Repaso de Clase 2

- Hidrostática >>> Ejemplos

- Variables hidrodinámicas: $\underline{u}\ (\underline{r}, t),\ \rho\ (\underline{r}, t),\ p\ (\underline{r}, t),\ \ldots$

- Campo de velocidades local: traslación + rotación + expansión (compresión) + deformación (vol. cte.)

- Descripciones lagrangiana y euleriana

- $\underline{a} = \partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla})\, \underline{u} = \underline{f} - \dfrac{1}{\rho} \underline{\nabla}\, p$ >>> Mas incógnitas que ecuaciones

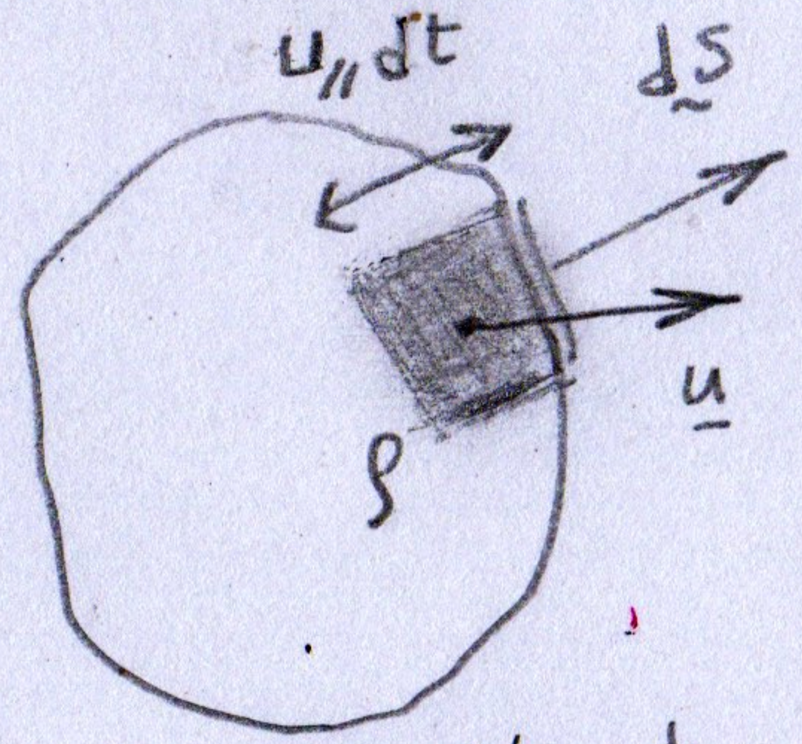
- Líneas de corriente de $\underline{u}\ (\underline{r})$ y trayectorias de E.F.

Ecuación de continuidad

Veamos que los fluidos, en su movimiento, satisfacen leyes de conservación.

Empecemos por la conservacion de masa, que da lugar a la ecuación de continuidad.

Sea el volumen $V = cte$ de la figura del que ingresa y egresa materia a través de las paredes.



$M(t)$, $V = cte$

La masa que sale a través de $d\underline{S}$ en dt es:

$$dM = -\rho u_\parallel \, dt \, dS = -\rho \, \underline{u} \cdot d\underline{S} \, dt$$

La variación de masa en todo el volumen:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \, d^3r = -\oiint_{S_V} \rho \, \underline{u} \cdot d\underline{S}$$

Por el Teorema de Gauss:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, d^3r = -\int_V \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u}) \, d^3r$$

Como $V = cte \longrightarrow \frac{d}{dt} \int_V \rho \, d^3r = \int_V \partial_t \rho \, d^3r$

Entonces $\int_V \left(\partial_t \rho + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u})\right) d^3r = 0$, $\forall V$

Ec. continuidad

y por lo tanto $\boxed{\partial_t \rho + \underline{\nabla} \cdot (\underbrace{\rho \underline{u}}_{\text{flujo de masa}}) = 0}$

densidad de masa

$$\underbrace{\partial_t \rho + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \rho}_{\frac{d\rho}{dt}} + \rho \, \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 \longrightarrow -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$$

- Un flujo se dice incompresible si $\frac{d\rho}{dt} = 0$
- Un flujo homogeneo satisface $\underline{\nabla} \rho = 0$
- Incompresible + homogeneo $\longrightarrow \rho = cte$

Conservación de impulso lineal

Si el impulso lineal de una partícula es $m\underset{\sim}{v}$, el impulso de un E.F. por unidad de volumen será $\rho \underset{\sim}{u}$

Para estudiar su conservación, partimos de la ecuación de movimiento:

$$\rho\, \partial_t \underline{u} + \rho (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} = \rho \underline{f} - \underline{\nabla} p$$

A fin de obtener una ecuación para $\partial_t(\rho \underline{u})$, recurrimos a la ecuación de continuidad:

$$\underline{u}\, \partial_t \rho + \underline{u}\, \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

Sumamos ambas ecuaciones:

$$\partial_t (\rho \underline{u}) + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u}\, \underline{u}) = \rho \underset{\sim}{f} - \underline{\nabla} \cdot (p \underline{\underline{1}})$$

Definimos el tensor de flujo de impulso $\underline{\underline{\pi}}$

$$\underline{\underline{\pi}} = \rho \underline{u}\, \underline{u} + p \underline{\underline{1}} \quad \text{para un fluido ideal}$$

En el caso general

$$\underline{\underline{\pi}} = \rho \underline{u}\, \underline{u} - \underline{\underline{\sigma}}$$

Entonces:

$$\boxed{\underbrace{\partial_t (\rho \underline{u})}_{\text{densidad de impulso}} = \rho \underline{f} - \underline{\nabla} \cdot \underbrace{\underline{\underline{\pi}}}_{\text{flujo de impulso}}}$$

En ausencia de fuerzas de volumen ($\underline{f} = 0$), el impulso lineal total de un volumen $V = cte$ solo varía por flujo de impulso a través de las paredes.

$$\underline{P} = \int_V d^3r\, \rho \underline{u} \longrightarrow \frac{d\underline{P}}{dt} = \int_V d^3r\, \rho \underset{\sim}{f} - \oint\!\!\oint_{S_V} \underline{\underline{\pi}} \cdot d\underline{S}$$

Conservación de energía: teoremas de Bernoulli (1738)

Veremos 4 versiones de teoremas de Bernoulli, que difieren parcialmente en las hipótesis. Todas ellas expresan la conservación de energía y suponen

$\boxed{H1}$ Fluido ideal: $\underline{\underline{\sigma}} = -p\,\underline{\underline{1}}$

$\boxed{H2}$ Fuerzas de volumen conservativas: $\underline{f} = -\underline{\nabla}\phi$

Utilizamos la identidad $(\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u} = \underline{\omega}\times\underline{u} + \underline{\nabla}\left(\frac{u^2}{2}\right)$ en la ec. movimiento:

$$\partial_t \underline{u} + \underline{\omega}\times\underline{u} = -\frac{1}{\rho}\underline{\nabla}p - \underline{\nabla}\left(\phi + \frac{u^2}{2}\right)$$

<u>Bernoulli 1</u>

$\boxed{H3}$ Incompresible y homogeneo: $\rho = cte$

$\boxed{H4}$ Estacionario: $\partial_t = 0$

$$\therefore\ \underline{\omega}\times\underline{u} = -\underline{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{u^2}{2}\right)$$

Entonces $\underline{u}\cdot\underline{\omega}\times\underline{u} = 0 = -\underline{u}\cdot\underline{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{u^2}{2}\right)$

B1 $\quad \frac{u^2}{2} + \phi + \frac{p}{\rho} = cte$ (línea) $\quad$ A lo largo de cada línea de corriente $(\underline{u}\cdot\underline{\nabla})$

<u>Bernoulli 2</u>

$\boxed{H5}$ Irrotacional: $\underline{\omega} = \underline{\nabla}\times\underline{u} = 0$

$$\underline{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{u^2}{2}\right) = 0 \longrightarrow \frac{u^2}{2} + \phi + \frac{p}{\rho} = cte$$

B2 $\quad$ En todo el fluido

<u>Bernoulli 3</u>

$\boxed{H1}\boxed{H2}\boxed{H3}\boxed{\cancel{H4}}\boxed{H5}$ No estacionario: $\partial_t \neq 0$

$$\underline{\omega} = \underline{\nabla}\times\underline{u} = \underline{0} \longrightarrow \underline{u} = \underline{\nabla}\psi \longrightarrow \partial_t\underline{u} = \underline{\nabla}(\partial_t\psi)$$

$$\underline{\nabla}\left(\partial_t\psi + \frac{p}{\rho} + \phi + \frac{u^2}{2}\right) = 0 \longrightarrow \frac{u^2}{2} + \phi + \frac{p}{\rho} + \partial_t\psi = F_{(t)}$$

B3

<u>Bernoulli 4</u>

$\boxed{\cancel{H3}}$ $\rho \neq cte$

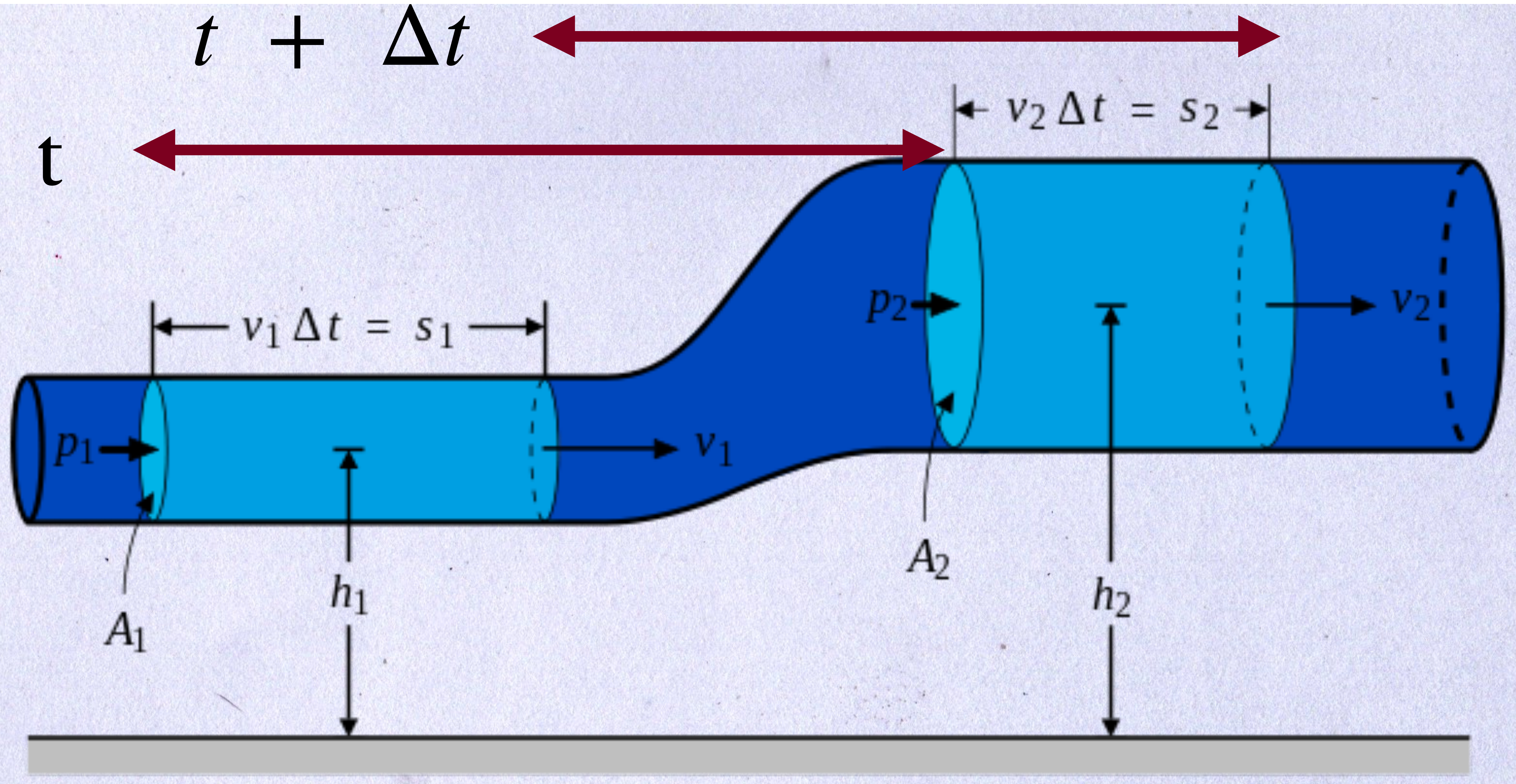
$\boxed{H6}$ Politrópico: $p = K\rho^{\gamma}$

$$\frac{1}{\rho}\underline{\nabla}p \neq \underline{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right) \xrightarrow{\text{pero}} \frac{1}{\rho}\underline{\nabla}p = \frac{\gamma K\rho^{\gamma-1}}{\rho}\underline{\nabla}\rho = \frac{\gamma K}{\gamma-1}\underline{\nabla}\rho^{\gamma-1}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\rho}\underline{\nabla}p = \underline{\nabla}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}\right) \longrightarrow \frac{u^2}{2} + \phi + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} = cte$$

B4

Conservación de energía: teoremas de Bernoulli (1738)



Para el flujo estacionario e incompresible del tubo de flujo de la figura, la porción de fluido entre t y $t+\Delta t$ gana una energía

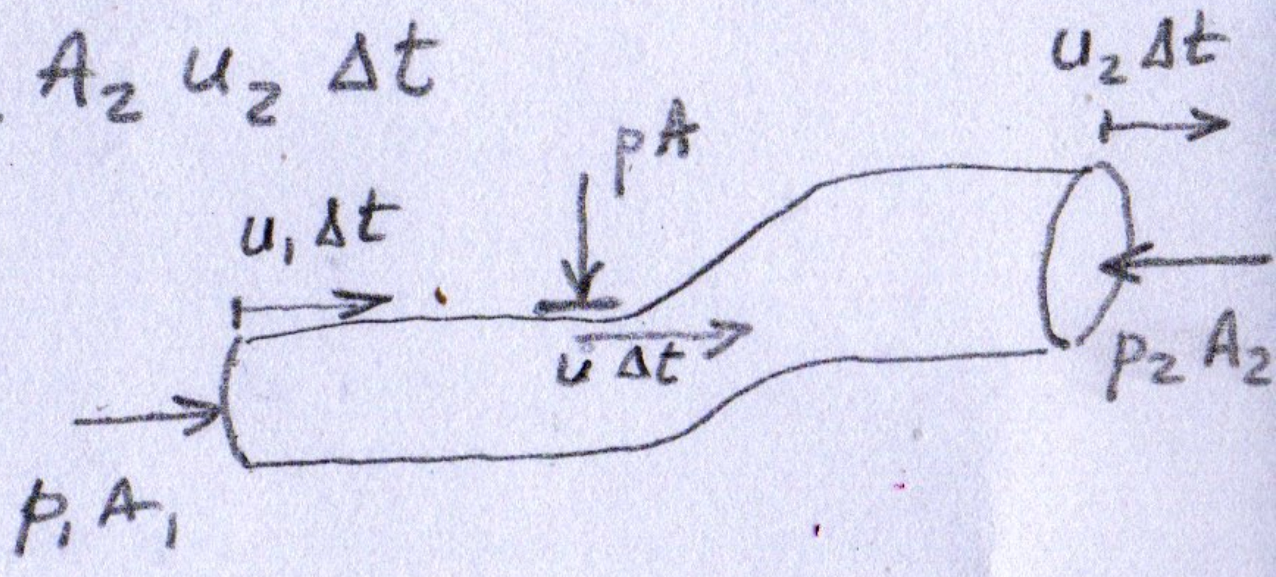
$$\Delta E_2 = \left(\frac{u_2^2}{2} + g h_2\right)\rho A_2 u_2 \Delta t$$

y pierde

$$\Delta E_1 = -\left(\frac{u_1^2}{2} + g h_1\right)\rho A_1 u_1 \Delta t$$

La variación de energía $\Delta E_1 + \Delta E_2$ entre t y $t+\Delta t$, debe igualarse al trabajo de fuerzas no conservativas. Consideremos (por las dudas) no conservativo el trabajo de la presión en la superficie:

$$W = p_1 A_1 u_1 \Delta t - p_2 A_2 u_2 \Delta t$$



ya que el trabajo es nulo en la superficie lateral.

$$W = \Delta(E_1 + E_2)$$

$$\therefore \left(\frac{u_2^2}{2} + g h_2 + \frac{p_2}{\rho}\right)\rho A_2 u_2 \Delta t = \left(\frac{u_1^2}{2} + g h_1 + \frac{p_1}{\rho}\right)\rho A_1 u_1 \Delta t$$

Como el flujo es incompresible: $A_2 u_2 \Delta t = A_1 u_1 \Delta t$
y los extremos "1" y "2" son arbitrarios:

$$\frac{u^2}{2} + g h + \frac{p}{\rho} = cte \text{ (línea)}$$

tubo de espesor infinitesimal

energía cinética — energía potencial — ? (energía interna)