Repaso de Clase 10

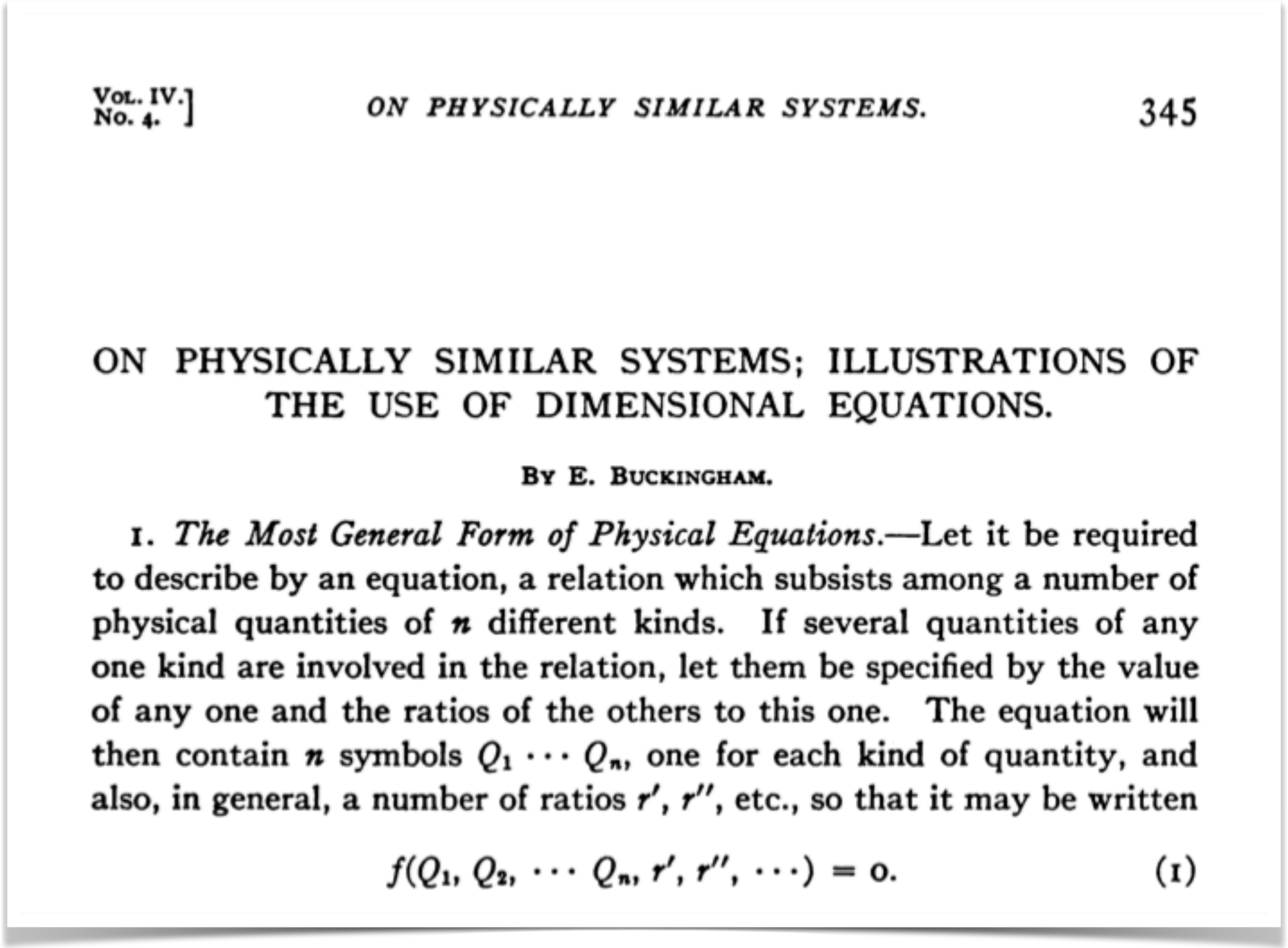
- Analisis dimensional.

- Teorema Pi de Buckingham.

- Inestabilidades hidrodinámicas.

- Inestabilidades de Rayleigh-Taylor y de Kelvin-Helmholtz.

- Suponemos flujo plano, irrotacional, incompresible e ideal.



Vol. IV.] No. 4. ON PHYSICALLY SIMILAR SYSTEMS. 345

ON PHYSICALLY SIMILAR SYSTEMS; ILLUSTRATIONS OF THE USE OF DIMENSIONAL EQUATIONS.

By E. Buckingham.

1. *The Most General Form of Physical Equations.*—Let it be required to describe by an equation, a relation which subsists among a number of physical quantities of n different kinds. If several quantities of any one kind are involved in the relation, let them be specified by the value of any one and the ratios of the others to this one. The equation will then contain n symbols $Q_1 \cdots Q_n$, one for each kind of quantity, and also, in general, a number of ratios r', r'', etc., so that it may be written

$$f(Q_1, Q_2, \cdots Q_n, r', r'', \cdots) = 0. \quad (1)$$

Buckingham, E. 1914, Phys. Rev. 4, 345-376.

Inestabilidades de Kelvin-Helmholtz y Rayleigh-Taylor

Como el flujo es irrotacional pero no estacionario, obtenemos la presión de cada lado por Bernoulli-3:

$$\partial_t \phi + \frac{p}{\rho} + g z + \frac{u^2}{2} = C(t)$$

Linealizamos:

$$\underline{u}_{1,2} = \pm u_0 \hat{x} + \underline{\nabla}\phi_{1,2} \longrightarrow u_{1,2}^2 = u_0^2 \pm 2 u_0 \partial_x \phi_{1,2}$$

$$\therefore \quad p_{1,2} = \rho_{1,2}\left[C_{1,2} - \partial_t \phi_{1,2} - g\zeta - \frac{u_0^2}{2} \mp u_0 \partial_x \phi_{1,2} \right]$$

Podemos absorber $C_{1,2}$ y $\frac{u_0^2}{2}$ con una adecuada redefinición de $\phi_{1,2}$. Finalmente $p_1(\zeta) = p_2(\zeta)$

$$-\rho_1\left(\partial_t \phi_1 + g\zeta + u_0 \partial_x \phi_1\right) = -\rho_2\left(\partial_t \phi_2 + g\zeta - u_0 \partial_x \phi_2\right)$$

Las ecs. recuadradas forman un sistema lineal a coeficientes ctes. para ζ, ϕ_1, ϕ_2.

$$\zeta(x,t) = A e^{ikx - i\omega t} \qquad \phi_{1,2}(x,z,t) = F_{1,2}(z)\, e^{ikx - i\omega t}$$

De las ecs. Laplace:

$$\nabla^2 \phi_{1,2} = 0 \longrightarrow \partial_{zz} F_{1,2} - k^2 F_{1,2} = 0 \longrightarrow F_{1,2} \sim e^{\pm kz}$$

$$\left.\begin{matrix} \underline{\nabla}\phi_1 < \infty \\ z \to +\infty \end{matrix}\right\} \longrightarrow F_1(z) = B_1 e^{-kz}$$

$$\left.\begin{matrix} \underline{\nabla}\phi_2 < \infty \\ z \to -\infty \end{matrix}\right\} \longrightarrow F_2(z) = B_2 e^{kz}$$

$$e^{\pm k\zeta} \simeq 1 \pm \cancel{k\zeta}$$

Reemplazando en las otras ecuaciones:

$$\rho_1\left(gA - i\omega B_1 + iku_0 B_1\right) = \rho_2\left(gA - i\omega B_2 - iku_0 B_2\right)$$

$$-kB_1 = -i(\omega - ku_0)A$$

$$kB_2 = -i(\omega + ku_0)A$$

Es decir que:

$$\begin{pmatrix} -i(\omega - ku_0)\rho_1 & i(\omega + ku_0)\rho_2 & (\rho_1 - \rho_2)g \\ -k & 0 & i(\omega - ku_0) \\ 0 & k & i(\omega + ku_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ A \end{pmatrix} = 0$$

Kelvin-Helmholtz

Las soluciones no triviales satisfacen:

$$\det(\,)=0 \rightarrow \boxed{\omega = \frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\,kU_0 \pm \sqrt{-\frac{4\rho_1\rho_2}{(\rho_1+\rho_2)^2}k^2U_0^2 - \frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}kg}}$$

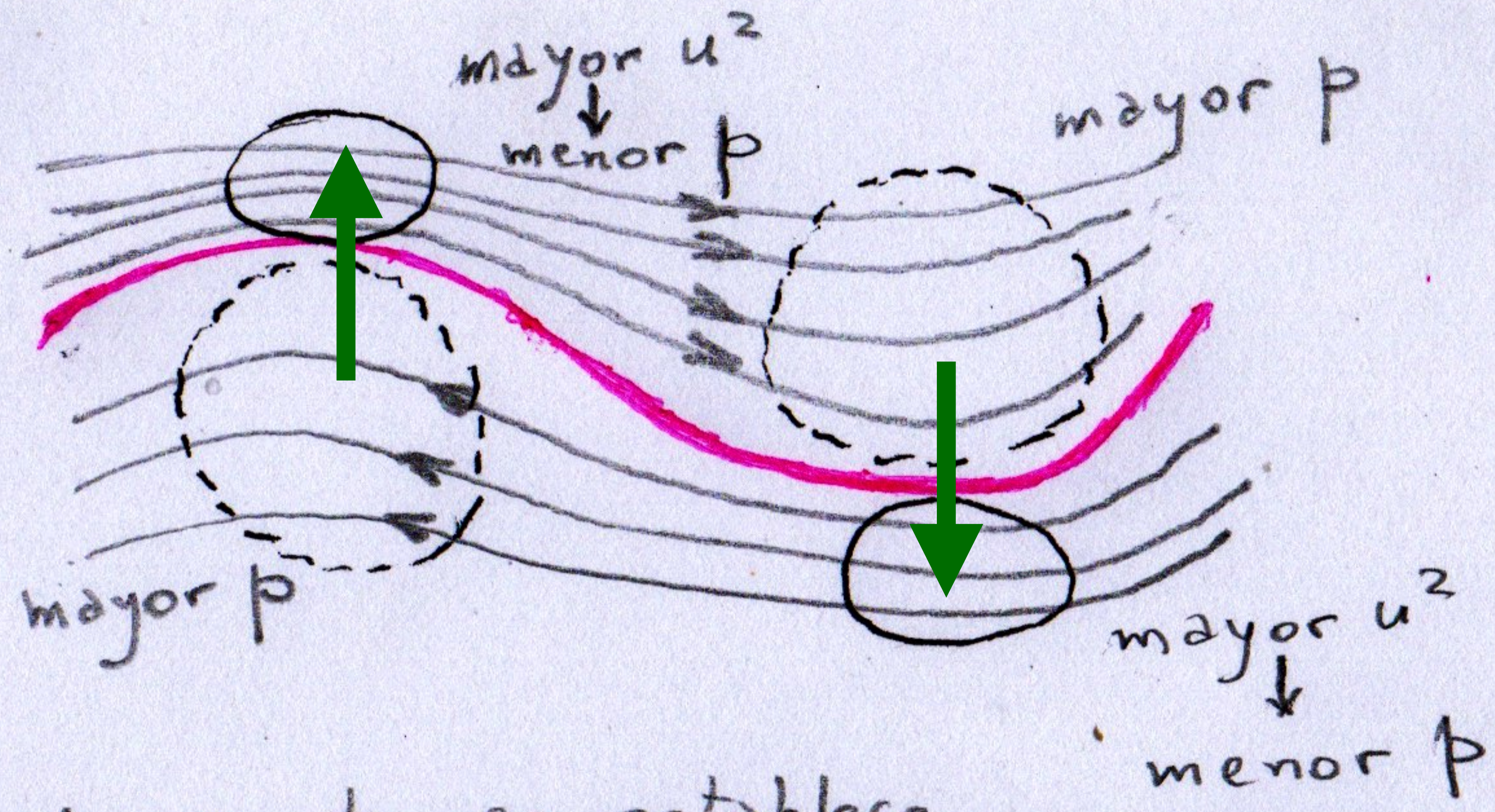
La inestabilidad K-H corresponde al límite $g=0$.

$$\omega = \omega_R + i\gamma \rightarrow \omega_R = \frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\,kU_0$$

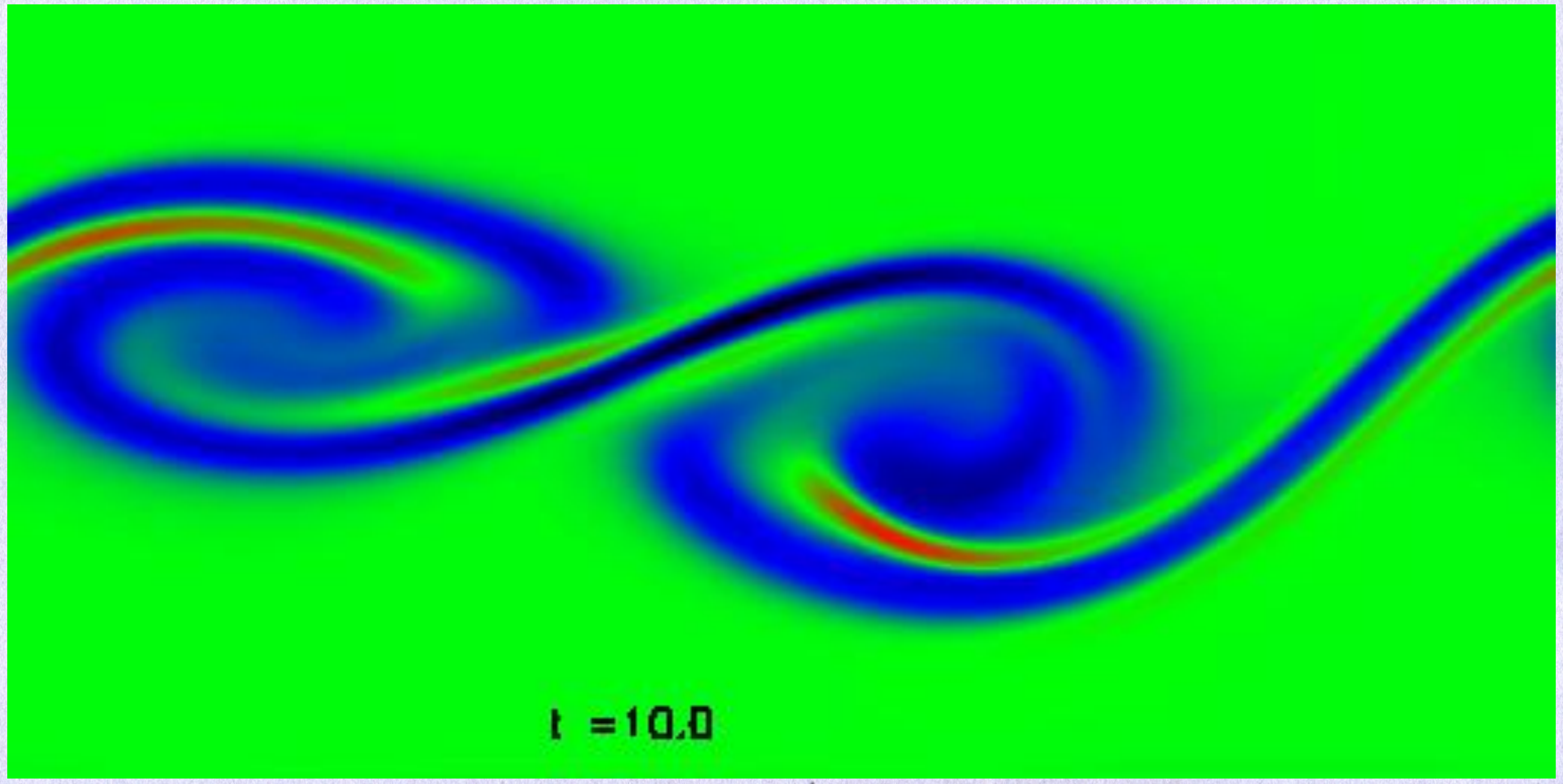
$$\omega = \omega_R + i\gamma \rightarrow \gamma = \pm\frac{2\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1+\rho_2}\,kU_0$$

- La velocidad relativa $U_0 = \frac{U_1-U_2}{2}$ entre las dos zonas, SIEMPRE da lugar a inestabilidad.
- Incluso si $\rho_1=\rho_2 \longrightarrow \gamma = \pm kU_0$
- Esta inestabilidad puede limitarse por viscosidad, tensión superficial  o también con una interfase gradual en lugar de discontinua.
- Conceptualmente, que es lo que origina esta inestabilidad?

$$\frac{u^2}{2}+p=\text{cte}$$



. Sobre cada cresta se establece un grumo de baja presión, y bajo cada cresta uno de alta presión (bajo u^2). El desbalance de presión alimenta el crecimiento inestable.



Rayleigh-Taylor

Si ahora suponemos $g \neq 0$ pero el caso estático ($U_0 = \frac{U_1 - U_2}{2} = 0$), la inestabilidad se llama de Rayleigh-Taylor:

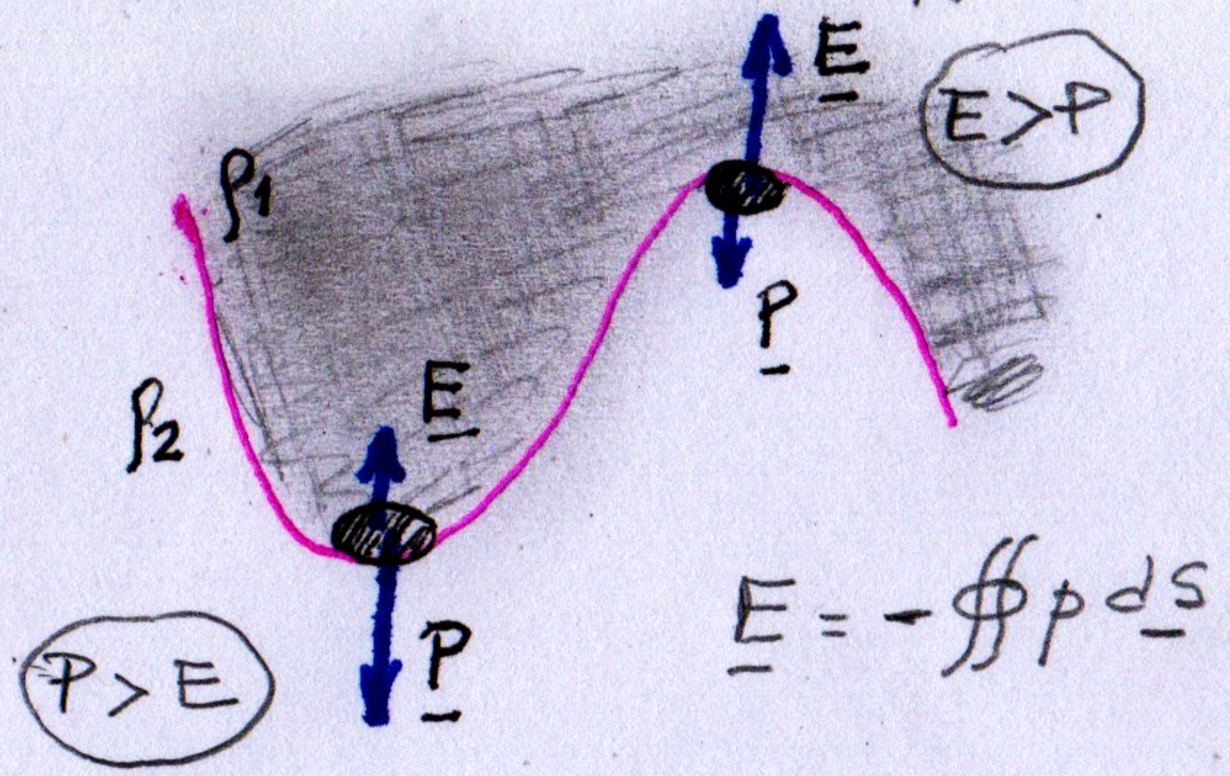
$$\omega = \pm\sqrt{-\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} k g}$$

Si $\rho_1 < \rho_2$ $\longrightarrow$ equilibrio estable $\rightarrow$ $\boxed{\omega_R = \pm\sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} k g}}$

ondas de gravedad

Si $\rho_1 > \rho_2$ $\rightarrow$ inestabilidad R-T $\rightarrow$ $\boxed{\gamma = \pm\sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} k g}}$

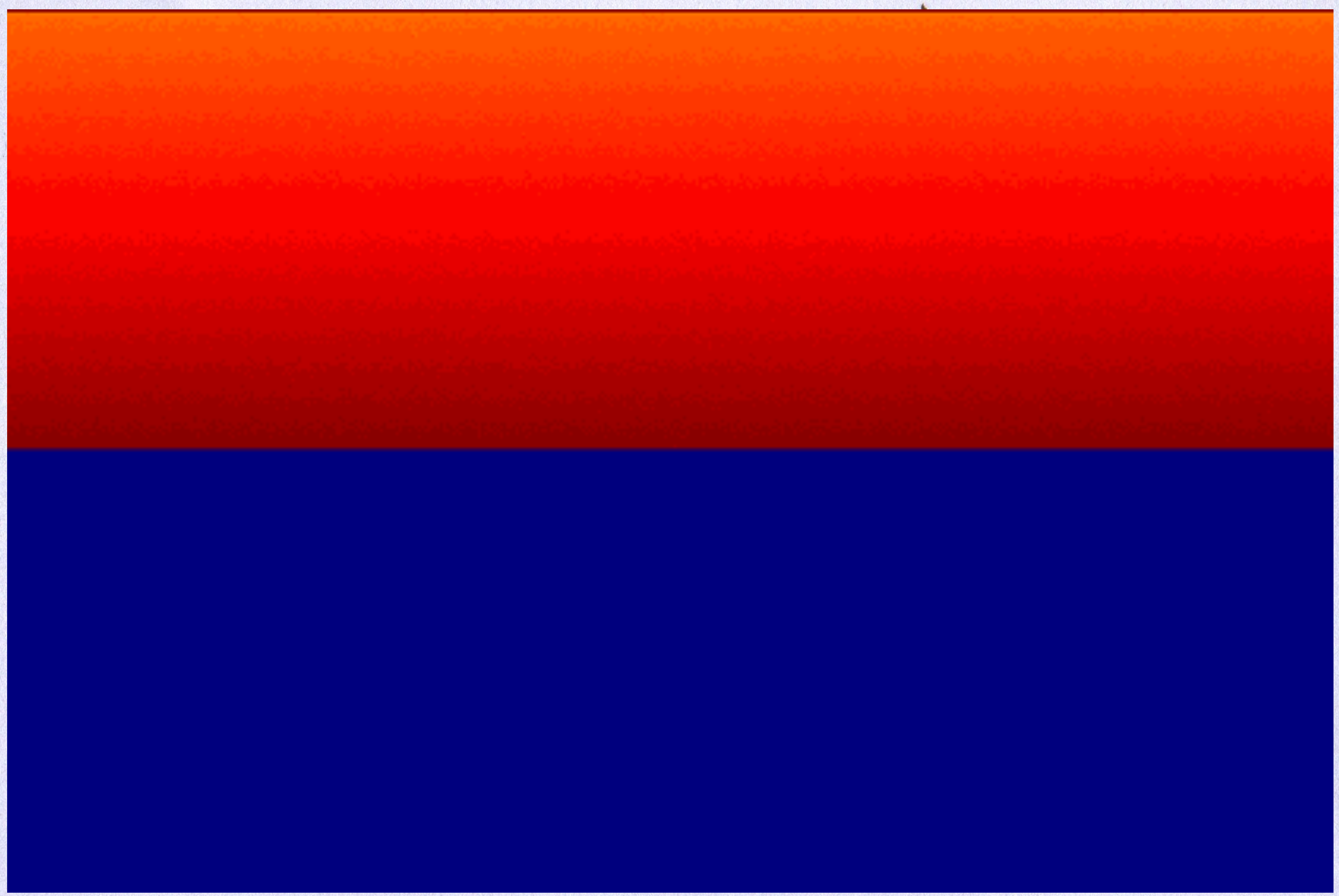
R-T



$\underline{E} = -\oiint p \, d\underline{s}$

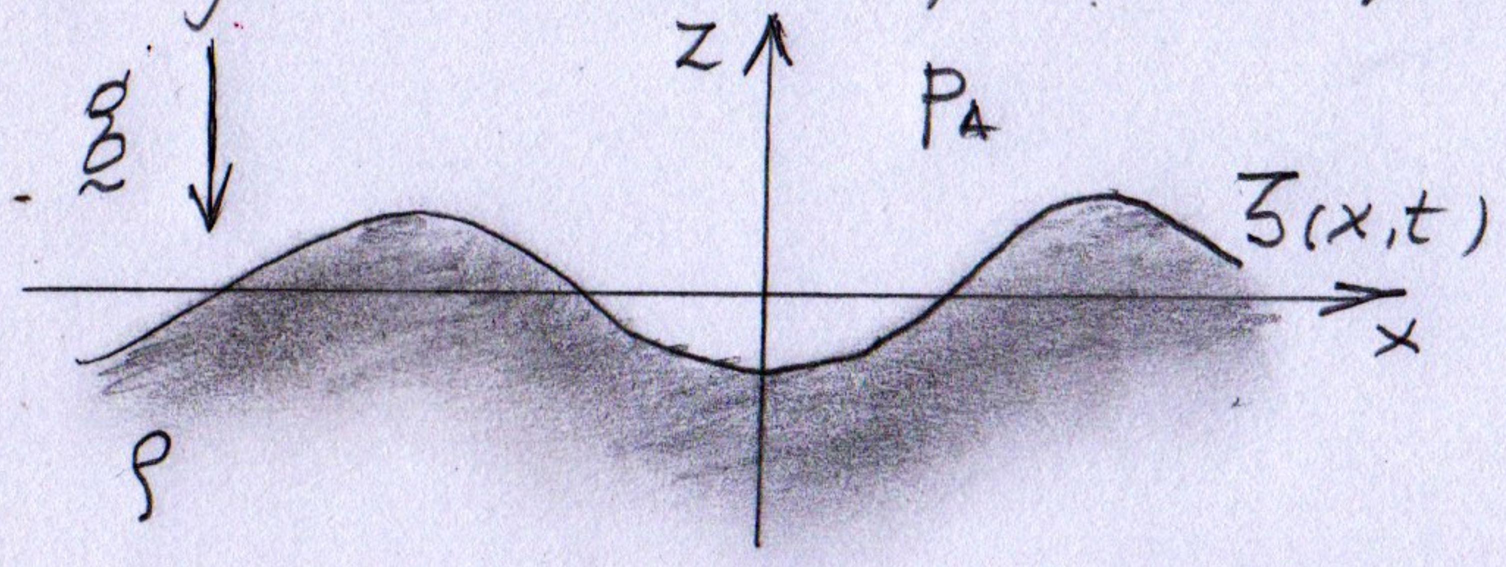
- Veamos el desbalance de fuerzas de cada gota
- El empuje es igual al peso del fluido desalojado (Arquímedes).

- En la gota izquierda $E < P$ porque el fluido desalojado es mayormente ρ_2 (menos denso).
- En la gota derecha es al revés, pero en ambos casos el desbalance promueve la inestabilidad



Ondas de gravedad

Veamos el caso mas simple de un fluido incompresible debajo de una atmósfera con $p_A = cte$.



<u>Equilibrio</u>

- $\zeta(x,t) = 0$
- $\phi(x, z<0, t) = 0$
- $p(z>0) = p_A$
- $p(z<0) = p_A - \rho g z$

De la atmosfera solo consideramos que $p_A = cte$.

Perturbamos a primer orden:

- $\underline{u} = \nabla\phi \longrightarrow \nabla^2\phi = 0$
- Bernoulli-3 $\longrightarrow \partial_t\phi + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z = C(t)$
- En $z=\zeta \longrightarrow u_z = \partial_z\phi\big|_{z=\zeta} = \frac{d\zeta}{dt}$

Entonces:

- $\nabla^2\phi = 0 \longrightarrow \phi = \left(B e^{kz} + B' e^{-kz}\right) e^{ikx - i\omega t}$
- $u_z(z=\zeta) \longrightarrow \partial_z\phi\big|_{z=\zeta} = \partial_t\zeta + \underbrace{\cancel{\underline{\nabla}\phi\cdot(\hat{x}\,\partial_x\zeta)}}_{=0 \text{ (cuadrático)}}$

- $p(z=\zeta) = p_A \longrightarrow \rho\left[C(t) - g\zeta - \partial_t\phi\big|_{z=\zeta}\right] = p_A$

Podemos absorber "$C(t)$" y "p_A" en una redefinición de ϕ.

Entonces:

$$\left.\begin{aligned} \partial_t\phi\big|_{z=\zeta} &= -g\zeta \\ \partial_z\phi\big|_{z=\zeta} &= \partial_t\zeta \end{aligned}\right\} \quad \left(\partial_z\phi + \frac{1}{g}\partial_{tt}\phi\right)\Big|_{z=\zeta} = 0$$

Para obtener B y B', necesitamos plantear condiciones de contorno. Veamos dos casos.

<u>Caso 1: Profundidad infinita</u> (oceano)

$$\underline{\nabla}\phi(z\to\infty) < \infty \longrightarrow B' = 0$$

(Que la velocidad no diverja en el fondo)

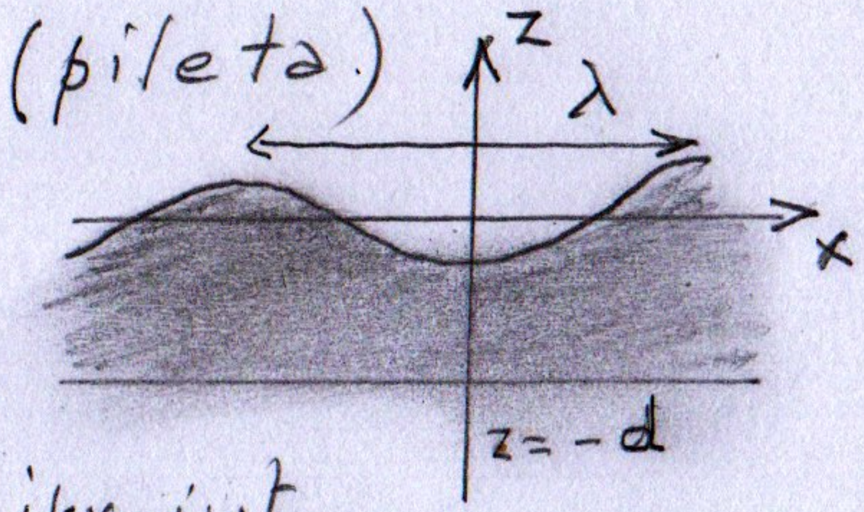
$$\phi = B e^{kz} e^{ikx - i\omega t} \longrightarrow \partial_z\phi + \frac{1}{g}\partial_{tt}\phi = \left(k - \frac{\omega^2}{g}\right)\phi$$

Entonces $\left(\partial_z\phi + \frac{1}{g}\partial_{tt}\phi\right)\Big|_{z=\zeta} = 0 \longrightarrow \omega^2 = kg$

Ondas dispersivas

Ondas de gravedad - Profundidad finita

Caso 2: Profundidad finita (pileta)



Sup: $z = -d$

-Cond. contorno $u_z(z=-d) = 0$

$$\therefore \partial_z \phi\Big|_{z=-d} = \left(k B e^{-kd} - k B' e^{kd}\right) e^{ikx - i\omega t} = 0$$

$$\therefore B' = B e^{-2kd} \longrightarrow \phi = B\left(e^{kz} + e^{-2kd} e^{-kz}\right) e^{ikx - i\omega t}$$

Entonces: $\phi_{(x,z,t)} = \mathcal{B} \cosh(k(z+d))\, e^{ikx - i\omega t}$

$$\left(\partial_z \phi + \frac{1}{g} \partial_{tt} \phi\right)\Big|_{z=\zeta} = 0 = \mathcal{B}\left[k\, sh(k(z+d)) - \frac{\omega^2}{g} ch(k(z+d))\right]_{z=\zeta} e^{ikx - i\omega t}$$

Es decir que $\omega^2 = kg\, tgh(k(\zeta + d))$

Noten que la relación de dispersión depende de la incógnita $\zeta(x,t)$. Para ser consistentes con la linealización, debemos suponer $|\zeta| \ll d$ y por lo tanto

$$\omega^2 = kg\, tgh(kd)$$

Estas ondas tambien son dispersivas.

Que pasa si $kd \ll 1$ (es decir $d \ll \lambda$), que es el límite de baja profundidad o longitud de onda larga?

$$tgh(kd) \approx kd \longrightarrow \omega^2 \simeq g d k^2$$

Ondas no dispersivas

Comentario final

$$\omega^2 = g d k^2 \longrightarrow \omega = \pm \sqrt{gd}\, k$$

La solución general es entonces:

$$\phi_{(x,z,t)} = \frac{1}{2}\left[\sum_k \left(\mathcal{B}_k^+ e^{-i\sqrt{gd}\,kt} + \mathcal{B}_k^- e^{i\sqrt{gd}\,kt}\right) ch(k(z+d))\, e^{ikx} + c.c.\right]$$

- Las constantes complejas $\mathcal{B}_k^\pm$ se obtienen a partir de las condiciones iniciales.
- Para obtener la forma de la interfase $\zeta = -\frac{1}{g} \partial_t \phi\Big|_{z=0}$
- Si la pileta se extiende en $0 \leq x \leq L$

$$k = \frac{2\pi}{L} n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Flujos compresibles

En flujos compresibles, sabemos que debemos usar la ecuación de continuidad

$$\partial_t \rho + \underline{\nabla}\cdot(\rho \underline{u}) = 0$$

Las ondas acústicas son un ejemplo palpable (o mejor dicho audible) de la compresibilidad de un fluido como el aire.

Haremos un planteo 1D e ideal partiendo de un equilibrio:

$$\left.\begin{array}{l}\rho = \rho_0 \\ p = p_0 \\ \underline{u} = 0\end{array}\right\} \text{Equilibrio} \longrightarrow \text{Perturbación} \left\{\begin{array}{l}\rho = \rho_0 + \delta\rho \\ p = p_0 + \delta p \\ \underline{u} = \delta\underline{u}\end{array}\right.$$

Linealizamos las ecuaciones en $\delta\rho$, δp, $\delta\underline{u} = \hat{x}\,\delta u$

$$\partial_t \rho + \underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{u}) = 0 \longrightarrow \partial_t \delta\rho + \rho_0 \partial_x \delta u = 0$$

$$\rho\left[\partial_t \underline{u} + (\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u}\right] = -\underline{\nabla} p \longrightarrow \rho_0 \partial_t \delta u = -\partial_x \delta p$$

Las incógnitas son $\delta\rho(x,t)$, $\delta p(x,t)$ y $\delta u(x,t)$.

Falta una ecuación!

Planteamos una relación politrópica entre p y ρ, es decir $\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cte}$. Entonces:

$$\frac{p_0 + \delta p}{(\rho_0 + \delta\rho)^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \longrightarrow \delta p = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\delta\rho$$

Definimos: $c^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$ c: velocidad del sonido

Para el sistema de ecuaciones recuadradas proponemos:

$$\delta\rho, \delta p, \delta u \sim e^{ikx - i\omega t} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -i\omega\delta\rho + ik\rho_0 \delta u = 0 \\ -i\omega\rho_0 \delta u + ik\delta p = 0 \\ \delta p = c^2 \delta\rho \end{array}\right.$$

La relación de dispersion resultante es $\boxed{\omega^2 = c^2 k^2}$

- Las ondas acústicas son no dispersivas, lo cual es indispensable para podernos comunicar.
- Es un modo longitudinal, ya que $\delta\underline{u} \parallel \underline{k}$.