Repaso de Clase 12

- Formación de ondas de choque >>> $\partial_t u + u\partial_x u = 0$

- Método de las características

- Curvas características e invariantes de Riemann >>> $\partial_t F + \frac{dx}{dt}\partial_x F = 0$

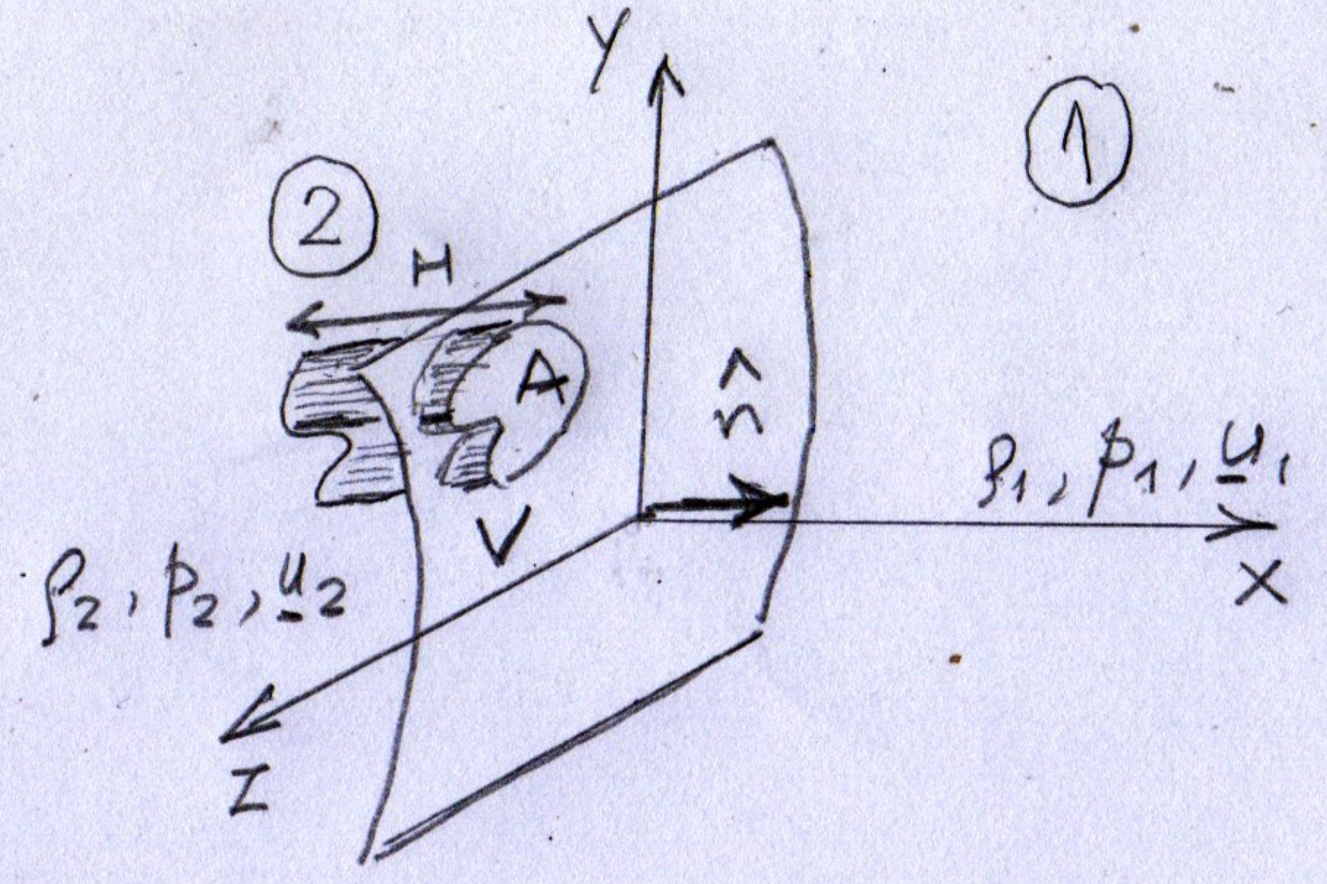
- Ejemplo de generación y propagación de una onda de choque.

Flujo de masa

Una vez formada la superficie de discontinuidad o choque, a uno y otro lado tenemos recintos donde las variables que describen el estado del fluido ($\rho(\underline{r},t)$, $p(\underline{r},t)$, $\underline{u}(\underline{r},t)$) evolucionan en forma contínua y derivable. Pero que ecuaciones se cumplen en el choque, donde las derivadas no están definidas ?

Flujo de masa

- En el referencial fijo al choque, vemos un medio ① caracterizado por $\rho_1, p_1, \underline{u}_1$ y un medio ② dado por $\rho_2, p_2, \underline{u}_2$.



- Integramos la ecuación de continuidad en el pequeño cilindro de volumen $V = A \cdot H$:

$$\int_V \partial_t \rho \, d^3r = -\int_V \underline{\nabla}\cdot(\rho \underline{u})\, d^3r = -\oiint_{S_V} \rho \underline{u} \cdot d\underline{S}$$

La superficie S_V tiene caras S_1, S_2 y S_{lat}.

Por lo tanto :

$$\underbrace{\int_V d^3r\, \partial_t \rho}_{H\to 0 \;\Rightarrow\; 0} = -\underbrace{\iint_{S_{lat}} \rho \underline{u}\cdot d\underline{S}}_{H\to 0 \;\Rightarrow\; 0} - \iint_{S_1} \rho \underline{u}\cdot d\underline{S}_1 - \iint_{S_2} \rho \underline{u}\cdot d\underline{S}_2$$

Como $\left.\begin{array}{l} d\underline{S}_1 \simeq A\hat{n} \\ d\underline{S}_2 \simeq -A\hat{n} \end{array}\right\} \longrightarrow -\rho_1 \underline{u}_1\cdot\hat{n}\, A + \rho_2 \underline{u}_2 \cdot \hat{n}\, A = 0$

Si definimos $[\![F]\!] = F_2 - F_1$

$$[\![\rho \underline{u}\cdot\hat{n}]\!] = 0$$

RH1 Primera relación de Rankine-Hugoniot

Esta expresión establece que el flujo de masa que ingresa al choque desde un medio, es igual al que egresa por el otro. Es decir que en el choque no se crea ni destruye masa.

Flujo de impulso lineal y energía

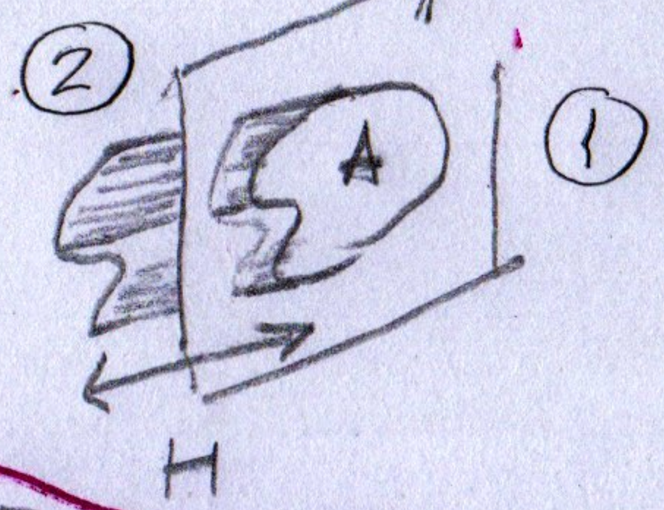
Flujo de impulso lineal

Para un fluido ideal, vimos que combinando las ecuaciones de continuidad y de Euler se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} &\partial_t \rho + \underline{\nabla}\cdot(\rho \underline{u}) = 0 \\ &\rho\left[\partial_t \underline{u} + (\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u}\right] = -\nabla p \end{aligned}\right\} \rightarrow \partial_t(\rho \underline{u}) = -\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\Pi}}$$

$\underline{\underline{\Pi}} = p\,\underline{\underline{1}} + \rho\,\underline{u}\,\underline{u}$: flujo de impulso

Integrando ahora esta ecuación en el cilindro de volumen V; obtenemos para $H \rightarrow 0$:



$$[\![\underline{\underline{\Pi}}\cdot\hat{n}]\!] = 0 \rightarrow [\![\rho \underline{u}\,\underline{u}\cdot\hat{n} + p\,\hat{n}]\!] = 0 \quad \text{RH2}$$

Llamamos RH2 a esta relación vectorial, que expresa la conservación de impulso lineal al atravesar el choque.

Flujo de energía

Para un flujo compresible y adiabático, la densidad de energía es

$$\frac{\rho u^2}{2} + \rho\varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{\text{energía interna}}{\text{masa}}$$

Por el Primer Principio de la Termodinámica:

$$d\varepsilon = \delta Q - p\,dV = \delta Q - p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

En el caso adiabático:

$$\left.\begin{aligned} &\delta Q = 0 \\ &p = K\rho^{\gamma} \end{aligned}\right\} \rightarrow d\varepsilon = \frac{p}{\rho^2}d\rho = K\rho^{\gamma-2}d\rho = d\left[\frac{p}{(\gamma-1)\rho}\right]$$

Entonces: $\varepsilon = \dfrac{1}{\gamma-1}\dfrac{p}{\rho}$

La variación de energía del fluido es:

$$\partial_t\left(\rho\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1}\right) = \frac{u^2}{2}\partial_t\rho + \rho\underline{u}\cdot\partial_t\underline{u} + \frac{1}{\gamma-1}\partial_t p$$

Relaciones de Rankine-Hugoniot

$$\therefore\ \partial_t\left(\frac{\rho u^2}{2}+\frac{p}{\gamma-1}\right)=-\frac{u^2}{2}\nabla\cdot(\rho \underline{u})-\underline{u}\cdot\left[\rho(\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u}+\nabla p\right]+$$

$$+\frac{K\gamma\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1}\partial_t\rho$$

$$\partial_t\left(\frac{\rho u^2}{2}+\frac{p}{\gamma-1}\right)=-\nabla\cdot\left(\frac{\rho u^2}{2}\underline{u}\right)-\underline{u}\cdot\nabla p-\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}\nabla\cdot(\rho\underline{u})$$

En el último término:

$$-\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}\left(\rho\nabla\cdot\underline{u}+\underline{u}\cdot\nabla\rho\right)=-\frac{\gamma}{\gamma-1}p\,\nabla\cdot\underline{u}-\frac{1}{\gamma-1}\underline{u}\cdot\nabla p$$

en síntesis:

$$\partial_t\underbrace{\left(\frac{\rho u^2}{2}+\frac{p}{\gamma-1}\right)}_{\text{densidad de energía}}=-\nabla\cdot\underbrace{\left[\frac{\rho u^2}{2}\underline{u}+\frac{\gamma}{\gamma-1}p\underline{u}\right]}_{\text{flujo de energía}}$$

Entonces, integrando en el volumen $V=A\cdot H$,

en el límite $H\to 0$

$$\left[\!\left[\left(\frac{\rho u^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}p\right)\underline{u}\cdot\hat{n}\right]\!\right]=0 \qquad \text{RH3}$$

Entonces, pese a que las variables no son derivables en la superficie de discontinuidad, deben satisfacerse las relaciones de <u>Rankine - Hugoniot</u>, que son expresiones integrales de las ecuaciones y funcionan como condiciones de contorno de una interfase interna del fluido.

$$\boxed{\begin{aligned}&[\![\rho\,\underline{u}\cdot\hat{n}]\!]=0\\&[\![\rho\underline{u}\,\underline{u}\cdot\hat{n}+p\hat{n}]\!]=0\\&\left[\!\left[\left(\frac{\rho u^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}p\right)\underline{u}\cdot\hat{n}\right]\!\right]=0\end{aligned}} \quad \text{Rankine Hugoniot}$$

Dos tipos de choques

Podemos distinguir dos tipos de choques:

(a) sin flujo de masa

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 \underline{u}_1 \cdot \hat{n} &= \rho_2 \underline{u}_2 \cdot \hat{n} \\ \text{sup. } \rho_1 &\neq 0 \neq \rho_2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow u_{1x} = 0 = u_{2x}$$

Tambien se llaman discontinuidades tangenciales o de contacto ya que los E.F. no cruzan el choque.

$$\text{RH2} \quad [\rho \underline{u}\, u_x + p\, \hat{x}] = 0 \longrightarrow p_1 = p_2$$

$$\text{RH3} \quad \left[u_x\left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p\right)\right] = 0 \quad \text{se satisface trivialmente}$$

(b) con flujo de masa

$$j = \rho_1 u_{1x} = \rho_2 u_{2x} \neq 0$$

$$\text{RH2} \quad [\rho \underline{u}\, u_x + p\, \hat{x}] = 0 \quad \begin{aligned} &\xrightarrow{\perp} [\underline{u}_\perp] = 0 \\ &\xrightarrow{\parallel} [\rho u_x^2 + p] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{RH3} \quad \left[u_x\left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p\right)\right] = 0 \longrightarrow \left[\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}\right] = 0$$

La relación $[\underline{u}_\perp] = 0$ permite, desde el referencial $\underline{u}_{1\perp}$, ver el problema como 1D. Es decir $\underline{u} = u\hat{x}$

$$\left.\begin{aligned} j &= \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \\ \rho_1 u_1^2 + p_1 &= \rho_2 u_2^2 + p_2 \\ \frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_1}{\rho_1} &= \frac{u_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_2}{\rho_2} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{Dados } \rho_1, u_1, p_1 \\ \text{puedo obtener} \\ \rho_2, u_2, p_2 \end{array}$$

Noten que las velocidades u_1, u_2 son respecto del referencial del choque. Si en la práctica uno de los medios se encuentra en reposo, debemos realizar una transformación de Galileo.