Práctica 4: Inestabilidades hidrodinámicas y Ondas de gravedad

Problema 1.

Considere un fluido ideal incompresible con densidad uniforme ρ_0 , y con un campo de velocidades bidimensional $\vec{u} = U(y)\hat{x}$ donde

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y > 0 \\ -1 & \text{si} \quad y < 0 \end{cases} .$$

Analice la estabilidad del flujo resolviendo la ecuación de Rayleigh en cada tramo y pidiendo continuidad de la presión y de la velocidad perpendicular a la interfaz.

Problema 2.

Para un fluido ideal homogeneo analice la estabilidad de un perfil lineal en contacto con una pared en $y = 0$, dado por $\vec{u} = U(y)\hat{x}$ con

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y > L \\ 1 - y/L & \text{si} \quad 0 < y < L \end{cases} .$$

Recuerde que sobre el contorno sólido debe cumplirse $0 = \delta u_y = -\partial_x \delta\psi$. Muestre que esto implica $\Phi = 0$.

Problema 3.

Usando la ecuación de Rayleigh, analice la estabilidad del flujo ideal bidimensional $\vec{v} = U(y)\hat{x}$, donde

$$U(y) = U_0 \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y > L \\ y/L & \text{si} \quad -L < y < L \\ -1 & \text{si} \quad y < -L \end{cases} .$$

Note que cuando $L \to 0$, el sistema se reduce al del Problema 1.

Problema 4.

Considere el flujo del Problema 3, pero agregando un contorno sólido en $y = L + d$. Verifique que recupera los mismos resultados para $d \to \infty$.

Problema 5.

Considere un flujo ideal e incompresible con densidad ρ_0 acotado entre dos planos infinitos en $y = \pm L$ y con campo inicial de velocidades $\mathbf{u} = U(y)\hat{x}$ dado por un perfil lineal más una discontinuidad

$$U(y) = \begin{cases} U_0 y/L + \Delta U/2 & \text{si} \quad 0 < y < L \\ U_0 y/L - \Delta U/2 & \text{si} \quad -L < y < 0 \end{cases} .$$

Determine la condición que deben cumplir U_0 y ΔU para que sea posible una solución estable y determine para que valores de k lo sería.

Problema 6. Ondas de superficie en aguas profundas

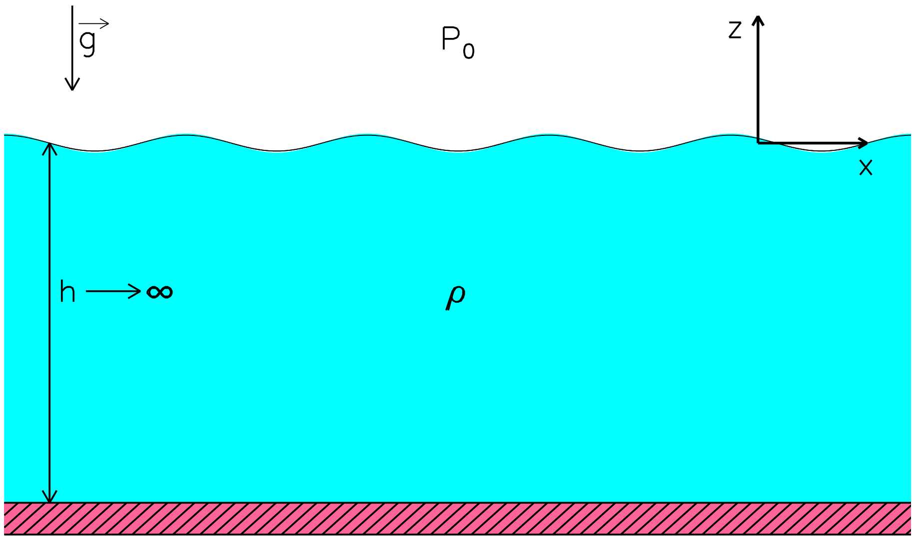
Considere un fluido ideal incompresible con superficie libre en equilibrio en $z = 0$ como se indica en la figura. El campo de velocidades está dado por $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$, donde el potencial ϕ satisface las ecuaciones

$$\nabla^2\phi = 0 \quad , \quad \left.\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)\right|_{z=0} = 0.$$

(i) Obtenga la relación de dispersión $\omega = \omega(k)$ para ondas de superficie que se propagan en la dirección x, asumiendo simetría de traslación en y y que el fluido tiene profundidad infinita.
(ii) Halle soluciones para el potencial de velocidades de la forma

$$\phi(x, z, t) = f(z)\cos(kx - \omega t) \quad ,$$

y halle el campo de velocidades $\vec{v}$ para todo tiempo.
(iii) Calcule la trayectoria de las partículas de fluido en la onda.
(iv) Calcule la velocidad de grupo y la de fase de las ondas.



Problema 7. Ondas de superficie en aguas poco profundas

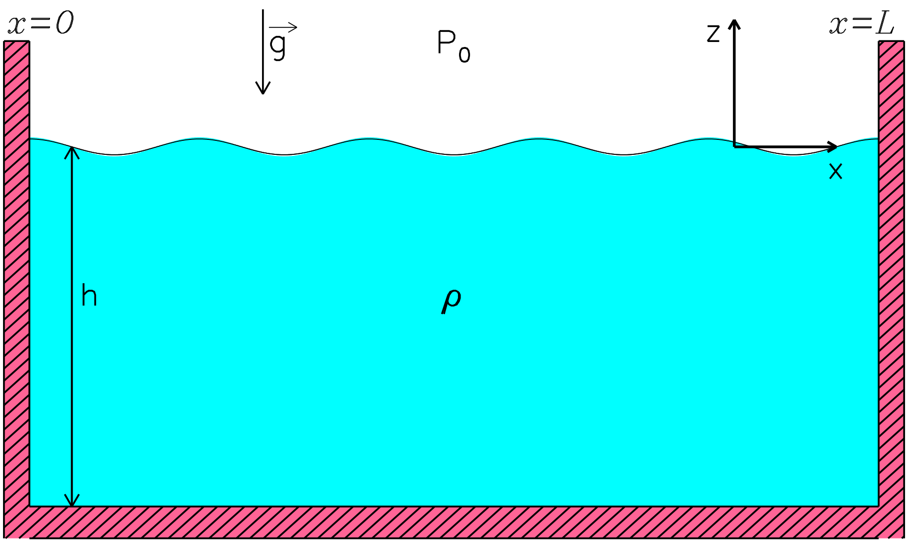
Considere un estanque con profundidad finita h.
(i) Obtenga la solución para ϕ en este caso, tomando la condición de contorno en el fondo

$$v_z(z = h) = \left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0.$$

(ii) Obtenga la relación de dispersión, para ello:
(a) Tome el límite $h \to \infty$ y recupere el caso anterior (estanque muy profundo).
(ii) Tome el límite para profundidad pequeña, $h \ll \lambda$, donde λ es la longitud de onda de la perturbación.
Vea en qué casos es dispersivo o no el medio.

Problema 8. Modos de oscilación

Considere un estanque con profundidad h y con paredes laterales separadas por una distancia L como se muestra en la figura. Halle la solución para el potencial de velocidad ϕ en este caso.



Note que tiene que imponer condiciones de contorno adicionales en las paredes laterales,

$$v_x(x=0) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x=0} = v_x(x=L) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x=0} = 0.$$

¿Qué tipo de soluciones obtiene? Encuentre las posibles frecuencias de oscilación de las ondas que se generan en la superficie.

Problema 9. Ondas interfaciales entre dos fluidos no miscibles

Se tienen dos fluidos ideales incompresibles en contacto. En el estado de equilibrio, la superficie de separación entre ambos es plana (los fluidos no se mezclan ni reaccionan) y corresponde al plano $z = 0$. El fluido superior tiene densidad ρ' y profundidad h', y está en contacto con una atmósfera tenue a presión p_0. El fluido inferior tiene densidad ρ y profundidad h (que puede ser infinita).

(i) Verifique que las ecuaciones para los potenciales de velocidad son

$$\nabla^2\phi' = 0 \quad , \quad \nabla^2\phi = 0 \quad ,$$

$$\left.\left(\frac{\partial \phi'}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2}\right)\right|_{z=h'} = 0 \quad ,$$

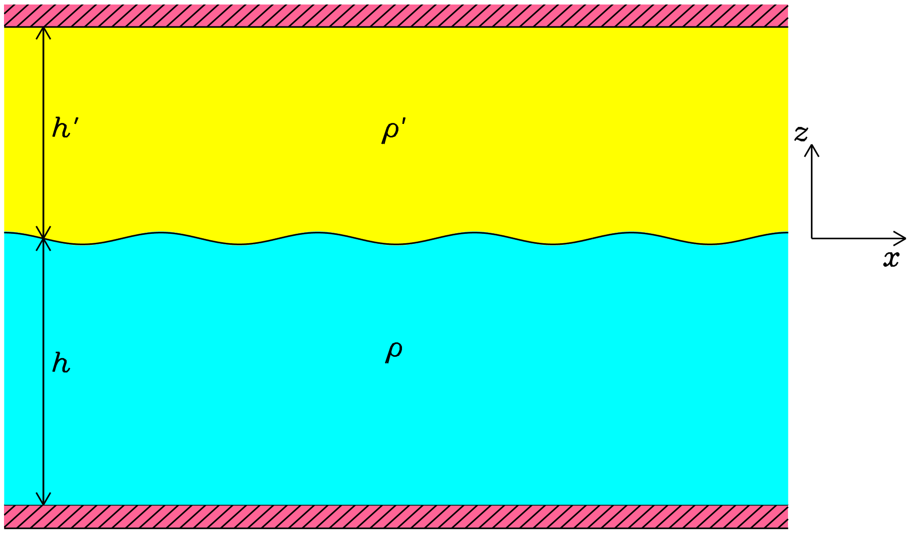
$$\left.\left[g(\rho-\rho')\frac{\partial \phi}{\partial z} + \rho\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \rho'\frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2}\right]\right|_{z=0} = 0 \quad .$$

(ii) Observe que además deben darse condiciones de contorno y de empalme por continuidad de los potenciales de velocidad para cada fluido. Escriba estas condiciones de contorno cuando alguno de los fluidos se encuentra limitado (superior o inferiormente) por un plano infinito paralelo a la superficie en reposo.

(iii) Obtenga la expresión de las funciones que representan la forma de la superficie de contacto entre los fluidos, $\xi = \xi(x,t)$, y de la superficie libre del fluido superior, $\eta = \eta(x,t)$.

Problema 10. Ondas interfaciales entre dos fluidos limitados verticalmente

(i) Determine la relación de dispersión de las ondas de gravedad que se propagan en la superficie de contacto entre dos líquidos ideales si el sistema está limitado exteriormente por dos planos horizontales infinitos como se muestra en la figura. La densidad y la profundidad del líquido inferior son ρ y h respectivamente, y las del superior ρ' y h' ($\rho > \rho'$).



(ii) Considere el caso límite $kh \gg 1$ y $kh' \gg 1$ (ambos fluidos con profundidad infinita).
(iii) Considere el caso límite $kh \ll 1$ y $kh' \ll 1$ (ondas largas).

Problema 11.

Para la configuración del Problema 5, resuelva el caso en que el fluido superior posee su superficie libre de moverse y el inferior tiene profundidad infinita. Discuta la posibilidad de existencia de modos que se propagan en la interfase cuando la perturbación en la superficie es imperceptible (aguas muertas).

Problema 12.

Para la configuración del Problema 5, resuelva el caso en que el fluido inferior se encuentra limitado por el fondo a una distancia h, y el superior tiene su superficie libre.