Práctica 1: Cinemática e Hidrostática

Problema 1. Descripciones euleriana y lagrangiana Se tiene un campo de velocidades que escrito en variables eulerianas es:

$$v_x = v_y = 0 \quad , \quad v_z = f(z) \quad ,$$

para $t \geq 0$ y $z \geq 0$. Encuentre la descripción lagrangiana de este movimiento en los siguientes casos:
(i) Caída libre: $f(z) = -\sqrt{2gz}$
(ii) Frenado: $f(z) = v_0 - z/\tau$
(iii) Oscilador armónico: $f(z) = \sqrt{v_0^2 - \omega^2 z^2}$

Problema 2. Considere la temperatura en un túnel dada por

$$T = T_0 - \alpha\, e^{-x/L}\, \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \quad ,$$

donde T_0, α, L y τ son constantes positivas. Una partícula se mueve en el túnel con velocidad U constante.
(i) Halle la variación de la temperatura por unidad de tiempo que experimenta la partícula bajo una descripción euleriana. Grafique la temperatura para instantes próximos e interprete geométricamente las componentes de la derivada total.
(ii) Repita el punto (i) para una descripción lagrangiana. ¿Coinciden las dos descripciones realizadas?

Problema 3. Trayectorias, líneas de corriente y líneas de trazas Halle las trayectorias, las líneas de corriente y las trazas de una partícula ubicada en (x_0, y_0) a $t = 0$, para los siguientes campos de velocidades bidimensionales:
(i) Una corriente uniforme $\vec{u}(x,t) = U\hat{x}$.
(ii) Una fuente lineal de caudal constante $\vec{u}(r,\theta) = \frac{Q}{2\pi r}\hat{r}$.
(iii) Un torbellino con circulación constante $\vec{u}(r,\theta) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\hat{\theta}$.
(iv)^N Un sumidero lineal (fuente con $Q \to -Q$) superpuesto a un torbellino de circulación constante Γ.
(v)^N Una fuente lineal de caudal constante superpuesta a una corriente uniforme de velocidad U.

Problema 4. (∗) Halle las trayectorias, las líneas de corriente las trazas de una partícula ubicada en (x_0, y_0) a $t = 0$, para los siguientes campos de velocidades bidimensionales:
(i) Una corriente uniforme constante superpuesta a otra corriente uniforme ortogonal a la primera. La velocidad U' de la segunda corriente está modulada en forma armónica en el tiempo con período τ.
(ii) Un flujo con campo de velocidad dado por

$$\vec{u}(x,y,t) = \frac{\alpha x}{1+\beta t}\hat{x} + c\hat{y}$$

(iii)^N Una fuente lineal de caudal constante superpuesta a una corriente uniforme cuya velocidad U aumenta linealmente con el tiempo.
(iv)^N Un sumidero lineal superpuesto a un torbellino cuya circulación decrece exponencialmente con un tiempo característico τ.

Problema 5. Vector 'Remolino' Muestre que para un fluido rotante con velocidad angular $\vec{\Omega}$, la vorticidad es $\vec{\omega} = 2\vec{\Omega}$.

Problema 6. Cálculo de la vorticidad Calcule la vorticidad de los siguientes campos de velocidades bidimensionales:
(i) $v_\theta = v_0(1 - rt/\alpha)$
(ii) $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$
(iii) $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left[1 - e^{-r^2/(4\nu t)}\right]$
(iv) $v_x = v_0 y/L$

Problema 7. Modelo de ciclón Considere el campo de velocidades de un fluido consistente en un núcleo cilíndrico muy alargado de base circular con radio a, que rota rígidamente sobre su eje principal con velocidad angular constante Ω. Fuera del núcleo, el campo de velocidades es también azimutal, pero con vorticidad nula. El campo de velocidades es continuo en $r = a$, donde r es la coordenada radial cilíndrica con el eje z coincidente con el eje del núcleo. Puede prescindir de la gravedad.
(i) Determine el campo de velocidades para todo valor de r.
(ii) Determine la distribución de la presión y de la vorticidad para todo r, en función de la presión muy lejos del eje p_∞. Encuentre qué condición debe satisfacer Ω respecto del valor de la presión p_∞.

Problema 8. En el semiplano superior ($y > 0$) se tiene un fluido ideal que se mueve acorde con el campo de velocidades $\vec{v} = \alpha x\hat{x} - \alpha y\hat{y}$.
(i) Calcule la trayectoria del elemento de fluido que inicialmente se encuentra en (x_0, y_0). Encuentre una expresión $y = y(x)$ para las líneas de corriente.
(ii) Si inicialmente la distribución de densidades del fluido es $\rho_0(x, y) = \lambda x^2 y$, calcule $\rho(x, y, t)$ *(ayuda: considere que la función densidad es separable en su dependencia temporal y espacial).*
(iii) ¿Cuál es, en el instante t_1, la densidad del elemento de fluido que inicialmente estaba en (x_0, y_0)? ¿A qué se debe el resultado obtenido?
(iv) Encuentre la distribución de presiones si sobre el fluido actúa una fuerza $\vec{F}^M = \alpha^2\vec{r}$ (fuerza por unidad de masa) y la presión en (x_0, y_0) es p_0.

Problema 9. Taquímetro hidrostático Un recipiente cilíndrico de eje vertical, de radio R y altura $2H$, inicialmente lleno hasta la mitad con un líquido incompresible, gira alrededor de su eje con velocidad angular uniforme Ω y bajo acción de la gravedad.
(i) ¿Cuál es la forma de la superficie libre del líquido?
(ii) ¿Para qué velocidad angular de rotación la superficie libre empieza a tocar el fondo?
(iii) ¿Para qué velocidad angular de rotación el agua empieza a desbordar, si $R = 5$ cm, $H = 7{,}5$ cm, $g = 9,8$ m/s^2? Calcule el valor numérico de la frecuencia hallada.
(iv) Si el recipiente tiene las dimensiones dadas en (iii), grafique la distribución de presiones sobre las paredes y sobre el fondo en los casos:
   (a) En reposo.
   (b) Cuando el recipiente rota con frecuencia $\nu = 90$ rpm.
(v) Piense un método que le permita medir velocidades angulares con el taquímetro.

Problema 10. El comportamiento del agua a una dada temperatura se modela bien por la relación $p = K(\rho - \rho_0)/\rho_0$, donde ρ_0 es la densidad en ausencia de presión y K una constante.
(i) Si el agua se encuentra en reposo bajo la acción de la fuerza por unidad de masa $\vec{F} = g\hat{z}$, determine la distribución de presión y de densidad del agua en función de la profundidad sabiendo que $\rho(z = 0) = \rho_0$.
(ii) Repita suponiendo ahora al agua estrictamente incompresible ($K \to \infty$). Calcule el error que se comete al suponer al agua incompresible al determinar la densidad y la presión de la misma a una profundidad de 1000 m, ($K = 2 \times 10^9$ N/m^2, $\rho_0 = 1000$ kg/m^3). Desprecie la presión en la superficie.

Problema 11. Modelos simplificados de la atmósfera terrestre Considere una atmósfera plana en reposo compuesta por un gas ideal ($p = \rho RT/m$, con R la constante universal de los gases y m la masa molecular media) y sometida a gravedad g. Asuma que sobre sobre la superficie se tiene presión p_0 y densidad ρ_0
(i) Muestre que dado un perfil de temperaturas $T(z)$ la presión resulta

$$p(z) = p_0 \exp\left\{-\frac{mg}{R}\int_0^z \frac{dz'}{T(z')}\right\}$$

Muestre que si T depende de x, y y z, no existe solución hidrostática posible y debe haber por lo tanto movimiento del gas.
(ii) Habitualmente el perfil de temperatura no es conocido, sino que se obtiene de forma autoconsistente a partir de ρ y p. Para un gas adiabático ($p\rho^{-\gamma}$ = cte), halle y grafique la presión, la densidad y la temperatura de la atmósfera como función de la altura. Muestre que esta atmósfera tiene altura finita y calcúlela usando $P_0 = 101325$ N/m^2, $\rho_0 = 1{,}205$ kg/m^3 y $\gamma = 1{,}4$. Tome cómo referencia que la tropósfera alcanza los 12km y la estratósfera los 50km de altura.

Es posible refinar un poco más el resultado anterior cambiando el gas ideal por un gas de Van der Waals con ecuación de estado $\rho RT/m = \left(p + \beta\rho^2\right)\left(1 - \rho/\rho_c\right)$ donde β es un término de atracción intermolecular y ρ_c es la máxima densidad que puede alcanzar el gas. En el caso adiabático cumple además $\left(p + \beta\rho^2\right)\rho^{-\gamma}\left(1 - \rho/\rho_c\right)^\gamma$ = cte.
(iii) Mediante la adimensionalización $p = p_0 P$ y $\rho = \rho_0\theta$, use la relación adiabática para despejar $P(\theta)$ en términos de $a = \rho_0/\rho_c$ y $b = \beta\rho_0^2/p_0$. Use esto junto con $z = (p_0/\rho_0 g)\xi$ para mostrar que la ecuación de Euler reduce a

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi} = \left(2b - \frac{\gamma(1+b)(1-a)^\gamma\theta^{\gamma-2}}{(1-a\theta)^{\gamma+1}}\right)^{-1}$$

(iv)^N Integre numéricamente la ecuación anterior para $0 \le a, b \le 0{,}5$ y $\gamma = 1{,}4$ (gas diatómico). Verifique que su solución coincide con la del gas ideal para $a = b = 0$. ¿Que ocurre con la altura de la atmósfera a medida que aumenta a y b? *Ayuda: Al igual que la solución analítica del gas ideal, durante la integración surgirá alguna operación inválida que le permitirá darla por finalizada.*

Problema 12. (∗) Estrella Autogravitante Este problema tiene como objetivo modelar la estructura básica de una estrella. Para ello, pensemos que la estrella se compone de una masa de fluido auto-gravitante cuyos elementos se encuentran en equilibrio hidrostático, la presión evitando que la atracción gravitatoria los lleve al colapso. Asumiremos que la configuración posee simetría esférica.
(i) Muestre que, para el fluido que compone la estrella, la ecuación de Euler puede escribirse como

$$\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = -\frac{GM(r)}{r^2}\hat{r} \quad ,$$

siendo $M(r) = \int_0^r \rho 4\pi r^2 \, dr$ y $\hat{r}$ el versor radial en coordenadas esféricas. Utilice para esto la Ley de Gauss del campo gravitatorio $\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho$ y que la fuerza gravitatoria por unidad de volumen es $\vec{f}_V = \rho\vec{g}$.
(ii) Asuma una ecuación de estado politrópica para el gas que compone la estrella, de forma tal que $p = K\rho^{(n+1)/n}$, siendo n el índice politrópico y K una constante. Obtenga una ecuación diferencial para el campo de densidad de la estrella. *Ayuda: Opere sobre la ecuación de (i) hasta deshacerse de la integral.*
(iii) A fin de simplificar la resolución, proponga la siguiente adimensionalización de las variables:

$$r = a\xi \quad , \quad \rho = \rho_c \theta^n \quad ,$$

introduciendo la coordenada radial adimensional ξ y la función adimensional $\theta(\xi)$ que representa la densidad de masa normalizada por su valor en el centro de la estrella ρ_c. En términos de estas nuevas variables, derive una ecuación diferencial para $\theta(\xi)$ y simplifiquela elegiendo $a^2 = K(n+1)/(4\pi G\rho_c^{1-1/n})$ para obtener

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi} + \theta^n = 0$$

(iv) Determine cuáles son las dos condiciones iniciales sobre $\theta(\xi)$. *Ayuda: Use el resultado del item (i).*
(v)^N Resuelva numéricamente la ecuación anterior para $n = 1, 2, .., 10$. ¿Para qué valores es la estrella finita? *Ayuda: Puede evitar la singularidad en $\xi = 0$ comenzando la integración en un valor pequeño (i.e. $\xi = 10^{-16}$) con las mismas condiciones iniciales.*
(vi)^N Para los casos finitos, grafique la masa total (adimensionalizada) M_T/M_0 de la estrella en función de n, donde $M_0 = 4\pi a^3 \rho_c/3$. *Ayuda: Muestre antes que $M(\xi) = -4\pi a^3 \rho_c \xi^2 \theta'(\xi)$.*