Clase 1 - Repaso

- Estados de la materia >>> **Fluidos**: gases / líquidos / plasmas

- Aplicaciones a Ingeniería, Astrofísica, Biología, Geología, Oceanografía, Meteorología, ...

- Modelo de **medio contínuo** >>> Determinación de **elemento de fluido** (E.F.)

- Ecuación de movimiento de un E.F. genérico: fuerzas de corto y largo alcance

- Fuerzas de corto alcance >>> Tensor de esfuerzos >>> Simetría del tensor

- Modelo de fluido ideal >>> Presión de un fluido

- Hidrostática >>> Ejemplos

Tensor de esfuerzos

El tensor de esfuerzos representa las fuerzas de contacto con E.F. vecinos. Como toda fuerza de contacto, NO es dato a priori, es una incógnita del problema. Veamos sin embargo que el tensor de esfuerzos debe ser simétrico.

El torque de fuerzas de contacto sobre un E.F.

$$\Delta \underset{\sim}{M} = \oiint_{S_{\Delta V}} \underset{\sim}{r} \times \underset{=}{\sigma} \cdot d\underset{\sim}{S} \sim \ell^3 \qquad \underset{=}{\sigma}(\underset{\sim}{r},t) \simeq cte \text{ en } \Delta V$$

El torque es igual a $\underset{=}{I} \cdot \underset{\sim}{\gamma}$ donde el tensor de inercia

$$I_{ij} = \int_{\Delta V} d^3r\, \rho\, (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \sim \ell^5 \qquad \rho(\underset{\sim}{r},t) \simeq cte$$

Entonces $\gamma \sim \dfrac{M}{I} \sim \dfrac{\ell^3}{\ell^5} \sim \dfrac{1}{\ell^2} \xrightarrow[\ell \to 0]{} \infty$

Excepto que $\Delta \underset{\sim}{M} = 0$

Mostremos que $\underset{\sim}{M} = 0 \ \forall \Delta V \longleftrightarrow \underset{=}{\sigma}$ simétrico

$$\Delta M_i = \oiint_{S_{\Delta V}} \varepsilon_{ijk}\, r_j\, \sigma_{kl}\, dS_l \underset{\text{T.Div.}}{=} \int_{\Delta V} d^3r\, \partial_l (\varepsilon_{ijk}\, r_j\, \sigma_{kl}) =$$

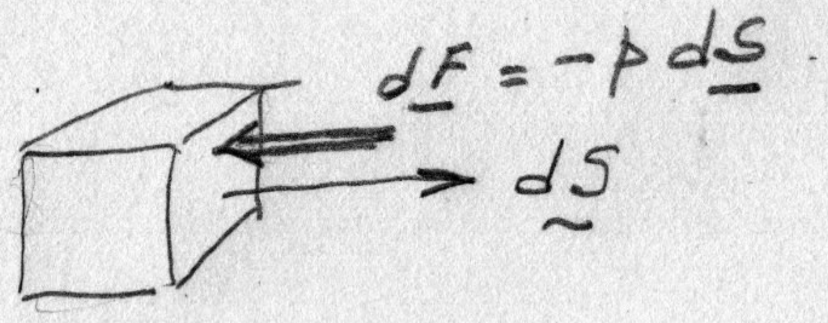
$$= \int_{\Delta V} d^3r\, \varepsilon_{ijk}\, \delta_{jl}\, \sigma_{kl} = \int_{\Delta V} d^3r\, \varepsilon_{ijk}\, \sigma_{kj}$$

Si $\sigma_{jk} = \sigma_{kj} \longleftrightarrow \Delta \underset{\sim}{M} = 0, \ \forall \Delta V$

<u>NOTA</u>: Es decir que $\underset{=}{\sigma}$ tiene solo 6 incógnitas.

Modelo de fluído ideal

Fluido ideal $\longrightarrow$ $\underset{=}{\sigma}$ isótropo $\longrightarrow$ $\underset{=}{\sigma} = -p\, \underset{=}{\mathbb{1}}$ $\qquad p(\underset{\sim}{r},t)$: presión



El modelo consiste en despreciar fuerzas de fricción (viscosidad) y considerar solo fuerza normal.

Para fluídos ideales la ecuación de movimiento es $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{f} - \dfrac{1}{\rho} \underset{\sim}{\nabla} p$

Hidrostática

En situaciones en las cuales el fluído puede considerarse en reposo:

$\underline{u}(\underline{r},t) = 0 \;,\; \forall \underline{r}, t \longrightarrow \underline{a}(\underline{r},t) = 0$

Entonces:

$0 = \underset{\sim}{f} - \frac{1}{\rho} \underset{\sim}{\nabla} p$ Ecuación de equilibrio hidrostático

Veamos dos ejemplos sencillos.

Ejemplo 1: Pileta con agua

El agua se encuentra en reposo.

$\rho = cte$ ($\forall$ líquido)

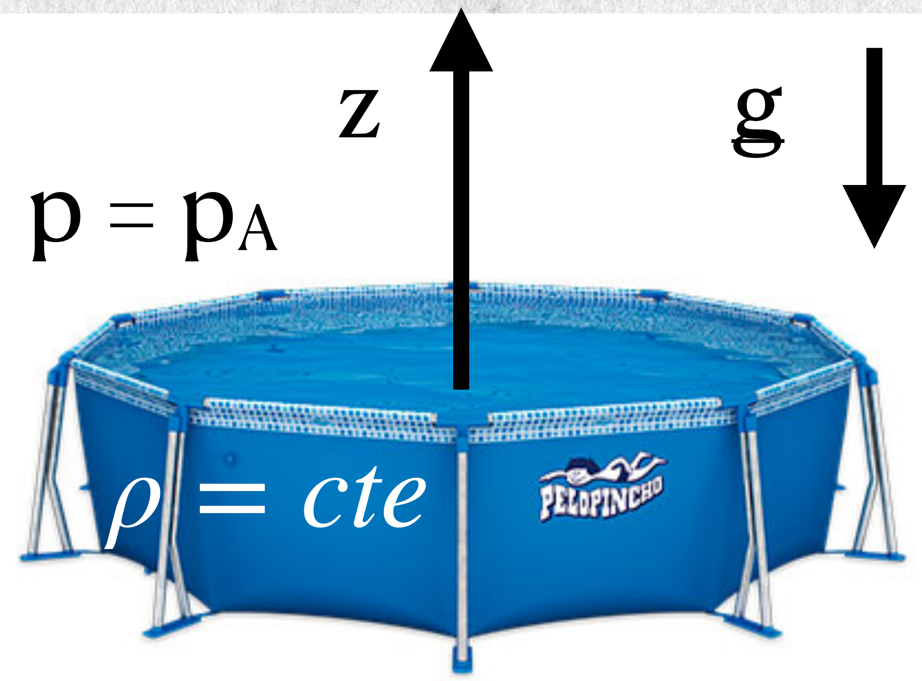
$\underline{f} = -g\hat{z}$

$g\hat{z} = -\frac{1}{\rho}\underset{\sim}{\nabla} p \rightarrow \underline{\nabla}_\perp p = 0$

$\downarrow$

$g = -\frac{1}{\rho}\partial_z p \rightarrow p = cte - \rho g z$

$p(z=0) = p_A \rightarrow p = p_A - \rho g z$



Ejemplo 2: Atmósfera isotérmica

- El aire sobre la pileta es otro fluído, tambien en reposo.
- Suponemos un gas ideal (y tambien un fluído ideal) e isotérmico, de modo que

$p = \rho \frac{k_B T_0}{m_M}$ m_M: masa molecular media

$k_B = 1.38 \times 10^{-16} \frac{erg}{K}$; Boltzmann

$T_0 = cte$

- La presión del aire cerca del piso es la llamada presión atmosférica

$p_A = 1013\, hPa$ $Pa = \frac{N}{m^2}$

$-g = \frac{1}{\rho}\partial_z p = \frac{k T_0}{m_M}\frac{\partial_z \rho}{\rho}$

$\therefore \rho(z) = \rho_A \, e^{-z/H}$ $H = \frac{k T_0}{m_M g}$ escala de alturas

$p(z) = p_A \, e^{-z/H}$

Variables hidrodinámicas

Para describir cuantitativamente el estado de un fluido, que es un objeto extendido espacialmente, definimos varios campos escalares, vectoriales y tensoriales:

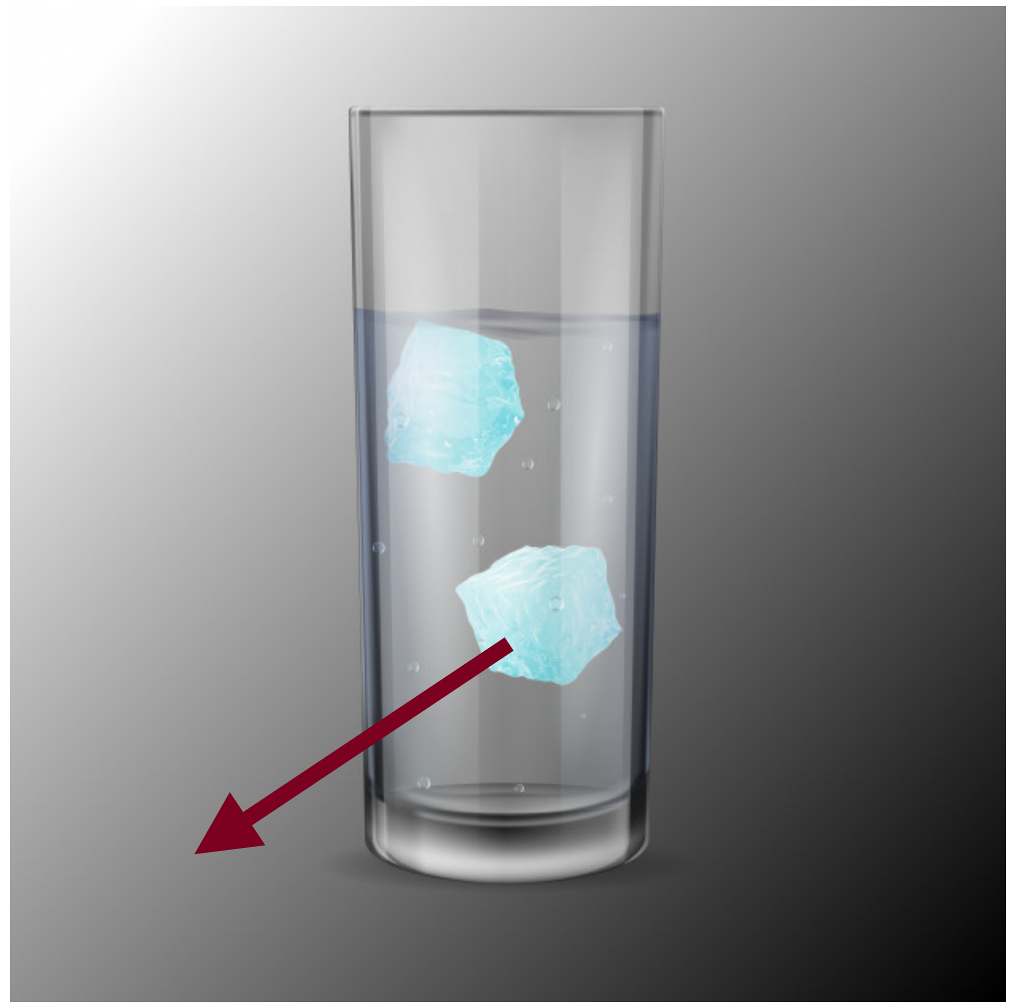
- densidad de masa $$\rho(\underline{r}, t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Noten que $\rho = n m_M$

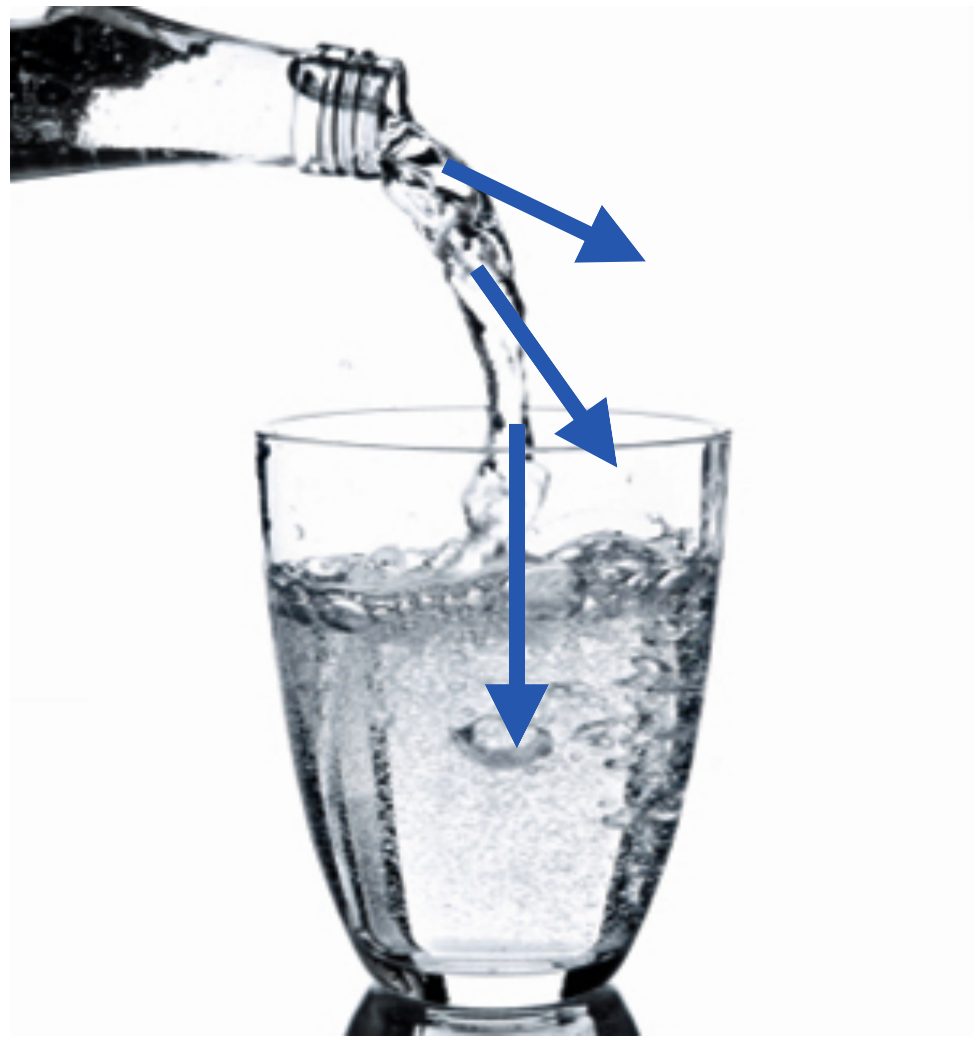
- densidad de partículas $$n(\underline{r}, t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta V}$$

- presión $$p(\underline{r}, t)$$

- campo de velocidades $$\underline{u}(\underline{r}, t)$$



$$d\underline{F} = -\; p \cdot d\underline{S}$$

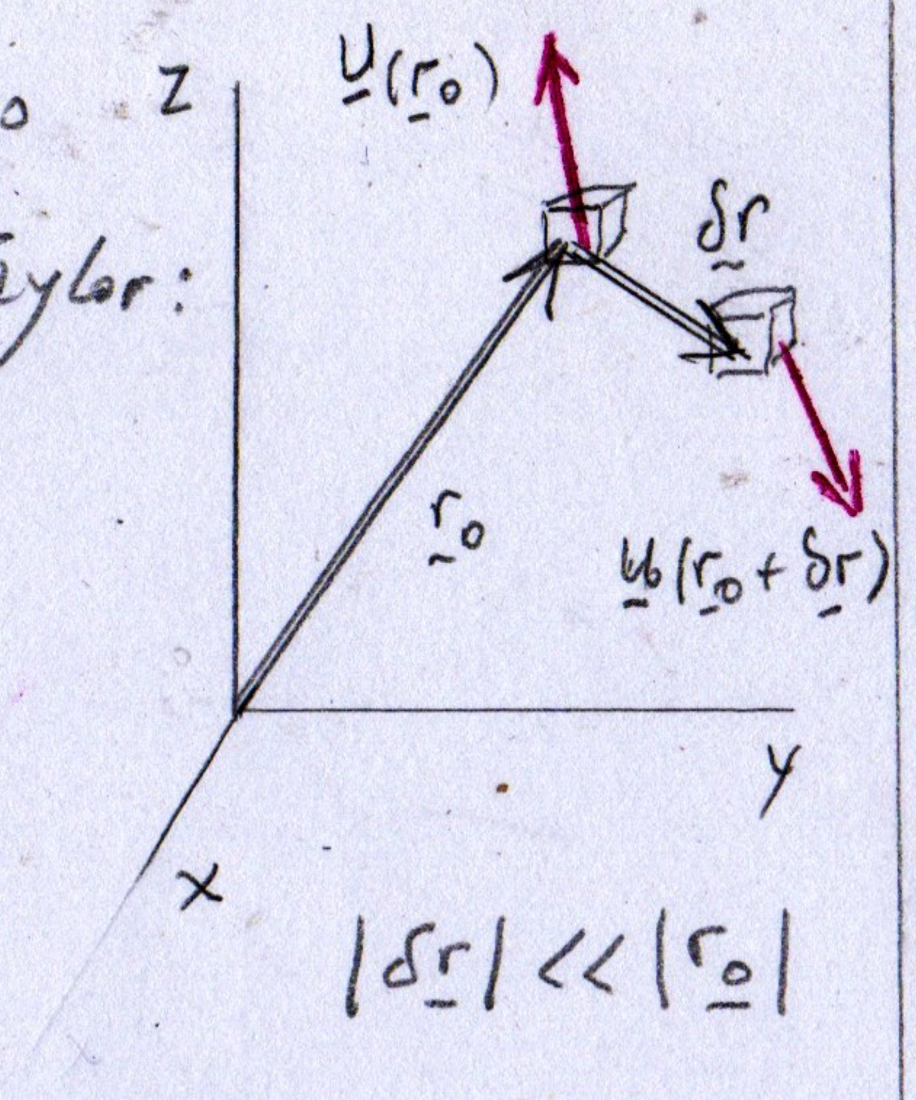


$$\underline{u}(\underline{r}, t)$$

Campo de velocidades local

- Para explorar $\dot{\underline{u}}(\underline{r})$ en el entorno de un punto $\underline{r}_0$, desarrollamos Taylor:

$$u_i(\underline{r}_0+\delta\underline{r}) \simeq u_i(\underline{r}_0) + \underbrace{\left.\frac{\partial u_i}{\partial r_k}\right|_{\underline{r}_0} \delta r_k}_{\delta u_i}$$



$|\delta\underline{r}| \ll |\underline{r}_0|$

- Descomponemos el tensor $\frac{\partial u_i}{\partial r_k}$ en su parte simétrica y anti-simétrica:

$$\frac{\partial u_i}{\partial r_k} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_k}+\frac{\partial u_k}{\partial r_i}\right)}_{S} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_k}-\frac{\partial u_k}{\partial r_i}\right)}_{A} \rightarrow \delta\underline{u} = \delta\underline{u}^S + \delta\underline{u}^A$$

Ejercicio: Mostrar que $\frac{\partial u_i}{\partial r_k} - \frac{\partial u_k}{\partial r_i} = \varepsilon_{ilk}\, w_l$, donde $\underline{w} = \nabla \times \underline{u}$ (vorticidad)

En cuanto a la parte "S" definimos:

$$e_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_k}+\frac{\partial u_k}{\partial r_i}\right) : \text{tensor de velocidad de deformación}$$

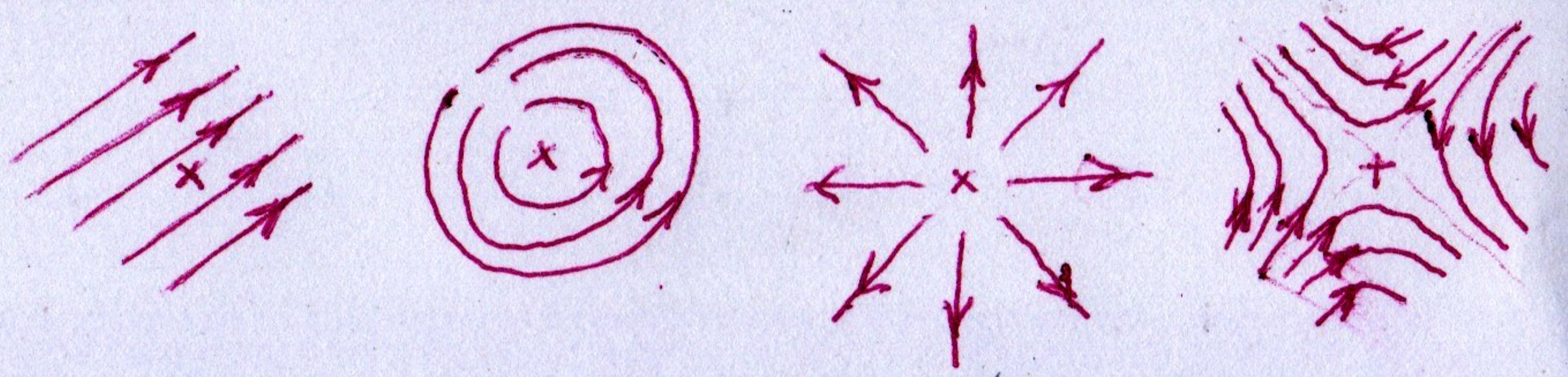
Descomponemos el tensor $\underline{\underline{e}}$ a su vez en:

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{3}Tr(\underline{\underline{e}})\,\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \underbrace{\left(\underline{\underline{e}} - \frac{1}{3}Tr(\underline{\underline{e}})\,\underline{\underline{\mathbb{1}}}\right)}_{\underline{\underline{e}}' \text{ (traza nula)}}$$

Noten que $Tr(\underline{\underline{e}}) = \frac{\partial u_i}{\partial r_i} = \nabla\cdot\underline{u}$

En síntesis, entonces:

$$\boxed{\underline{u}(\underline{r}_0+\delta\underline{r}) = \underline{u}(\underline{r}_0) + \frac{1}{2}\underline{w}_0 \times \delta\underline{r} + \frac{(\nabla\cdot\underline{u})_0}{3}\delta\underline{r} + \underline{\underline{e}}_0'\cdot\delta\underline{r}}$$



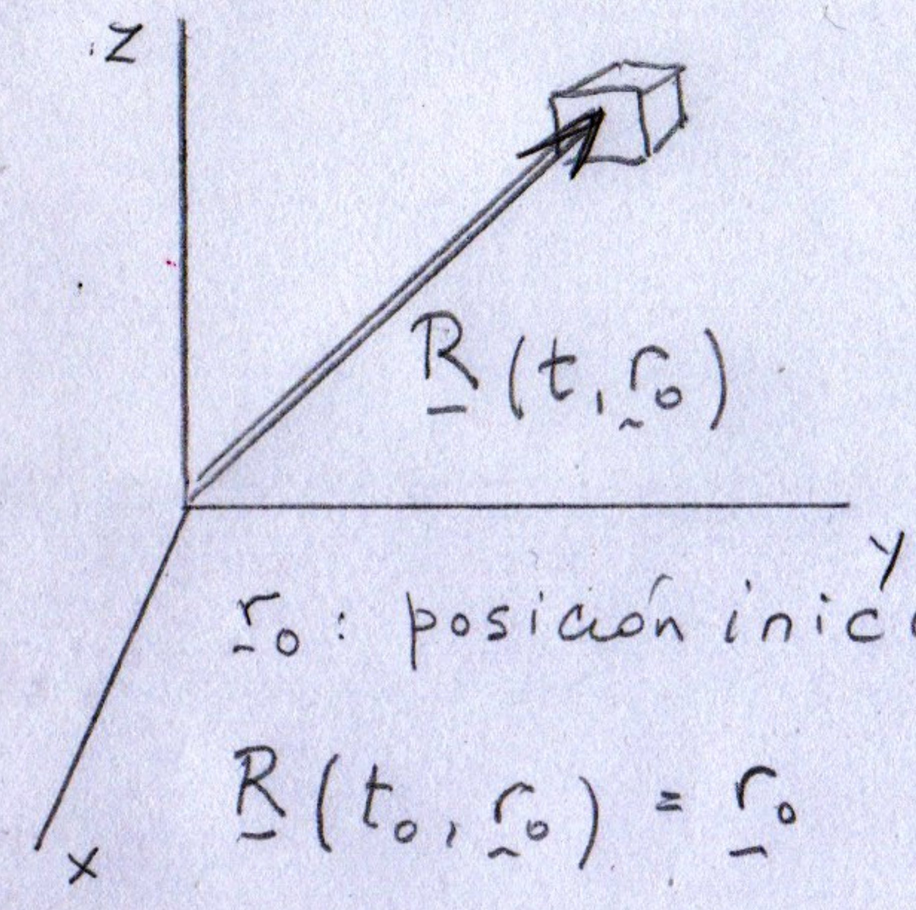
Estos son todos los movimientos posibles en el entorno de cualquier punto para cualquier medio continuo.

NOTA: Lo anterior es cierto $\forall \underline{r}_0$ en el cual $\underline{u}(\underline{r})$ es derivable

Descripciones lagrangiana y euleriana

La llamada descripción **lagrangiana** es la adoptada en cinemática de partículas, que consiste en “seguir” a los E.F. Nosotros, en cambio, utilizaremos la descripción euleriana, que trata a los E.F. como indistinguibles y busca calcular el estado del fluido en cada ($\underline{r}$, t).

Lagrangiana



$\underline{r}_0$: posición inicial

$\underline{R}(t_0, \underline{r}_0) = \underline{r}_0$

Variable indep.: t

$\underline{R}(t, \underline{r}_0)$: posición en t del E.F. que estaba en $\underline{r}_0$ a t_0.

$\underline{U}(t, \underline{r}_0) = \frac{\partial \underline{R}}{\partial t}$: velocidad en t del E.F. "$\underline{r}_0$"

$\underline{A}(t, \underline{r}_0) = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \underline{R}}{\partial t^2}$: aceleración en t del E.F. "$\underline{r}_0$"

Esta descripción preserva la identidad de los E.F., que son infinitos (en rigor, tenemos del orden de $(L/\ell)^3$ E.F.).

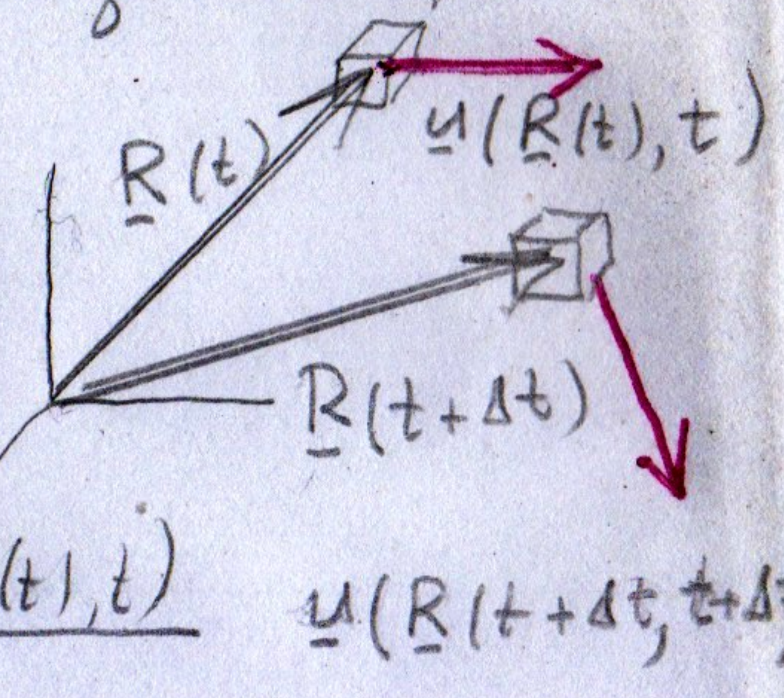
Euleriana

Variables indep.: $\underline{r}$, t

Los E.F. son indistinguibles.

$\underline{u}(\underline{r}, t)$: vel. del E.F. en $(\underline{r}, t)$, pero $\underline{u} \neq \frac{d\underline{r}}{dt}$

Recurrimos a la descripción lagrangiana para medir $\underline{u}$ y $\underline{a}$.



$\underline{r} \equiv \underline{R}(t)$

$$\underline{u}(\underline{r}, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{R}(t+\Delta t) - \underline{R}(t)}{\Delta t} = \frac{\partial \underline{R}}{\partial t}$$

y también

$$\underline{a}(\underline{r}, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{u}(\underline{R}(t+\Delta t), t+\Delta t) - \underline{u}(\underline{R}(t), t)}{\Delta t}$$

Por Taylor:

$$\underline{u}(\underline{R}(t+\Delta t), t+\Delta t) \simeq \underline{u}(\underline{R}(t), t) + \underbrace{\frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{R}}}_{\underline{\nabla}\,\underline{u}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \underline{R}}{\partial t}}_{\underline{u}} \Delta t + \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \Delta t$$

Entonces: $\boxed{\underline{a} = \partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u}}$

Utilizamos la sig. notación

$$\underline{a} = \underbrace{\frac{d\underline{u}}{dt}}_{\text{derivada total (en referencial E.F.)}} = \underbrace{\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}}_{\text{derivada local (en ref. fijo)}} + \underbrace{(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u}}_{\text{derivada convectiva}}$$

Para cualquier campo $f(\underline{r}, t)$ también

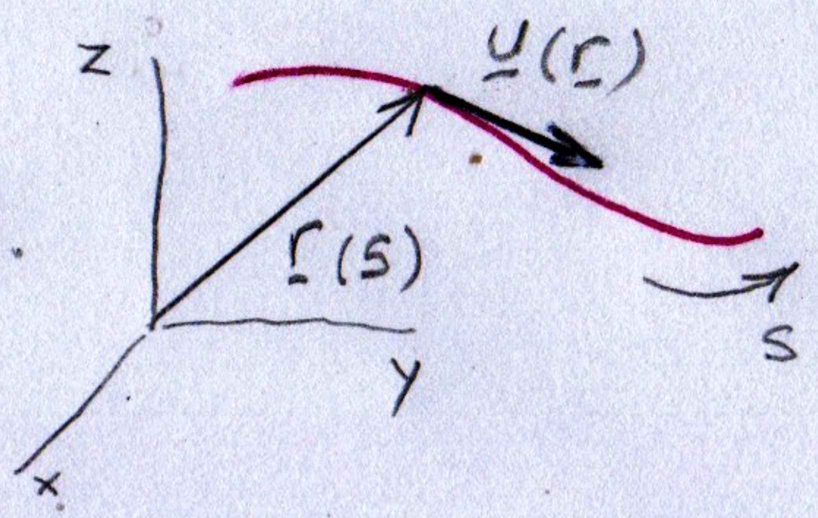
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} f$$

Lineas de corriente y trayectorias

Tenemos al menos dos tipos de lineas para ayudar a visualizar campos de velocidades: **lineas de corriente** y **trayectorias**.

Lineas de corriente son curvas tangentes a $\underline{u}(\underline{r})$ en todo punto (al igual que $\underline{E}(\underline{r})$ ó $\underline{B}(\underline{r})$ en F3).

Se calculan a $t = cte$.



Sea $\underline{r}(s)$ una curva en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por la variable $s \in \mathbb{R}$.

Los vectores $\frac{d\underline{r}}{ds}$ seran tangentes a la curva. La curva $\underline{r}(s)$ tangente en todo punto al campo $\underline{u}(\underline{r})$ deberá satisfacer

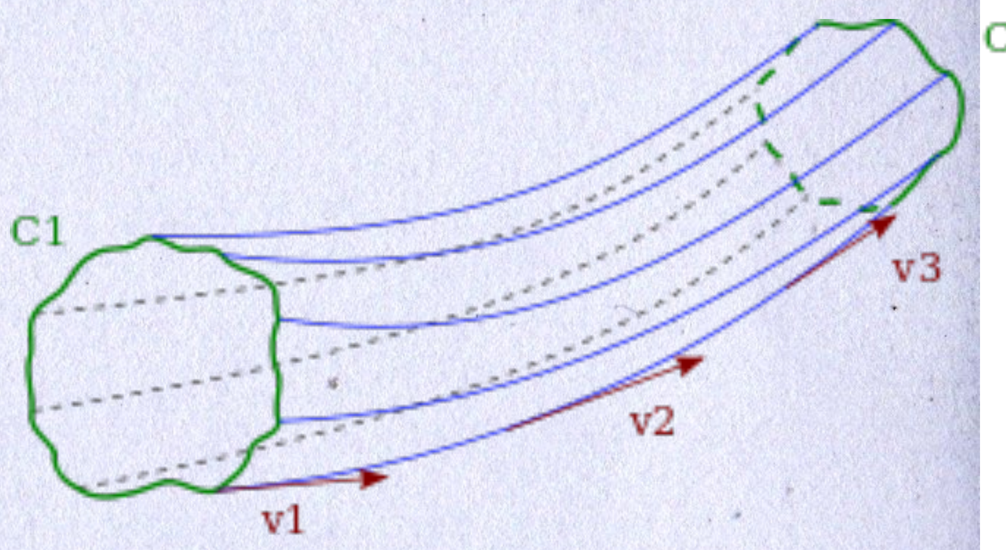
$$\frac{d\underline{r}}{ds} \parallel \underline{u}(\underline{r}) \Longrightarrow \frac{d\underline{r}}{ds} = K\,\underline{u}(\underline{r}, t_0)$$

La incógnita $\underline{r}(s)$ se obtiene de

$$K = \frac{dx/ds}{u_x} = \frac{dy/ds}{u_y} = \frac{dz/ds}{u_z}$$

En 2D $\frac{dx}{u_x(x,y)} = \frac{dy}{u_y(x,y)} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{u_y(x,y)}{u_x(x,y)} \longrightarrow y = y(x)$

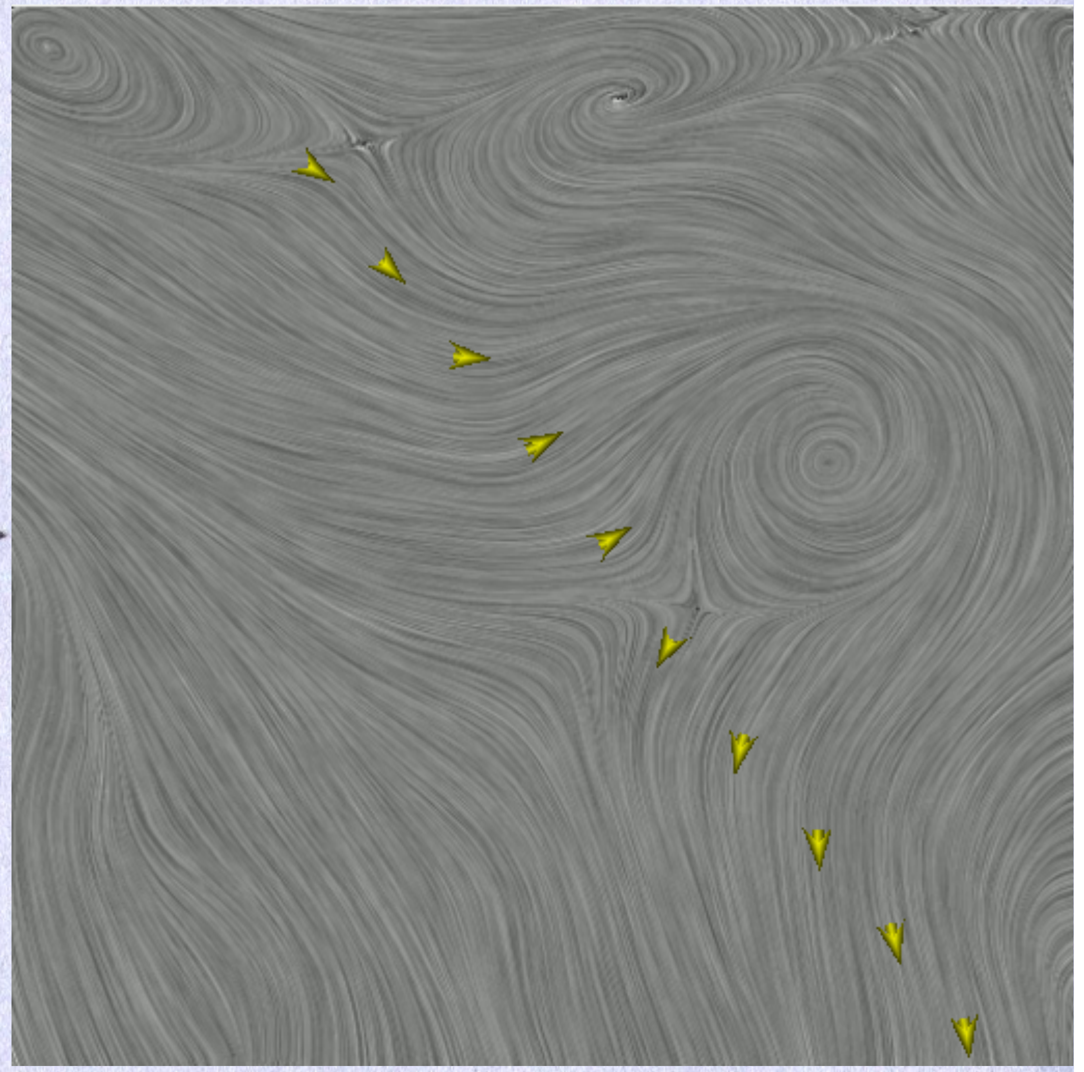
Un manojo de líneas de corriente es un tubo de flujo



Las líneas de corriente son en general distintas de las trayectorias de los E.F., que se calculan como:

$$\frac{d\underline{R}(t)}{dt} = \underline{u}(\underline{R}(t), t)$$

Líneas de corrientes y trayectorias solo coinciden en flujos estacionarios, es decir, si $\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = 0$.



Crédito: Dr. C. Wang, Univ. Notre Dame, USA