Repaso de Clase 13

- Formación de ondas de choque >>> $\partial_t u + u\partial_x u = 0$

- Método de las características

- Curvas características e invariantes de Riemann >>> $\partial_t F + \frac{dx}{dt}\partial_x F = 0$

- Relaciones de Rankine-Hugoniot.

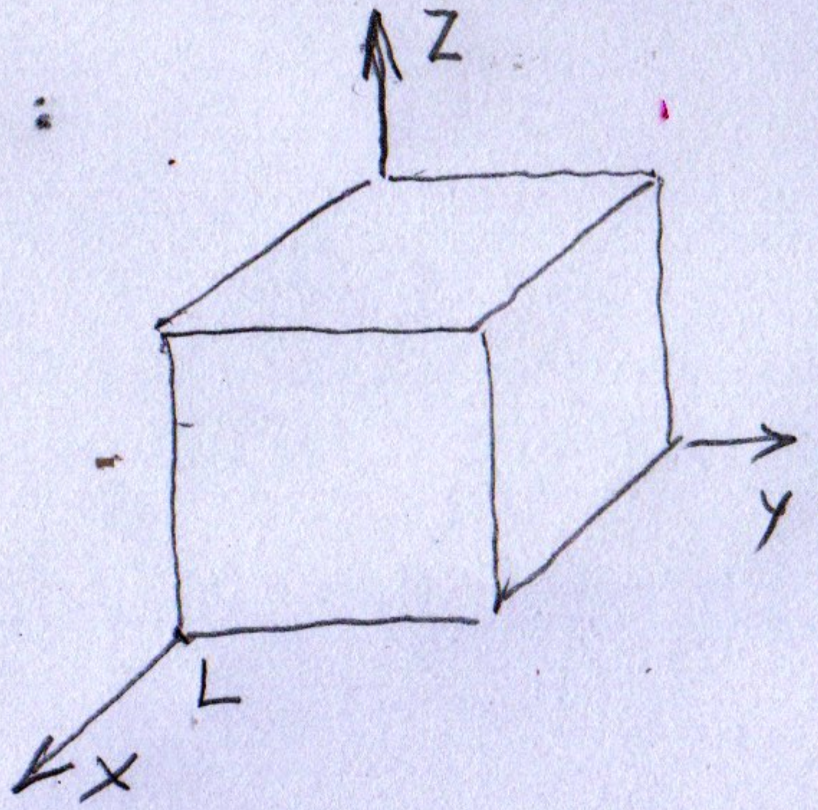
Flujos turbulentos

• La dinámica de fluidos es descripta por ecuaciones en derivadas parciales. Es decir, son sistemas con infinitos grados de libertad

• Los GL son descriptos por las autofunciones del recinto. Por ejemplo los modos de Fourier en el caso de un cubo:

$$\underline{u}(\underline{r},t) = \sum_{\underline{k}} \underline{u}_{\underline{k}}(t)\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

$$\underline{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$$

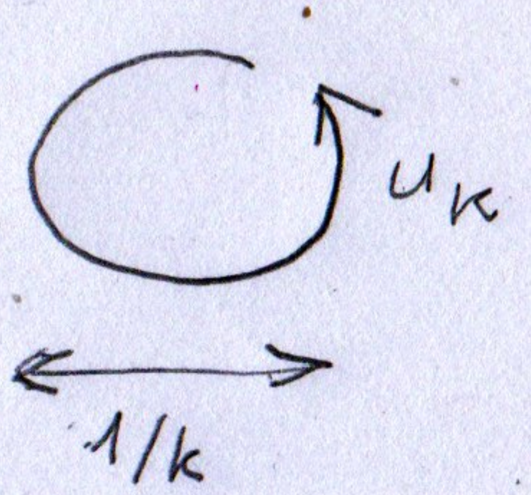


• En fenómenos lineales cada GL evoluciona independientemente de los demas.

• Los efectos no lineales acoplan GL.

• La turbulencia es fuertemente no lineal y Re>>1. Los GL estan fuertemente acoplados.

• Un modo $\underline{k}$ puede asociarse con vórtices de tamaño $\lambda = \frac{1}{|\underline{k}|}$, velocidad azimutal u_k y período $\tau_k \sim \frac{1}{k u_k}$



• La turbulencia es la superposición de vórtices de todos los tamaños y con todas las orientaciones.

• La ecuación de Navier-Stokes para flujos incompresibles en el espacio de Fourier resulta:

$$\rho\left[\partial_t \underline{u} + (\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u}\right] = \rho \underline{f} - \underline{\nabla} p + \mu \nabla^2 \underline{u}$$

$\Downarrow$ transformo Fourier

$$\partial_t \underline{u}_k = \underline{f}_k + \underline{NL}_{\underline{k}} - \nu k^2 \underline{u}_k$$

NOTA: En el caso incompresible no necesito una ecuación para p, ya que:

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{u} = 0 \longrightarrow \underline{\nabla}\cdot(NS) \rightarrow \rho\, \underline{\nabla}\cdot\left[(\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u}\right] = -\nabla^2 p$$

Ec. Poisson para p

Espectro de energía

Vimos que el balance de energía de un flujo incompresible resulta:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\int_V d^3r\, \rho \frac{|\underline{u}|^2}{2}}_{E} = -\underbrace{\oint_{S_V} d\underline{s}.(\ldots)}_{=0} - \underbrace{2\mu \int_V d^3r \frac{|\underline{\nabla}\times\underline{u}|^2}{2}}_{\text{Disipación viscosa}} + \underbrace{\int_V d^3r\, \rho\, \underline{u}.\underline{f}}_{\text{Potencia de } \underline{f}}$$

Segun el teorema de Parseval:

$$E = \rho \int_V d^3r \frac{|\underline{u}|^2}{2} = \rho \int d^3k \frac{|\underline{u}_k|^2}{2}$$

Si podemos suponer que la distribución de energía es isótropa en el espacio de Fourier (distribución de vórtices en todas las direcciones: $E = \rho \int d^3k \frac{|\underline{u}_k|^2}{2} = \rho \int dk\, \underbrace{. 4\pi k^2 \frac{|\underline{u}_k|^2}{2}}_{E_k \,:\, \text{espectro}}$

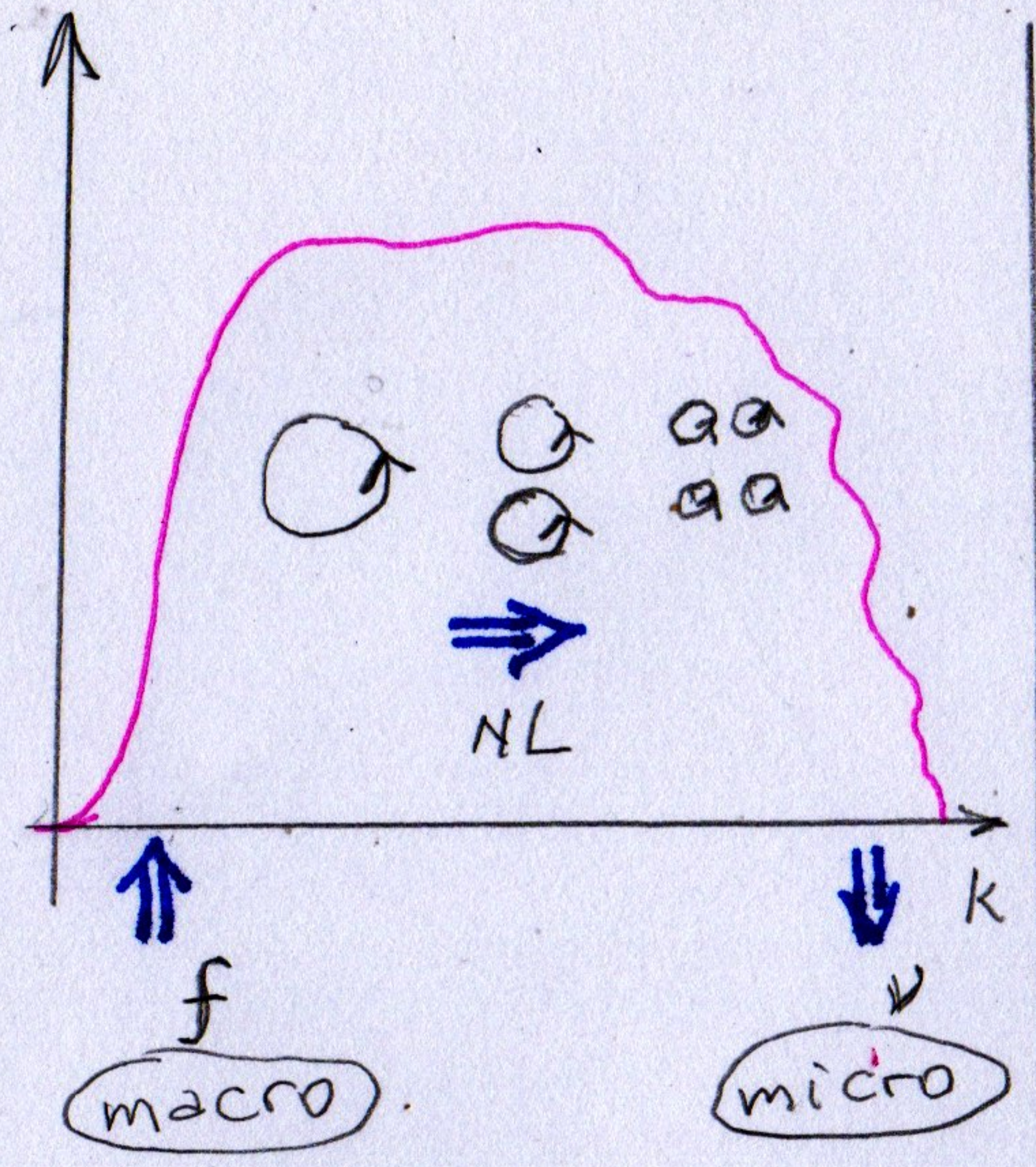
- En 1941 el matemático ruso Andrei Kolmogorov propuso lo siguiente para describir turbulencia incompresible:
  - estacionareidad
  - homogeneidad
  - isotropía

  } El número de vórtices es independiente del tiempo, de la posición y de la orientación

- Supone que $\underline{f}_k$ se concentra en escalas macro (bajo k)
- Los esfuerzos viscosos se concentran en la escala micro (alto k) $\rightarrow \partial_t \underline{u}_k = \cdots - \nu k^2 \underline{u}_k$
- Las NL no alteran la energía del sistema, sino que solo la redistribuyen en espacio $\underline{k}$.
- Con estos supuestos, podemos construir una descripción para turbulencia homogenea, estacionaria e isótropa.

Cascada de energía

- Podemos interpretar el espectro $E_k \cdot dk$ como la energía en vórtices con tamaños entre k y $k+dk$



- En las escalas macro inyectamos energía a través de $\underline{f}$.
- En escalas intermedias, la energía se transporta debido al fraccionamiento de vórtices en vórtices más chicos.
- En escalas micro, la energía de esos vórtices se disipa por fricción viscosa.
- En turbulencia fuerte, estimamos el tiempo de fraccionamiento $\tau_k^{NL} \sim \tau_k \sim \frac{1}{k u_k}$

- Kolmogorov (1941) propone que en el límite $Re \to \infty$ el transporte NL de energía es independiente de la viscosidad ν.

  Podemos obtener la forma funcional del espectro?

- Veamos que es posible hacerlo con un simple análisis dimensional. Como $\rho = cte$, trabajemos con la energía por unidad de masa.
- Definimos la tasa de inyección de energía

  $\varepsilon = \frac{\text{energía}}{\text{masa} \times \text{tiempo}}$ que es la potencia entregada por $\underline{f}$.

- En estado estacionario, $\varepsilon = cte$, y coincide con la tasa de disipación y con la de transferencia NL de k a $k+dk$, $\forall k$.

Espectro de Kolmogorov (1941)

- Procedamos entonces con nuestro análisis dimensional, proponiendo:

$$E_k = E_k(k, \varepsilon)$$

es decir, que el espectro depende de la tasa de inyección ε y por supuesto de k.

- Y siguiendo a Kolmogorov, no depende de ν.

$$[E] = \frac{L^2}{T^2} \longrightarrow [E_k] = \frac{L^3}{T^2} \qquad \left.\begin{matrix} n=2 \\ k=2 \end{matrix}\right\} \rightarrow n-k+1=1$$

$$\varepsilon = \frac{L^2}{T^3} \qquad [k] = \frac{1}{L} \qquad [u_k] = \frac{L}{T}$$

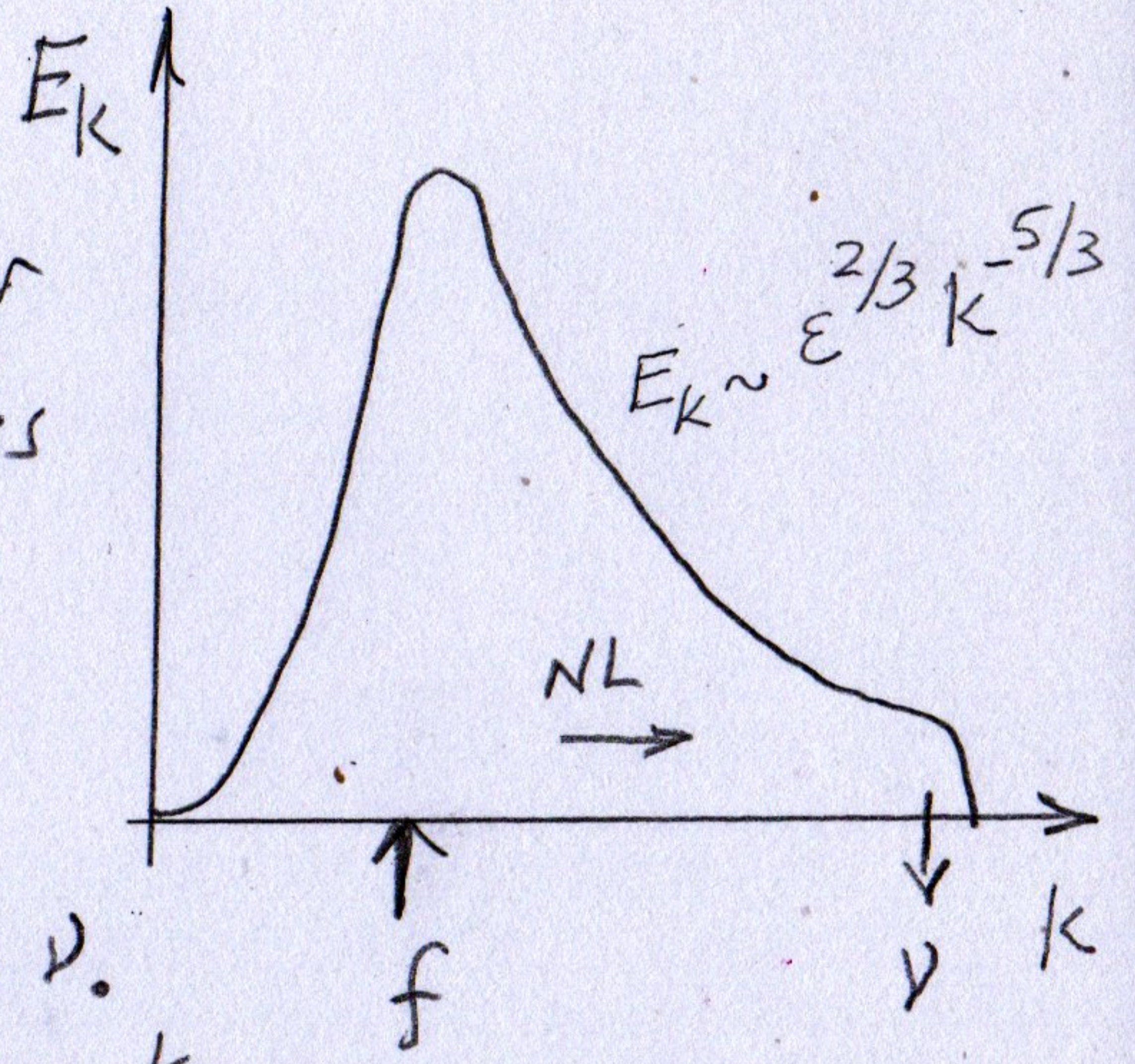
$$E_k \sim k^{\alpha} \varepsilon^{\beta}$$

$$\frac{L^3}{T^2} \sim \left(\frac{1}{L}\right)^{\alpha} \left(\frac{L^2}{T^3}\right)^{\beta} \rightarrow \begin{matrix} L & 3 = -\alpha + 2\beta \\ T & 2 = 3\beta \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \beta = \frac{2}{3} \\ \alpha = -5/3 \end{matrix}\right\} \rightarrow E_k \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

Espectro de Kolmogorov

- Este espectro ha sido confirmado ampliamente por experimentos, flujos naturales y simulaciones.



- Se confirma el hecho anti-intuitivo de que la tasa de disipación ε es indep ν. Al cambiar ν, no cambia ε sino k_ν.
- Para determinar la escala de disipación k_ν:

$$k_\nu = k_\nu(\varepsilon, \nu) \qquad k_\nu \sim \varepsilon^{a} \nu^{\beta}$$

$$\frac{1}{L} \sim \left(\frac{L^2}{T^3}\right)^{a} \left(\frac{L^2}{T}\right)^{b}$$

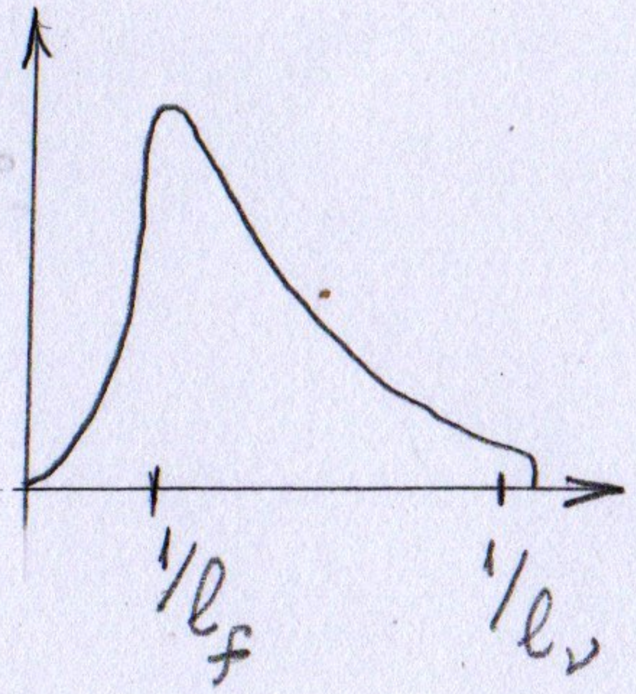
$$\left.\begin{matrix} L & -1 = 2a + 2b \\ T & 0 = 3a + b \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} a = 1/4 \\ b = -3/4 \end{matrix} \rightarrow k_\nu \sim \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3}\right)^{1/4}$$

$\boxed{\text{FIN DEL CURSO}}$

Turbulencia y número de Reynolds

Un comentario final. Los sistemas turbulentos siempre corresponden a $Re \gg 1$

. Para el sistema global, la long. característica es ℓ_f y la vel. u_f.



Entonces: $\quad Re = \dfrac{u_f \, \ell_f}{\nu}$

Vimos que $\quad k_\nu \sim \dfrac{1}{\ell_f} \sim \left(\dfrac{\varepsilon}{\nu^3}\right)^{1/4}$

$$\varepsilon \sim \frac{u_f^2}{\ell_f / u_f} \sim \frac{u_f^3}{\ell_f} \longrightarrow \frac{1}{\ell_\nu} \sim \left(\frac{u_f^3}{\ell_f \, \nu^3}\right)^{1/4}$$

Es decir que: $\quad \dfrac{1}{\ell_\nu^4} \sim \dfrac{u_f^3}{\ell_f \, \nu^3} \cdot \dfrac{\ell_f^3}{\ell_f^3} \sim \dfrac{Re^3}{\ell_f^4}$

$$\therefore \quad \frac{\ell_f}{\ell_\nu} \sim Re^{3/4} \gg 1$$

La separación entre las escalas de forzado y disipación es muy grande