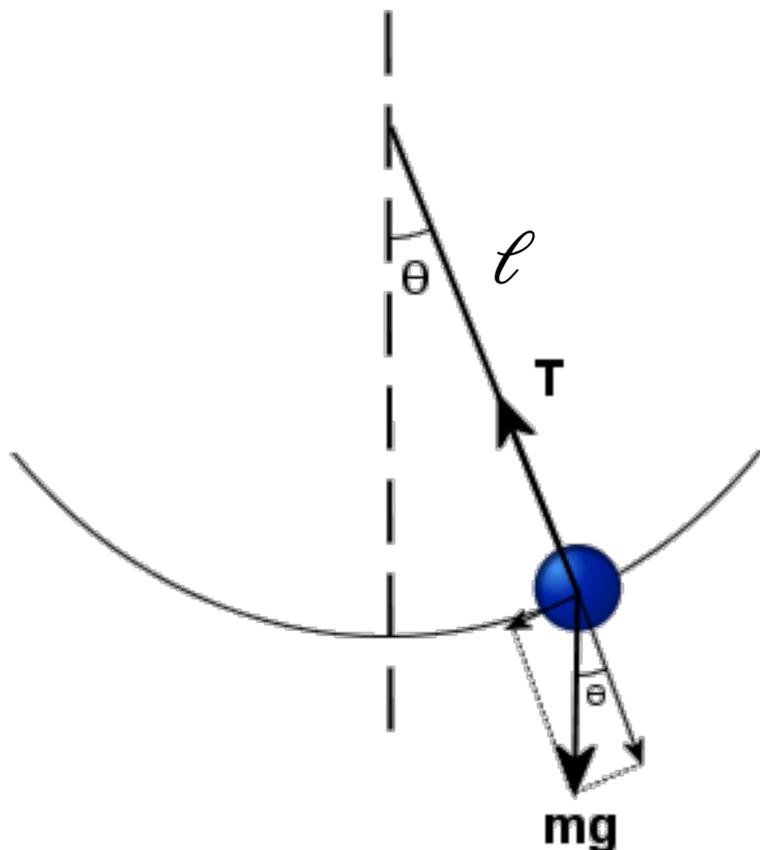


Análisis dimensional

El análisis dimensional se basa en que cualquier ecuación que exprese una ley física, debe satisfacerse independientemente del sistema de unidades empleado.

Cada sistema de unidades corresponde a una diferente elección de magnitudes primarias: L, T, M, ...

Veamos un ejemplo sencillo: **Cual es el período del péndulo?**



Supongamos que el período debe depender de

$$\tau = \tau(m, \ell, g)$$

Aquí es clave decidir de cuales parámetros depende el período τ , sin olvidar ninguno relevante. La forma funcional en la cual τ depende de los parámetros m , ℓ y g , debe ser tal que el resultado tenga unidades de tiempo. Es decir:

$$\tau \simeq m^\alpha \ell^\beta g^\gamma$$

Si prestamos atención a las unidades de cada cantidad:

$$T = M^\alpha L^\beta \left(\frac{L}{T^2}\right)^\gamma$$

Si igualamos los exponentes de M, L y T de cada lado:

$$\alpha = 0$$

$$\beta + \gamma = 0$$

$$1 = -2\gamma$$

Es decir que: $\tau \simeq \sqrt{\ell/g}$

El resultado exacto (al resolver el problema) es: $\tau = 2\pi\sqrt{\ell/g}$

Teorema Pi de Buckingham

Sea $a = f(a_1, \dots, a_n)$ y (a, a_1, \dots, a_n) expresadas en términos de k ($k \leq n$) unidades primarias. Entonces, es posible formar $(n+1-k)$ cantidades adimensionales $(\pi, \pi_1, \dots, \pi_{n-k})$ tales que $\pi = F(\pi_1, \dots, \pi_{n-k})$.

Dem
Sin perder generalidad, elegimos como independientes a (a_1, \dots, a_k) , es decir $[a_1] = A_1, \dots, [a_k] = A_k$.

Por hipótesis, las restantes pueden expresarse como combinación de estas:

$$[a] = A_1^{\alpha_1} \dots A_k^{\alpha_k} \dots [a_{k+1}] = A_1^{\beta_1} \dots A_k^{\beta_k} \dots [a_n] = A_1^{\epsilon_1} \dots A_k^{\epsilon_k}$$

Si ahora reescalamos las k magnitudes

independientes (pasamos de m a cm , por ejemplo)

$$\left. \begin{matrix} a'_1 = b_1 a_1 \\ \vdots \\ a'_k = b_k a_k \end{matrix} \right\} \rightarrow \left. \begin{matrix} a' = b_1^{\alpha_1} \dots b_k^{\alpha_k} a \\ a'_{k+1} = b_1^{\beta_1} \dots b_k^{\beta_k} a_{k+1} \\ \vdots \\ a'_n = b_1^{\epsilon_1} \dots b_k^{\epsilon_k} a_n \end{matrix} \right\}$$

Desde luego: $a' = f(a'_1, \dots, a'_n)$, es decir que

$$b_1^{\alpha_1} \dots b_k^{\alpha_k} a = f(b_1 a_1, \dots, b_k a_k, b_1^{\beta_1} \dots b_k^{\beta_k} a_{k+1}, \dots, b_1^{\epsilon_1} \dots b_k^{\epsilon_k} a_n)$$

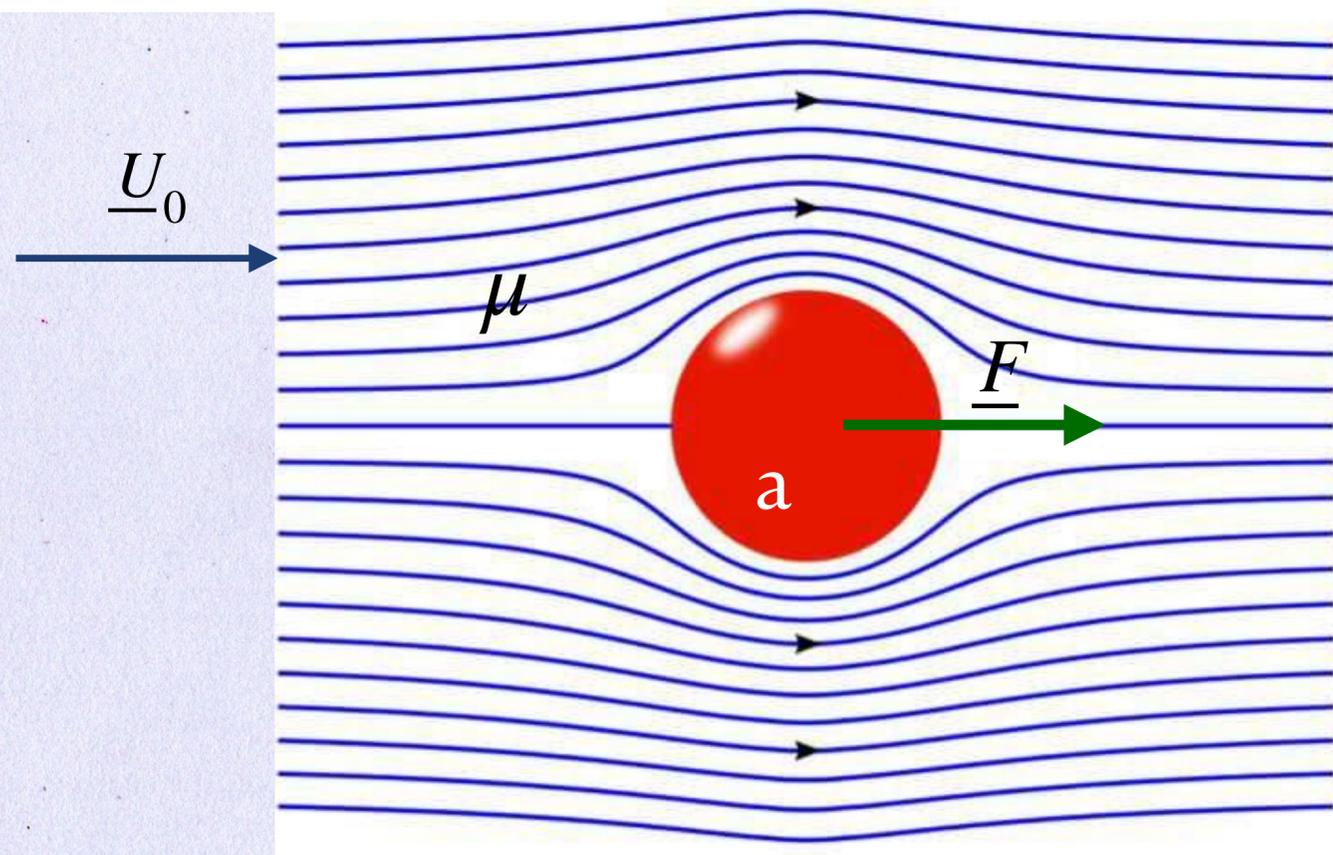
Elegimos un reescalamiento que dejes a las cantidades primarias como unidades patrón:

$$\left. \begin{matrix} b_1 = \frac{1}{a_1} \\ \vdots \\ b_k = \frac{1}{a_k} \end{matrix} \right\} \rightarrow \frac{a}{a_1^{\alpha_1} \dots a_k^{\alpha_k}} = f\left(1, \dots, 1, \frac{a_{k+1}}{a_1^{\beta_1} \dots a_k^{\beta_k}}, \dots, \frac{a_n}{a_1^{\epsilon_1} \dots a_k^{\epsilon_k}}\right)$$

Definimos: $\pi = \frac{a}{a_1^{\alpha_1} \dots a_k^{\alpha_k}} \dots \pi_1 = \frac{a_{k+1}}{a_1^{\beta_1} \dots a_k^{\beta_k}} \dots \pi_{n-k} = \frac{a_n}{a_1^{\epsilon_1} \dots a_k^{\epsilon_k}}$

y $F(\underbrace{* \dots *}_{n-k}) = f(\underbrace{1 \dots 1}_k, \underbrace{* \dots *}_{n-k}) \rightarrow \pi = F(\pi_1, \dots, \pi_{n-k})$

Ejemplo 1: Ley de Stokes



Cuánto vale F ?

Supongamos que $F = F(\mu, a, U_0)$

- El teorema π no me dice de que parámetros depende la incógnita.
- Me dice cuantos números P_i , pero no dice cuáles son.

En este caso:

$$\left. \begin{array}{l} n = 3 \\ k = 3 (M, L, T) \end{array} \right\} \rightarrow n - k + 1 = 1 \rightarrow \pi = \text{cte}$$

$$\left. \begin{array}{l} [\mu] = \frac{M}{LT} \\ [a] = L \\ [U_0] = \frac{L}{T} \\ [F] = \frac{ML}{T^2} \end{array} \right\} \rightarrow F \approx \mu^\alpha a^\beta U_0^\gamma$$

$$\therefore \frac{ML}{T^2} = \left(\frac{M}{LT}\right)^\alpha L^\beta \left(\frac{L}{T}\right)^\gamma$$

$$\left. \begin{array}{l} (M) \quad 1 = \alpha \\ (L) \quad 1 = -\alpha + \beta + \gamma \\ (T) \quad 2 = \alpha + \gamma \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\alpha = 1} \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{array} \rightarrow F \approx \mu a U_0$$

- La clase pasada obtuvimos la expresión exacta:

$$\underline{F} = 6\pi\mu a \underline{U}_0$$

- Noten que si en vez de una esfera fuera una piedra de tamaño lineal a , solo cambiará el factor 2 dimensional 6π según sea la forma de la piedra.

Inestabilidades y ondas

- El análisis de estabilidad/inestabilidad de un sistema, se realiza alrededor de un equilibrio determinado.

- Matemáticamente, si la cantidad $f(r, t)$ expresa el estado del sistema:

$$f(r, t) = f_0(r) + \delta f(r, t)$$

↓
equilibrio

↓
perturbación

- $f(r, t) = f_0(r)$ debe ser solución de las ecuaciones, pero ser considerado un estado de equilibrio.

- Si perturbamos (señalamos) ese equilibrio:

$$\|\delta f(r, t)\| \ll \|f_0(r)\|$$

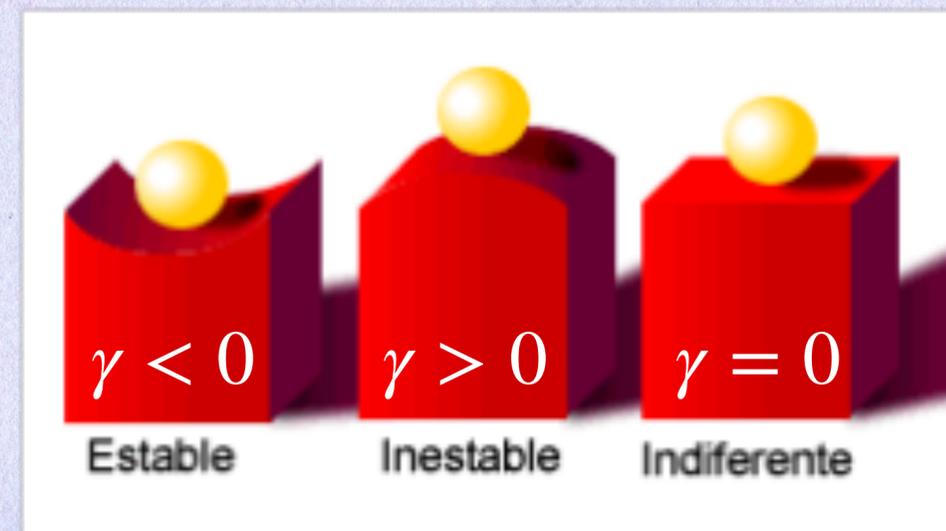
- Linealizamos el problema ($\delta f^2 \ll \delta f$) para obtener una ecuación (lineal) para δf .

- $\delta f(r, t) = \delta f(r) e^{-i\omega t}$

$\omega \in \mathbb{C}$ en general $\rightarrow \omega = \omega_R + i\gamma$

$$\therefore \delta f(r, t) = \delta f(r) \underbrace{e^{-i\omega_R t}}_{\text{propagación}} e^{\gamma t}$$

$\gamma > 0$ inest.
 $\gamma < 0$ est.



Inestabilidades de Kelvin-Helmholtz y Rayleigh-Taylor

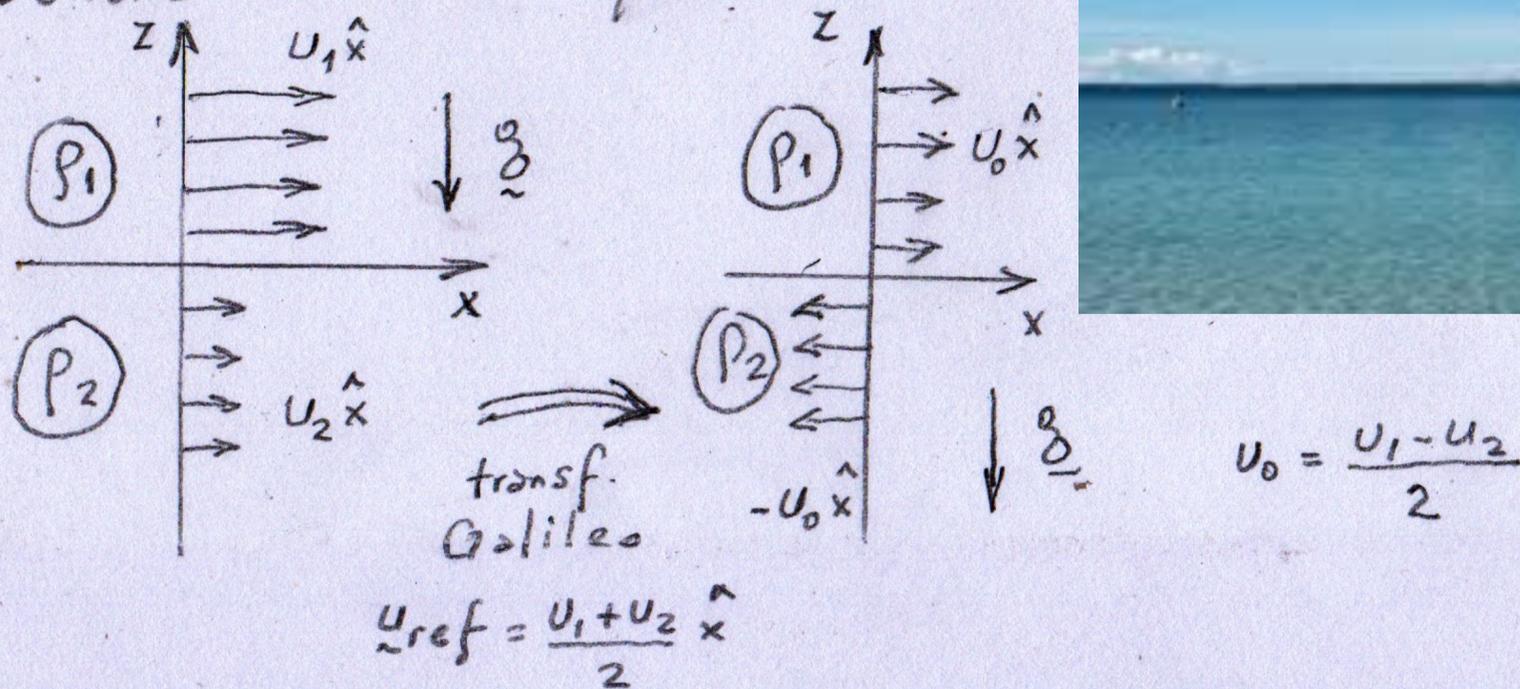
La inestabilidad de KH tiene lugar cuando dos flujos tienen diferente velocidad tangencial respecto de una interfase.



- La interfase $z=0$ se corruga y vale $\zeta(x,t)$.
- La velocidad a un lado y otro de la interfase esta dada por $\pm u_0 \hat{x} + \nabla \phi_{1,2}(x,z,t)$

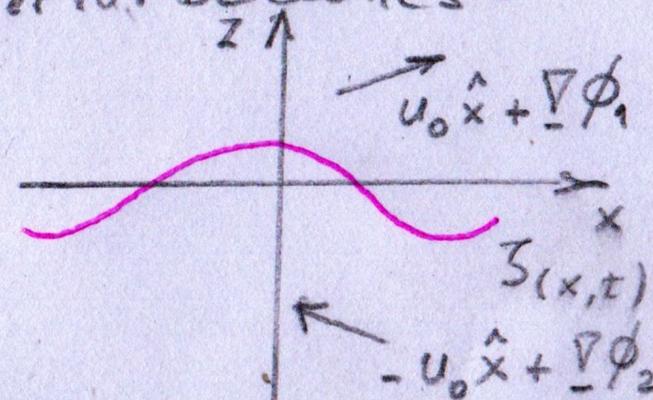
- La presión de cada lado : $p_0 - \rho_{1,2} g z + \delta p_{1,2}(x,z,t)$

• Consideremos el equilibrio:



• Superponemos pequeñas perturbaciones:

- planas ($\partial_y = 0, u_y = 0$)
- incompresibles ($\nabla \cdot \underline{u} = 0$)
- irrotacionales ($\nabla \times \underline{u} = 0$)
- ideales ($\nu \cong 0$)

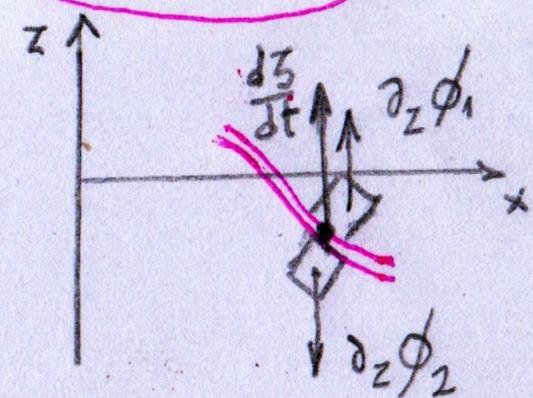


- Como $\nabla \cdot \underline{u} = 0$, en cada zona es $\nabla^2 \phi_{1,2} = 0$

- La velocidad vertical a uno y otro lado debe ser:

$$\partial_z \phi_1 \approx \partial_t \zeta + u_0 \partial_x \zeta$$

$$\partial_z \phi_2 \approx \partial_t \zeta - u_0 \partial_x \zeta$$



- También debemos igualar presiones a uno y otro lado de la interfase $p_1(x, \zeta, t) = p_2(x, \zeta, t)$

Inestabilidades de Kelvin-Helmholtz y Rayleigh-Taylor

Como el flujo es irrotacional pero no estacionario, obtenemos la presión de cada lado por Bernoulli-3:

$$\partial_t \phi + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{u^2}{2} = C(t)$$

Linealizamos:

$$u_{1,2} = \pm u_0 \hat{x} + \nabla \phi_{1,2} \rightarrow u_{1,2}^2 = u_0^2 \pm 2u_0 \partial_x \phi_{1,2}$$

$$\therefore p_{1,2} = \rho_{1,2} \left[C_{1,2} - \partial_t \phi_{1,2} - gz - \frac{u_0^2}{2} \mp u_0 \partial_x \phi_{1,2} \right]$$

Podemos absorber $C_{1,2}$ y $\frac{u_0^2}{2}$ con una adecuada redefinición de $\phi_{1,2}$. Finalmente $p_1(z) = p_2(z)$

$$-\rho_1 (\partial_t \phi_1 + gz + u_0 \partial_x \phi_1) = -\rho_2 (\partial_t \phi_2 + gz - u_0 \partial_x \phi_2)$$

Las ecs. recuadradas forman un sistema lineal a coeficientes ctes. para ζ, ϕ_1, ϕ_2 .

$$\zeta(x,t) = A e^{ikx - i\omega t}$$

$$\phi_{1,2}(x,z,t) = F_{1,2}(z) e^{ikx - i\omega t}$$

De las ecs. Laplace:

$$\nabla^2 \phi_{1,2} = 0 \rightarrow \partial_{zz} F_{1,2} - k^2 F_{1,2} = 0 \rightarrow F_{1,2} \sim e^{\pm kz}$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \phi_1 < \infty \\ z \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \rightarrow F_1(z) = B_1 e^{-kz}$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \phi_2 < \infty \\ z \rightarrow -\infty \end{array} \right\} \rightarrow F_2(z) = B_2 e^{kz}$$

$$e^{\pm k\zeta} \approx 1 \pm k\zeta$$

Reemplazando en las otras ecuaciones:

$$\rho_1 (gz - i\omega B_1 + ikU_0 B_1) = \rho_2 (gz - i\omega B_2 - ikU_0 B_2)$$

$$-kB_1 = -i(\omega - kU_0)A$$

$$kB_2 = -i(\omega + kU_0)A$$

Es decir que:

$$\begin{pmatrix} -i(\omega - kU_0)\rho_1 & i(\omega + kU_0)\rho_2 & (\rho_1 - \rho_2)g \\ -k & 0 & i(\omega - kU_0) \\ 0 & k & i(\omega + kU_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ A \end{pmatrix} = 0$$

Kelvin-Helmholtz

Las soluciones no triviales satisfacen:

$$\det() = 0 \rightarrow \omega = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} k U_0 \pm \sqrt{\frac{-4\rho_1\rho_2 k^2 U_0^2 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} k g}{(\rho_1 + \rho_2)^2}}$$

La inestabilidad K-H corresponde al límite $g=0$.

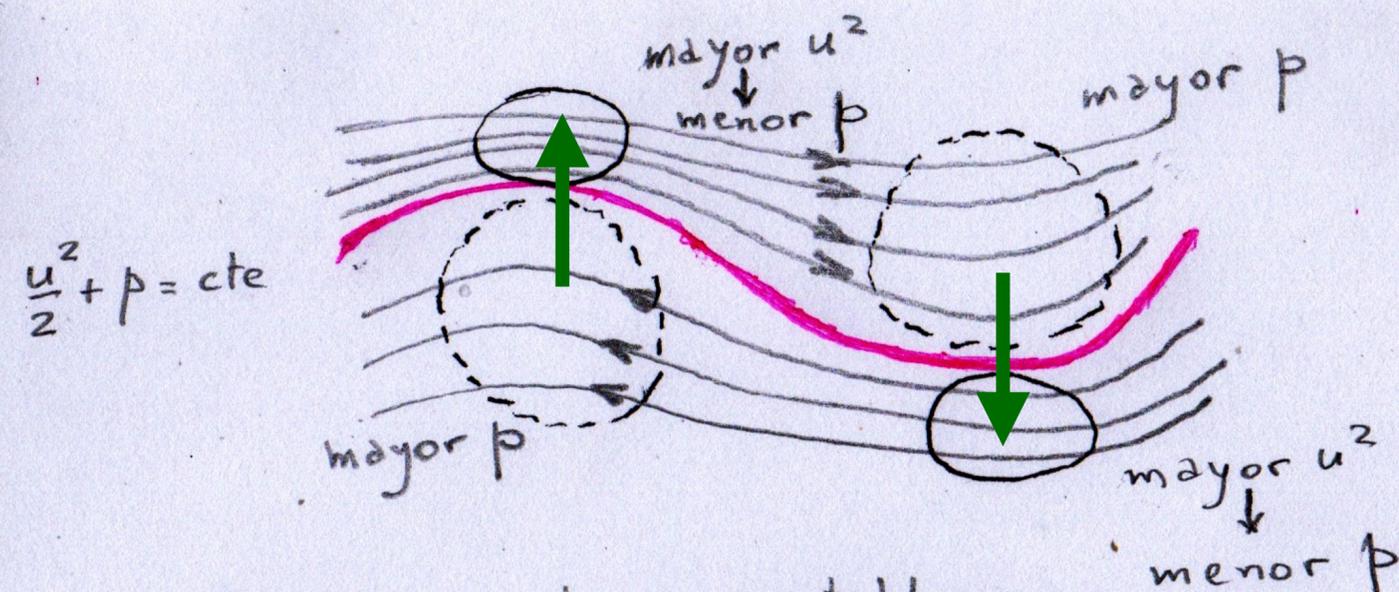
$$\omega = \omega_R + i\gamma \rightarrow \begin{cases} \omega_R = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} k U_0 \\ \gamma = \pm \frac{2\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1 + \rho_2} k U_0 \end{cases}$$

• La velocidad relativa $U_0 = \frac{U_1 - U_2}{2}$ entre las dos zonas, SIEMPRE da lugar a inestabilidad.

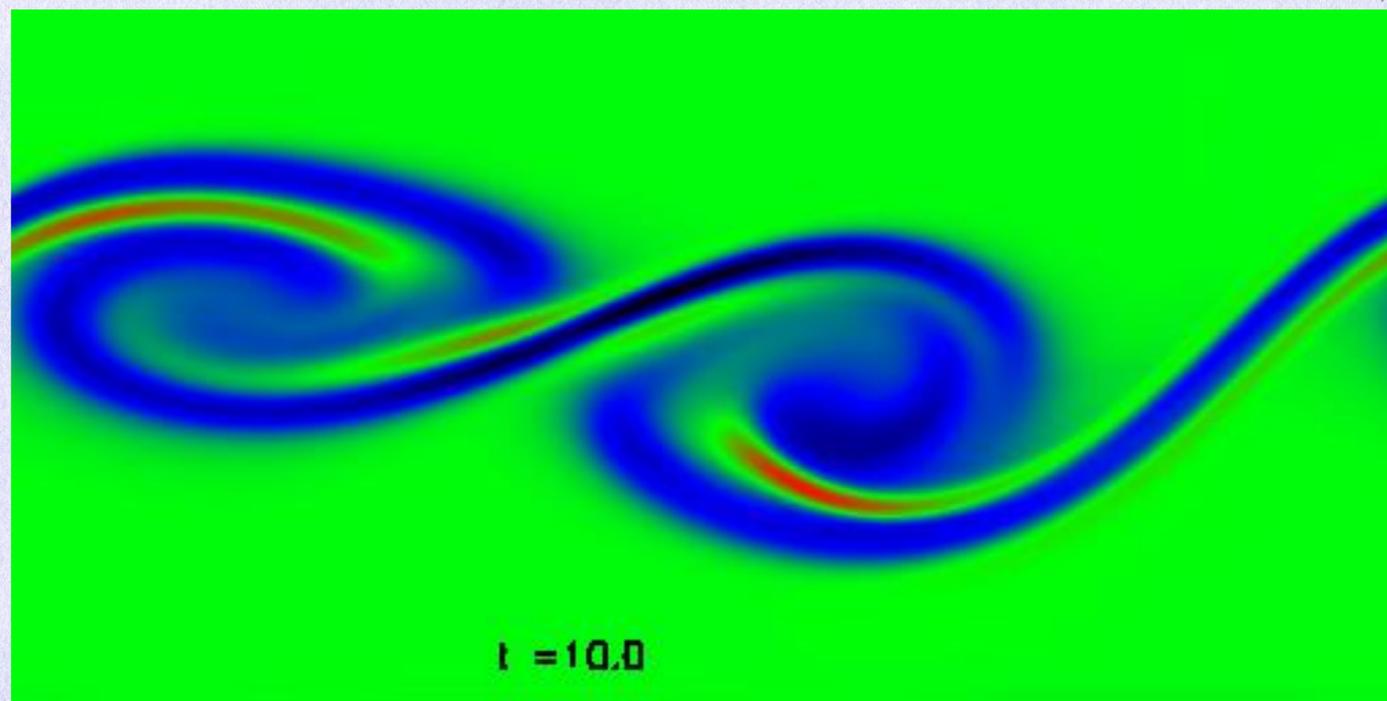
• Incluso si $\rho_1 = \rho_2 \rightarrow \gamma = \pm k U_0$

• Esta inestabilidad puede limitarse por viscosidad, tensión superficial 🤔 o también con una interfase gradual en lugar de discontinua.

• Conceptualmente, ¿qué es lo que origina esta inestabilidad?



• Sobre cada cresta se establece un grupo de baja presión, y bajo cada cresta uno de alta presión (bajo u^2). El desbalance de presión alimenta el crecimiento inestable.



Rayleigh-Taylor

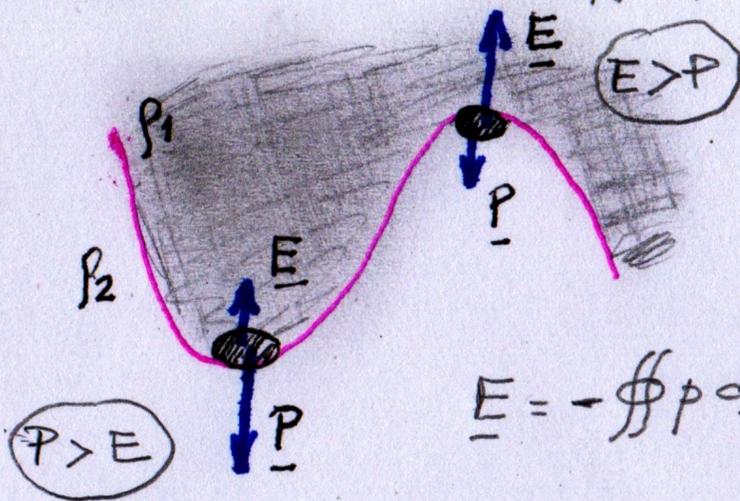
Si ahora suponemos $g \neq 0$ pero el caso estático ($u_0 = \frac{u_1 - u_2}{2} = 0$), la inestabilidad se llama de Rayleigh-Taylor:

$$\omega = \pm \sqrt{-\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} kg}$$

Si $\rho_1 < \rho_2$ \rightarrow equilibrio estable $\rightarrow \omega_R = \pm \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} kg}$

ondas de gravedad

Si $\rho_1 > \rho_2$ \rightarrow inestabilidad $\rightarrow \gamma = \pm \sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} kg}$



• Veamos el desbalance de fuerzas de cada gota

• El empuje es igual al peso del fluido desalojado (Arquímedes).
 $E = -\iint p ds$

- En la gota izquierda $E < P$ porque el fluido desalojado es mayormente ρ_2 (menos denso).
- En la gota derecha es al revés, pero en ambos casos el desbalance promueve la inestabilidad.

