cambios de sist. de referencia con orígenes fijos. Por ejemplo, ir de S a S'.

Tensor de rango 0: escalar → no cambia ante transformaciones

Tensor de rango 1: vector A_l con $l = 1,2,3$

$$\underbrace{A'_l}_{\text{sistema } S'} = c_{il} \underbrace{A_l}_{\text{sistema } S}$$

En esta expresión usamos la notación de Einstein, es decir, suma implícita de índices repetidos.

Tensor de rango 2:

$$A'_{ij} = c_{il} c_{jm} A_{lm}$$

Tensor de rango n: la contracción del tensor en S con n objetos C_{kn}.

Problema 1: (i)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} \quad 1 \leq i,j \leq 3$$

$3^3 = 27$ valores (3 3x3 matrixes)

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \{i,j,k\} \text{ perm. par} \\ -1 & \{i,j,k\} \text{ perm. impar} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad \{1,2,3\}$$

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{1jk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 123 \\ 132 \end{matrix}$$

$$\varepsilon_{2jk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 231 \\ 213 \end{matrix}$$

$$\varepsilon_{3jk} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 312 \\ 321 \end{matrix}$$

(ii) Comprobar

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$$

Para comprobar esto, re-escribamos la levi chivita en forma distinta

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{lmn}\,\delta_{li}\,\delta_{mj}\,\delta_{nk} = $$

$\uparrow$ usamos que sólo 6 valores son $\neq 0$ $\quad$ (123) (132) $\quad$ (231) (213) $\quad$ (312) (321)

$$= \delta_{1i}\delta_{2j}\delta_{3k} - \delta_{1i}\delta_{3j}\delta_{2k} + \delta_{2i}\delta_{3j}\delta_{1k} - \delta_{2i}\delta_{1j}\delta_{3k}$$
$$+ \delta_{3i}\delta_{1j}\delta_{2k} - \delta_{3i}\delta_{2j}\delta_{1k}$$

Reagrupamos:

$$\varepsilon_{ijk} = \delta_{1i}(\delta_{2j}\delta_{3k} - \delta_{3j}\delta_{2k}) + \delta_{2i}(\delta_{3j}\delta_{1k} - \delta_{1j}\delta_{3k}) + \delta_{3i}(\delta_{1j}\delta_{2k} - \delta_{2j}\delta_{1k})$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix}$$

Entonces:
$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{2p} & \delta_{3p} \\ \delta_{1q} & \delta_{2q} & \delta_{3q} \\ \delta_{1r} & \delta_{2r} & \delta_{3r} \end{vmatrix}$$

$\det(A)\cdot\det(B) =$

$B^t = B_{ji}$ $\quad = \det(A)\det(B^t) =$

$= \det(A\cdot B^t)$

$$= \left| \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_{1p} & & \\ \delta_{2p} & & \\ \delta_{3p} & & \end{pmatrix}^t \right|$$

$\delta_{1i}\delta_{1p} + \delta_{2i}\delta_{2p} + \delta_{3i}\delta_{3p} =$

$= \delta_{mi}\delta_{mp} = \delta_{ip}$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$$

(iii) a. $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{irs} = \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}$

usamos el inciso anterior:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{irs} = \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{ir} & \delta_{is} \\ \delta_{ji} & \delta_{jr} & \delta_{js} \\ \delta_{ki} & \delta_{kr} & \delta_{ks} \end{vmatrix} = \begin{matrix} \delta_{ii}(\delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{kr}\delta_{js}) + \\ \delta_{ir}(\delta_{ki}\delta_{js} - \delta_{ji}\delta_{ks}) + \\ \delta_{is}(\delta_{ji}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{ki}) = \end{matrix}$$

$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$

$$= 3(\delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}) + (\delta_{js}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{ks})$$

$$+ (\delta_{js}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{ks}) =$$

$$= \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}$$

que es lo que queríamos demostrar

Problema 3: (iii) $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{w}\times\vec{s}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})(\vec{v}\cdot\vec{s}) - (\vec{u}\cdot\vec{s})(\vec{v}\cdot\vec{w})$

producto escalar entre 2 vectores: $\vec{a}\cdot\vec{b} = c$ i índice mudo

$a_i b_i = c$

producto vectorial entre 2 vectores: $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$

$\varepsilon_{ijk} a_j b_k = c_i$

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{w}\times\vec{s}) = \varepsilon_{ijk} u_j v_k \varepsilon_{ilm} w_l s_m = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} u_j v_k w_l s_m$$

P1 (iii)

$$= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) u_j v_k w_l s_m = u_j w_j v_k s_k - u_j s_j v_k w_k$$

$$= (\vec{u}\cdot\vec{w})(\vec{v}\cdot\vec{s}) - (\vec{u}\cdot\vec{s})(\vec{v}\cdot\vec{w})$$

(xvii) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{v}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{u}) - \vec{u}\cdot(\nabla\times\vec{v})$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = \partial_i(\vec{u}\times\vec{v})_i = \partial_i(\varepsilon_{ijk}u_j v_k) =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\partial_i(u_j v_k) = \varepsilon_{ijk}u_j\partial_i v_k + \varepsilon_{ijk}v_k\partial_i u_j =$$

$$= u_j \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{-\varepsilon_{jik}}\partial_i v_k + v_k \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\varepsilon_{kij}}\partial_i u_j =$$

$$= -u_j(\vec{\nabla}\times\vec{v})_j + v_k(\vec{\nabla}\times\vec{u})_k$$

(xvi) $\vec{\nabla}\times(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{u}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) - \vec{v}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{v}$

Analicemos la componente i-ésima:

$$[\vec{\nabla}\times(\vec{u}\times\vec{v})]_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j(\vec{u}\times\vec{v})_k = \varepsilon_{ijk}\partial_j(\varepsilon_{kmn}u_m v_n) =$$

$$= \underbrace{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}}_{\text{problema 1}}\partial_j(u_m v_n) =$$

$$= (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})(u_m\partial_j v_n + v_n\partial_j u_m) =$$

$$= u_i\partial_j v_j + v_j\partial_j u_i - u_j\partial_j v_i - v_i\partial_j u_j =$$

$$= \{\vec{u}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) - \vec{v}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\}_i$$