Repaso de Clase 11

- Ondas de gravedad

- Fluido de presión p_A sobre fluido incompresible, irrotacional e ideal

- Caso de profundidad infinita >>> $\omega^2 = gk$

- Caso de profundidad finita >>> $\omega^2 = gk \tanh(kd)$ >>> Baja profundidad: $\omega^2 \simeq gd\, k^2$

- Combinación lineal de todas las ramas ($\omega = \pm \ldots$) y modos ($\sum_k (\ldots)$), y parte real de ($\frac{1}{2}(\ldots + c\,.\,c.)$)

Flujos compresibles

En flujos compresibles, sabemos que debemos usar la ecuación de continuidad

$$\partial_t \rho + \underline{\nabla}\cdot(\rho \underline{u}) = 0$$

Las ondas acústicas son un ejemplo palpable (o mejor dicho audible) de la compresibilidad de un fluido como el aire.

Haremos un planteo 1D e ideal partiendo de un equilibrio:

$$\left.\begin{array}{l}\rho = \rho_0 \\ p = p_0 \\ \underline{u} = 0\end{array}\right\} \text{Equilibrio} \longrightarrow \text{Perturbación} \left\{\begin{array}{l}\rho = \rho_0 + \delta\rho \\ p = p_0 + \delta p \\ \underline{u} = \delta\underline{u}\end{array}\right.$$

Linealizamos las ecuaciones en $\delta\rho$, δp, $\delta\underline{u} = \hat{x}\,\delta u$

$$\partial_t \rho + \underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{u}) = 0 \longrightarrow \partial_t \delta\rho + \rho_0 \partial_x \delta u = 0$$

$$\rho\left[\partial_t \underline{u} + (\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u}\right] = -\underline{\nabla} p \longrightarrow \rho_0 \partial_t \delta u = -\partial_x \delta p$$

Las incógnitas son $\delta\rho(x,t)$, $\delta p(x,t)$ y $\delta u(x,t)$.

Falta una ecuación!

Planteamos una relación politrópica entre p y ρ, es decir $\frac{p}{\rho^\gamma} = cte$. Entonces:

$$\frac{p_0 + \delta p}{(\rho_0 + \delta\rho)^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \longrightarrow \delta p = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\delta\rho$$

Definimos: $c^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$ $\qquad$ c: velocidad del sonido

Para el sistema de ecuaciones recuadradas proponemos:

$$\delta\rho, \delta p, \delta u \sim e^{ikx - i\omega t} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -i\omega\delta\rho + ik\rho_0\delta u = 0 \\ -i\omega\rho_0\delta u + ik\delta p = 0 \\ \delta p = c^2\delta\rho\end{array}\right.$$

La relación de dispersion resultante es $\boxed{\omega^2 = c^2 k^2}$

- Las ondas acústicas son no dispersivas, lo cual es indispensable para podernos comunicar.
- Es un modo longitudinal, ya que $\delta\underline{u} \parallel \underline{k}$.

Generación de ondas de choque

El término convectivo (no lineal) conduce a la formación de superficies de discontinuidad en el seno del fluido, conocidas como ondas de choque.

Veamos un caso muy simple, 1D y sin fuerzas de corto ni largo alcance:

$$\partial_t u + u\,\partial_x u = 0$$

Comprobemos que la solución (implícita) de esta ecuación es

$$u = F(x - ut). \quad \text{donde} \begin{cases} u = u(x,t) \\ F \text{ arbitraria} \end{cases}$$

Para verificarlo, definimos

$$\xi(x,t) = x - u(x,t)\,t$$

Entonces:
- $\partial_t u = \frac{dF}{d\xi}\,\partial_t \xi = F'.(-\partial_t u.\,t - u)$
- $\partial_x u = \frac{dF}{d\xi}\,\partial_x \xi = F'.(1 - \partial_x u.\,t)$

$$\partial_t u = (-\partial_t u.\,t - u)\,F' \longrightarrow \partial_t u = -\frac{u\,F'}{1+t\,F'}$$

$$\partial_x u = (1 - \partial_x u.\,t).\,F' \longrightarrow \partial_x u = \frac{F'}{1+t\,F'}$$

que desde luego satisface $\partial_t u + u\,\partial_x u = 0$

Quien es F ?

Si planteamos que la condición inicial es $u_0(x)$:

$$t=0 \longrightarrow u(x,0) = F(x) = u_0(x) \longrightarrow F \equiv u_0$$

$$\therefore\ u(x,t) = u_0(x - u(x,t).\,t)$$

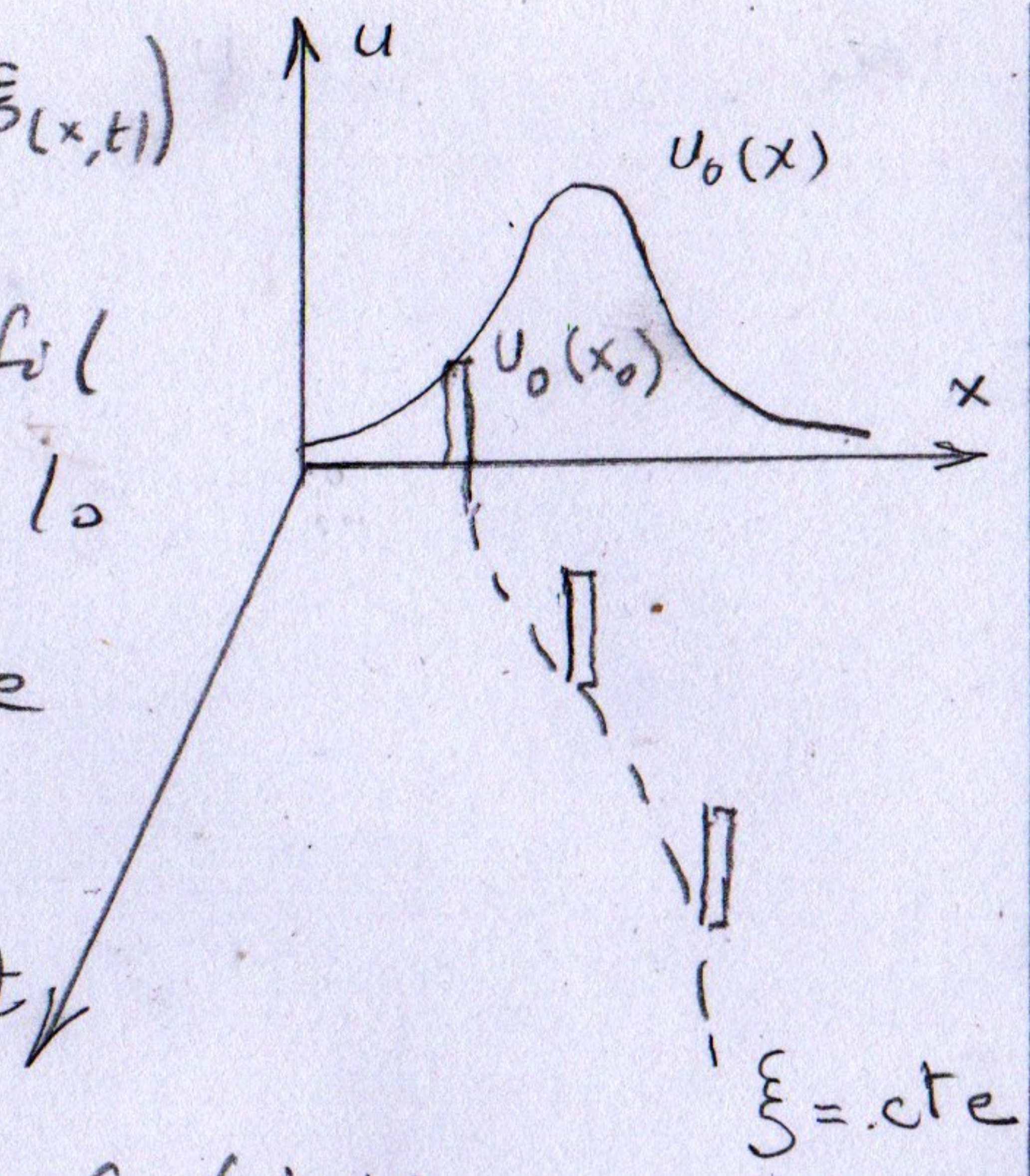
- Esta solución implícita dice que toda la información sobre la evolución está en el perfil inicial $u_0(x)$, ya que la velocidad en $u(x,t)$ es la velocidad que inicialmente tenía el punto $x - u(x,t)\,t$.
- Lo anterior es conceptualmente cierto, pero muy poco práctico.

Curvas características

• La solución formal $U(x,t) = U_0(\xi_{(x,t)})$

con $\xi(x,t) = x - u(x,t)\,t$

permite imaginar que el perfil inicial $u_0(x)$ se propaga a lo largo de curvas $\xi(x,t) =$ cte en el plano (x,t).



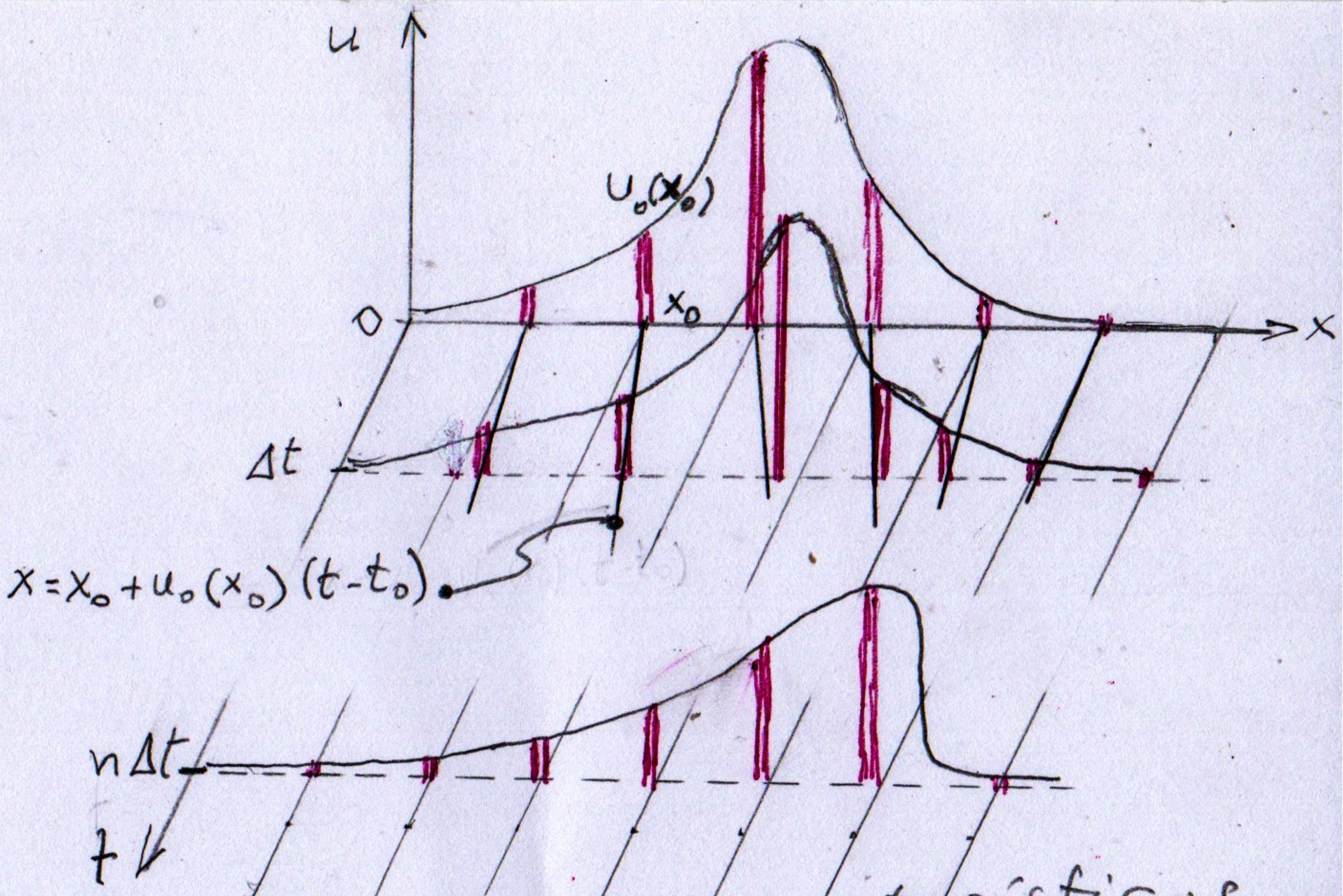
• A las curvas $\xi(x,t) =$ cte las llamamos curvas características.

• No conocemos esas curvas, pero podemos intentar un método perturbativo para ir de $t=0$ a $t=\Delta t$:

$$\xi(x,t) = x - u(x,t)\,t = \text{cte}$$

$$t=0 \rightarrow t=\Delta t \Rightarrow \Delta\xi = 0 = \Delta x - u_0(x_0)\,\Delta t$$

$$x = x_0 + u_0(x_0)\,(t - t_0)$$



• Es decir que entre 0 y Δt las características son (aprox.) rectas de pendiente $u_0(x_0)$ en (x,t)

• De Δt a $2\Delta t$ repetimos el procedimiento y vemos que la region $u_0' > 0$ se dispersa, mientras que la $u_0' < 0$ se concentra.

• Eventualmente, la cresta del perfil da origen a una estructura con $\partial_x u \sim -\infty$ (choque)

Método de las características

Veamos los efectos no lineales en la evolución de flujos ideales en 1D, a lo largo de x:

Ec. cont: $\partial_t \rho + u\,\partial_x \rho + \rho\,\partial_x u = 0$

Ec. mov: $\partial_t u + u\,\partial_x u + \frac{1}{\rho}\partial_x p = 0$

Polítropa: $p = cte.\,\rho^\gamma$

Def. la variable:

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{\gamma p}{\rho} \qquad c = c(x,t)$$

Reemplazamos $p = cte.\,\rho^\gamma$ en la ec. movimiento:

$$\frac{1}{\rho}\partial_x p = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\partial_x \rho = c^2\frac{\partial_x \rho}{\rho}$$

y ahora ponemos $\rho(x,t)$ en términos de $c(x,t)$:

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = cte.\,\gamma\,\rho^{\gamma-1} \longrightarrow \rho = \left(\frac{c^2}{cte.\,\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \longrightarrow \frac{\partial_x \rho}{\rho} = \frac{2}{\gamma-1}\frac{\partial_x c}{c}$$

Entonces:

Ec. cont.: $\frac{2}{\gamma-1}\left(\partial_t c + u\,\partial_x c\right) + c\,\partial_x u = 0$

Ec. mov.: $\partial_t u + u\,\partial_x u + \frac{2}{\gamma-1}c\,\partial_x c = 0$

Son dos ecs. acopladas para los campos de velocidades $u(x,t)$ y $c(x,t)$. Podemos reescribirlas como:

$$\partial_t\left(\frac{u}{2}\right) + u\,\partial_x\left(\frac{u}{2}\right) + c\,\partial_x\left(\frac{c}{\gamma-1}\right) = 0$$

$$\partial_t\left(\frac{c}{\gamma-1}\right) + u\,\partial_x\left(\frac{c}{\gamma-1}\right) + c\,\partial_x\left(\frac{u}{2}\right) = 0$$

Sumando y restando estas ecuaciones:

$$\boxed{\left[\partial_t + (u \pm c)\,\partial_x\right]\left(\frac{u}{2} \pm \frac{c}{\gamma-1}\right) = 0}$$

Estas dos ecuaciones no lineales son de la forma $\left[\partial_t + u\,\partial_x\right]u = 0$. Veamos como resolverlas.

Curvas características e invariantes de Riemann

Dada una función $F(x,t)$ y una curva $(x(t),t)$ en el plano (x,t), la variación de F sobre la curva está dada por

$$F(t) = F(x(t),t) \longrightarrow \frac{dF}{dt} = \partial_t F + \frac{dx}{dt}\partial_x F$$

En particular, si $F = cte$ sobre $x(t)$ entonces:

$$\frac{dF}{dt} = \partial_t F + \frac{dx}{dt}\partial_x F = 0$$

Noten que las ecuaciones

$$\left[\partial_t + \underbrace{(u \pm c)}_{\frac{dx}{dt}}\partial_x\right]\underbrace{\left(\frac{u}{2} \pm \frac{c}{\gamma-1}\right)}_{F} = 0$$

tienen esta forma.

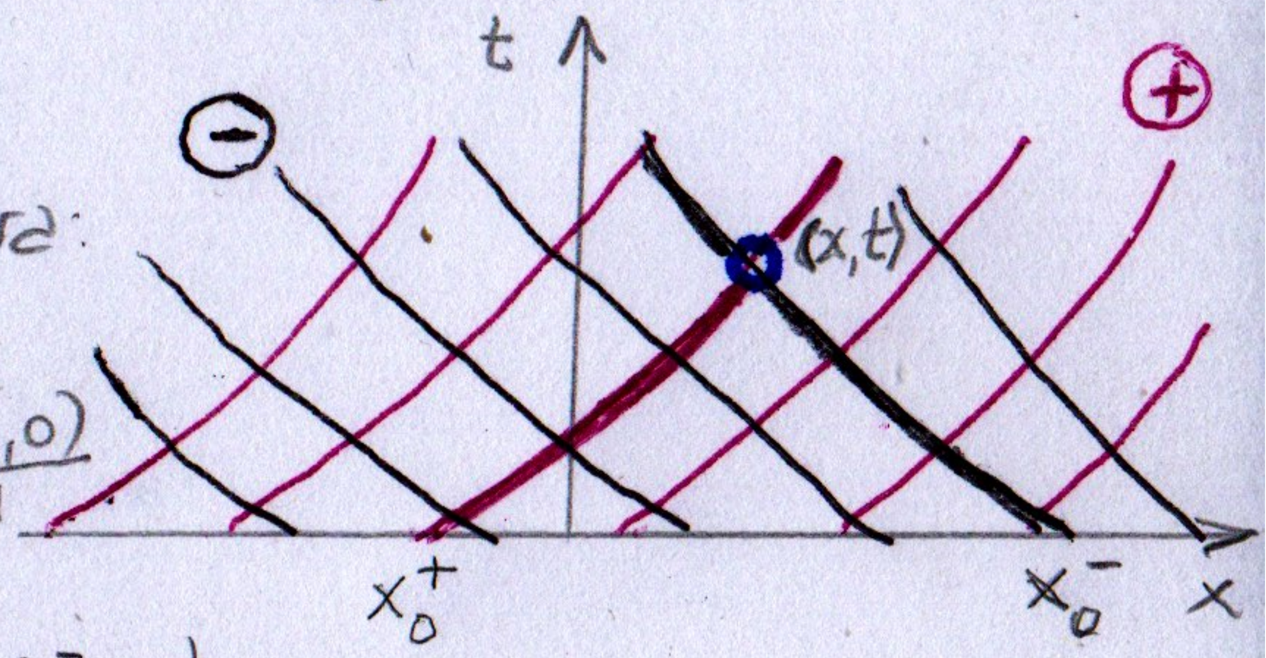
- Las curvas $\frac{dx^\pm}{dt} = u \pm c$ se llaman características.
- Las funciones $F^\pm = \frac{u}{2} \pm \frac{c}{\gamma-1}$ que permanecen constantes sobre ellas, se llaman invariantes de Riemann

Es decir que:

$$F^+ = \frac{u}{2} + \frac{c}{\gamma-1} = cte^+ \quad \text{sobre } x^+(t) \text{ tq } \frac{dx^+}{dt} = u + c \quad (\text{curvas } \oplus)$$

$$F^- = \frac{u}{2} - \frac{c}{\gamma-1} = cte^- \quad \text{sobre } x^-(t) \text{ tq } \frac{dx^-}{dt} = u - c \quad (\text{curvas } \ominus)$$

Entonces, para cualquier punto (x,t) como el de la figura:



$$F^+ = \frac{u(x,t)}{2} + \frac{c(x,t)}{\gamma-1} = \frac{u(x_0^+,0)}{2} + \frac{c(x_0^+,0)}{\gamma-1}$$

$$F^- = \frac{u(x,t)}{2} - \frac{c(x,t)}{\gamma-1} = \frac{u(x_0^-,0)}{2} - \frac{c(x_0^-,0)}{\gamma-1}$$

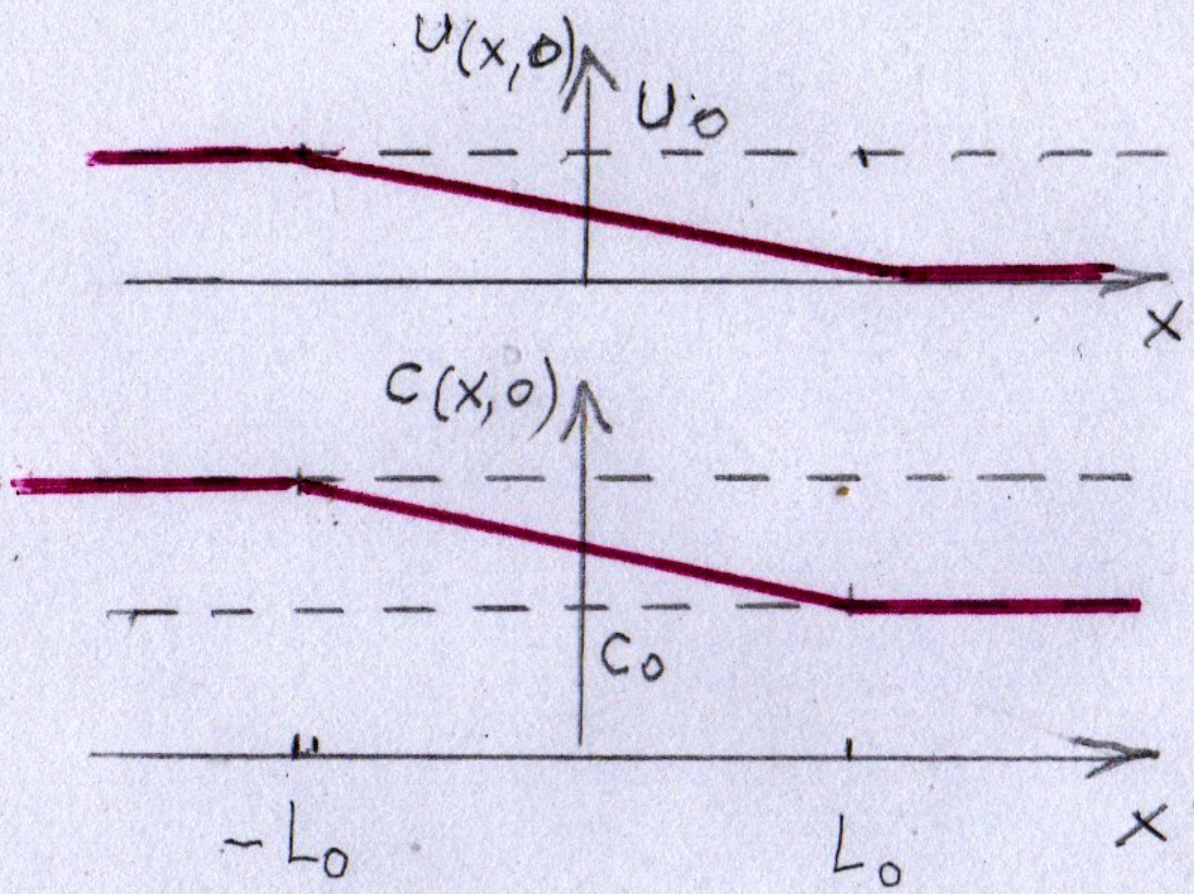
donde $u_0^\pm = u_0(x_0^\pm,0)$ y $c_0^\pm = c(x_0^\pm,0)$ son condiciones iniciales. De las ecs. anteriores, obtenemos $u(x,t)$ y $c(x,t)$ en función de las cond. iniciales:

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{u_0^+ + u_0^-}{2} + \frac{c_0^+ - c_0^-}{\gamma-1} \\ \frac{2c(x,t)}{\gamma-1} &= \frac{u_0^+ - u_0^-}{2} + \frac{c_0^+ + c_0^-}{\gamma-1} \end{aligned}}$$

Hemos resuelto parte del problema. Debemos todavía obtener las curvas $x^\pm(t)$ tq $\frac{dx^\pm}{dt} = u \pm c$

Formación y propagación de ondas de choque

Veamos un ejemplo que muestra la formación de una onda de choque.



Sean las cond. iniciales:

$$u(x,0) = \frac{u_0}{2}\left(1 - tgh\left(\frac{x}{L_0}\right)\right)$$

$$c(x,0) = c_0 + \frac{\gamma-1}{2}\, u(x,0)$$

Calculemos $F^-(x,0)$:

$$F^-_{(x,0)} = \cancel{\frac{u(x,0)}{2}} - \frac{1}{\gamma-1}\left(c_0 + \frac{\gamma-1}{2}\cancel{u(x,0)}\right) = -\frac{c_0}{\gamma-1} = cte$$

Noten que F^- no solo es cte en cada curva $\ominus$ sino que es indep. de x en $t=0$

Entonces: $F^-(x,t) = -\frac{c_0}{\gamma-1} = cte \;,\; \forall (x,t)$

Como evoluciona $c(x,t)$?

$$F^+ - F^- = \frac{2}{\gamma-1}\, c \longrightarrow c(x,t) = \frac{\gamma-1}{2}\big(\underbrace{F^+}_{cte\,\oplus} - \underbrace{F^-}_{cte}\big) = cte\,\oplus$$

Y $u(x,t)$?

$$\underbrace{F^+_{(x,t)}}_{cte\,\oplus} = \frac{u(x,t)}{2} + \frac{\overbrace{c(x,t)}^{}}{\gamma-1} \longrightarrow u(x,t) = cte\,\oplus$$

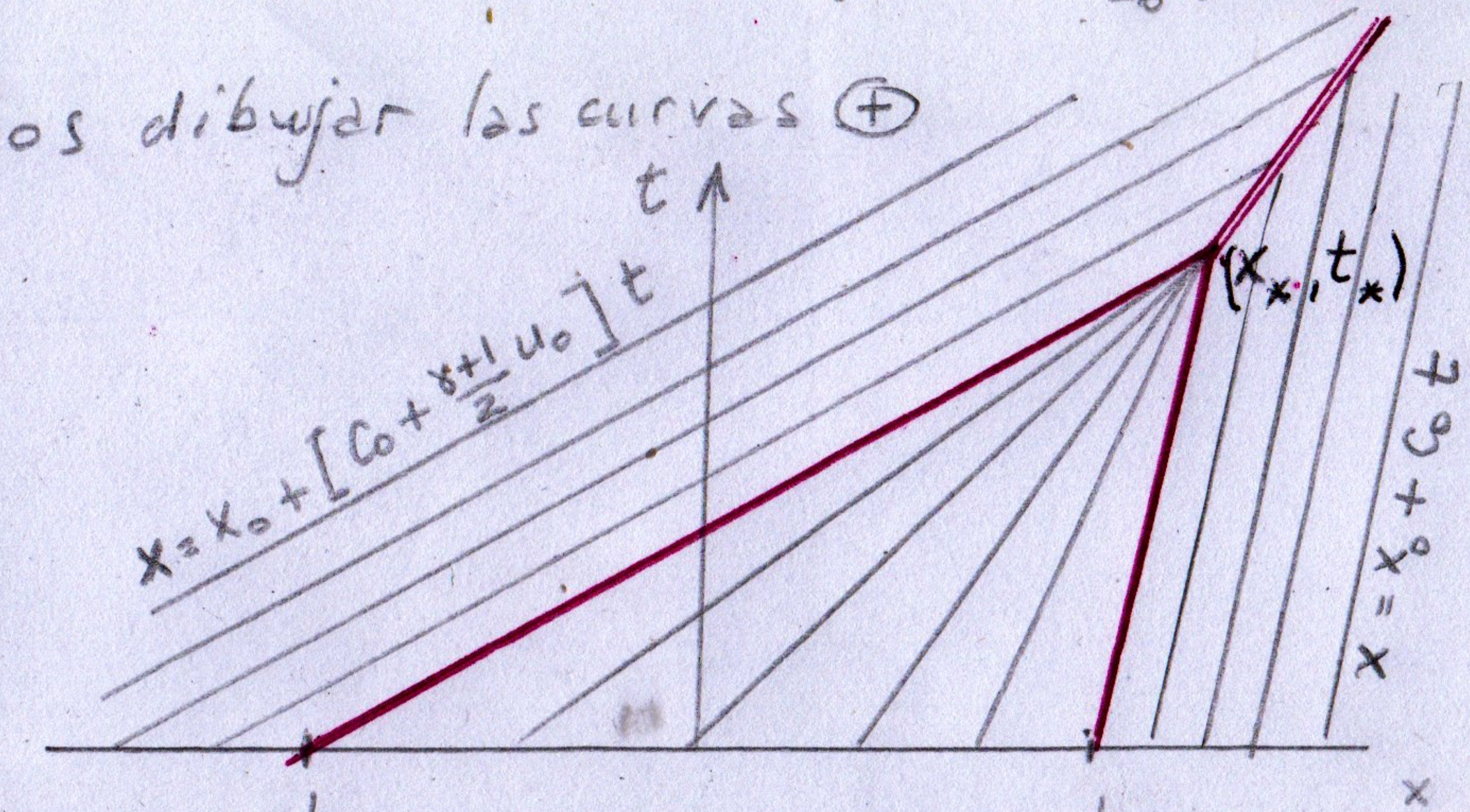
con $c(x,t) = cte\,\oplus$

Que forma tienen las curvas $\oplus$? rectas!

$$\frac{dx^+}{dt} = \underbrace{u}_{cte\,\oplus} + \underbrace{c}_{cte\,\oplus} \longrightarrow x^+ = x_0^+ + \left[u(x_0,0) + c(x_0,0)\right] t$$

Si aproximamos
$$tgh\left(\frac{x}{L_0}\right) \simeq \begin{cases} 1 & x > L_0 \\ x/L_0 & -L_0 < x < L_0 \\ -1 & -L_0 > x \end{cases}$$

Podemos dibujar las curvas $\oplus$

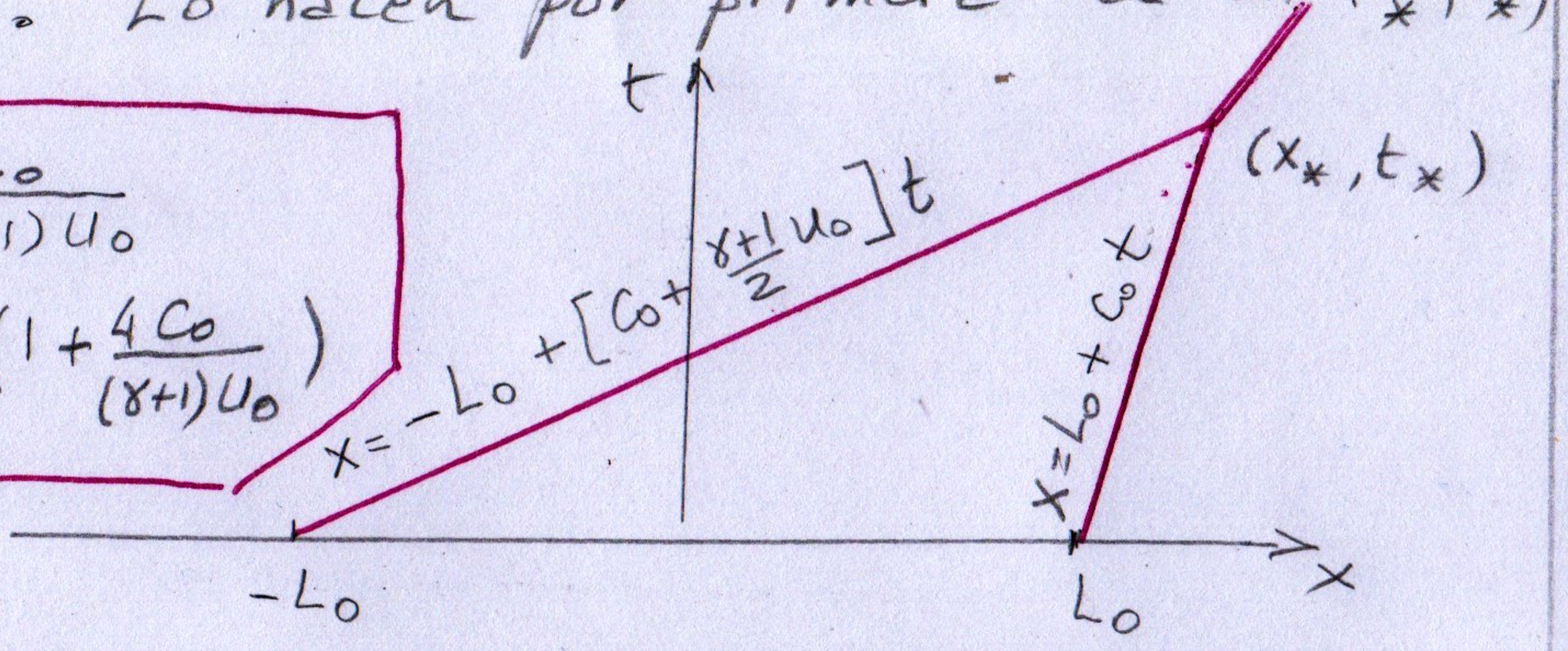


Formación y propagación de ondas de choque

- Para $x < -L_o \longrightarrow tgh\left(\frac{x}{L_o}\right) \sim -1$ → $u(x,0) \simeq U_o$; $c(x,0) \simeq c_o + \frac{\gamma-1}{2} U_o$
- Para $x > L_o \longrightarrow tgh\left(\frac{x}{L_o}\right) \sim 1$ → $u(x,0) \simeq 0$; $c(x,0) \simeq c_o$
- Para $-L_o < x < L_o$ las pendientes de las rectas van variando de manera aprox. lineal $\left(tgh\left(\frac{x}{L_o}\right) \simeq \frac{x}{L_o} \right)$ entre $-L_o$ y L_o.

· Noten que las rectas características se cortan. Lo hacen por "primera vez" en (x_*, t_*)

$$\boxed{t_* = \frac{4 L_o}{(\gamma+1) U_o} \qquad x_* = L_o \left(1 + \frac{4 c_o}{(\gamma+1) U_o} \right)}$$

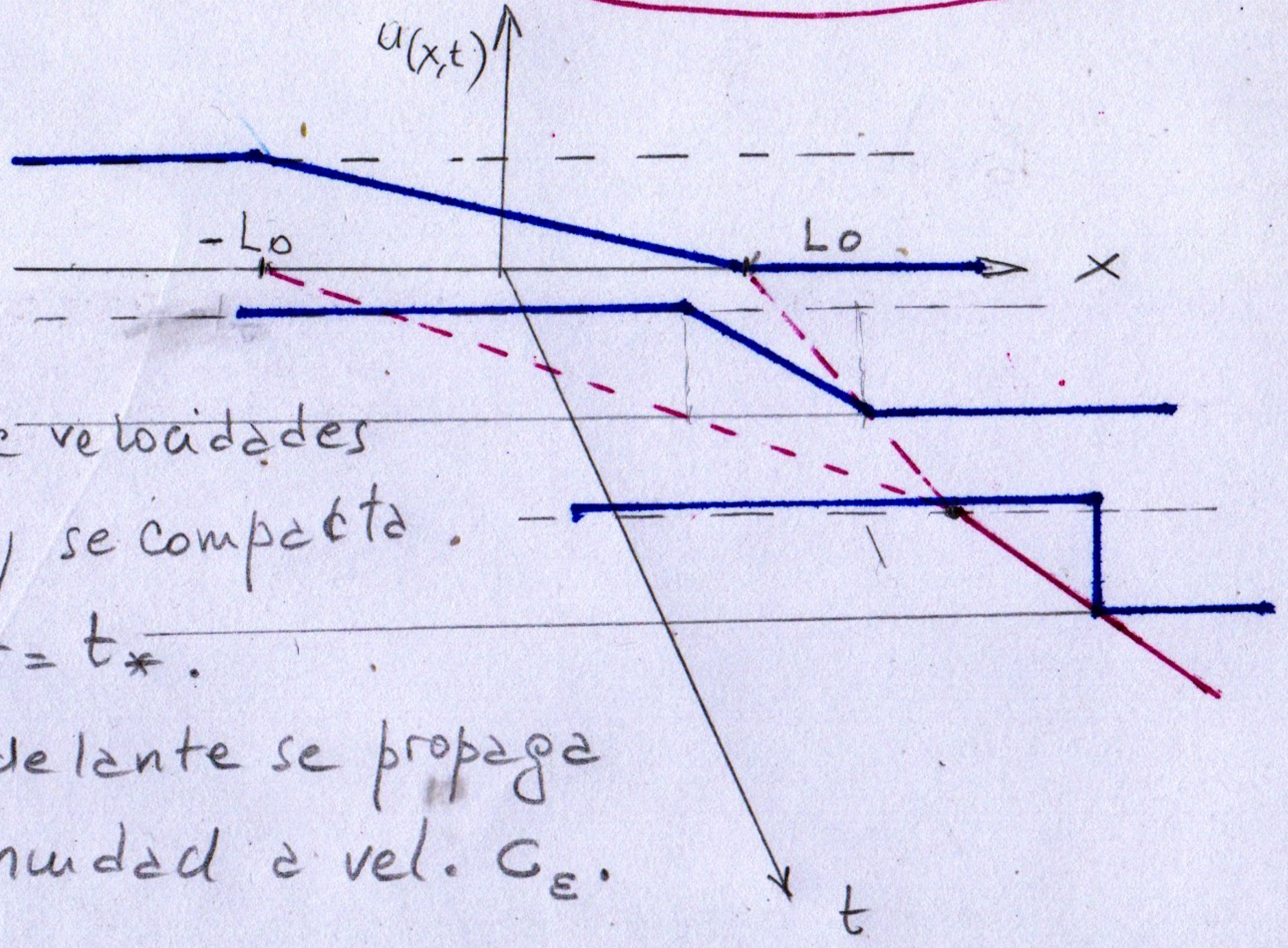


Las sucesivas rectas con $x_o^{\pm} = \pm(L_o + \varepsilon)$ se cruzan en

$$t_\varepsilon = \frac{4(L_o+\varepsilon)}{(\gamma+1) U_o} \qquad x_\varepsilon = (L_o+\varepsilon)\left(1 + \frac{4 c_o}{(\gamma+1) U_o}\right)$$

De modo que la velocidad del choque $(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$ resulta simplemente:

$$c_\varepsilon = \frac{x_\varepsilon}{t_\varepsilon} \longrightarrow c_\varepsilon = c_o + \frac{\gamma+1}{4} U_o$$



El perfil de velocidades se propaga y se compacta de $t=0$ a $t = t_*$.

De t_* en adelante se propaga una discontinuidad a vel. c_ε.