Repaso de Clase 3

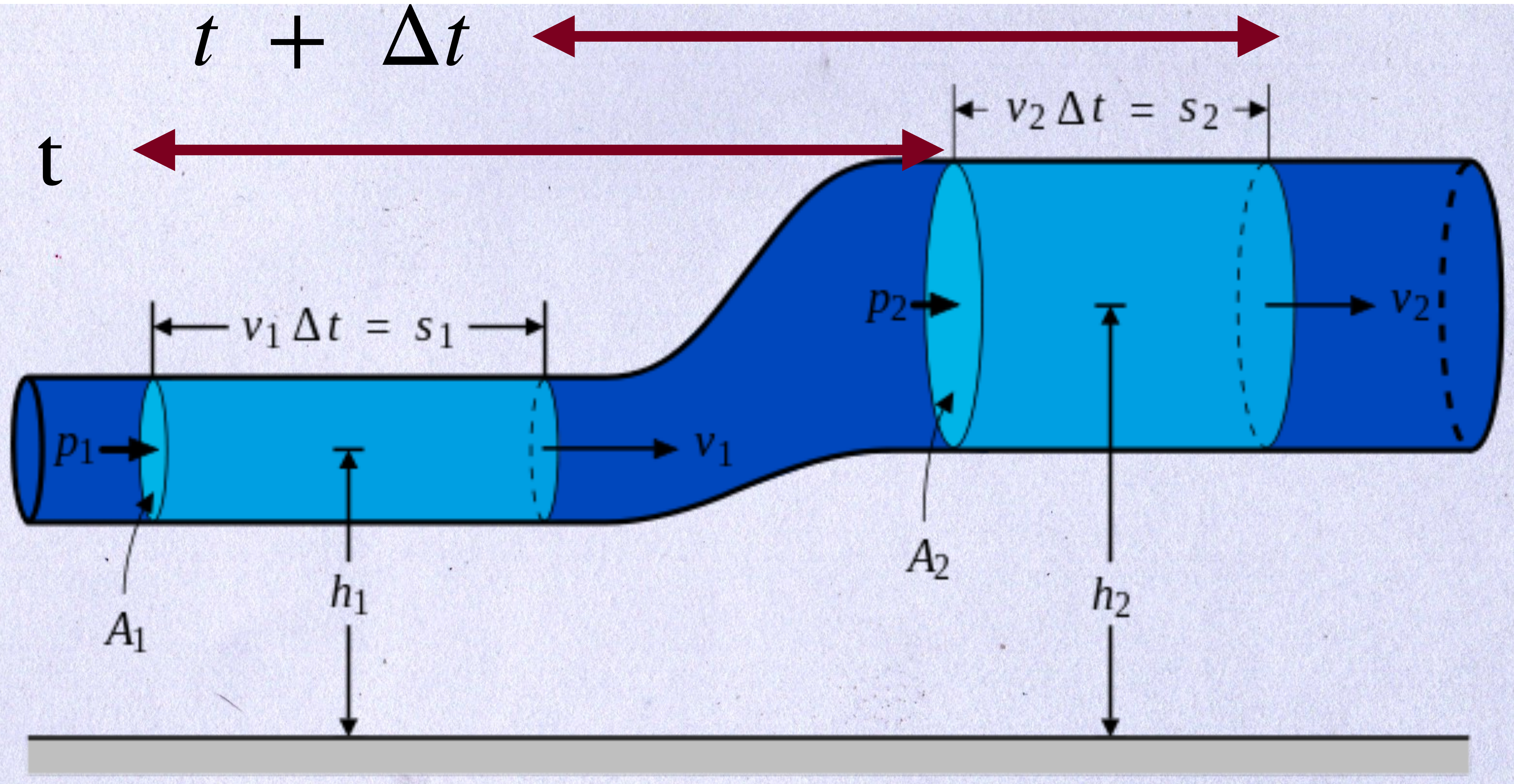
- Conservación de masa >>> Ecuación de continuidad >>> Caudal volumétrico y másico

- Incompresibilidad de un flujo >>> $\dfrac{d\rho}{dt} \simeq 0$

- Conservación de impulso lineal

- Conservación de energía >>> Teoremas Bernoulli

Conservación de energía: teoremas de Bernoulli (1738)



Para el flujo estacionario e incompresible del tubo de flujo de la figura, la porción de fluido entre t y $t+\Delta t$ gana una energía

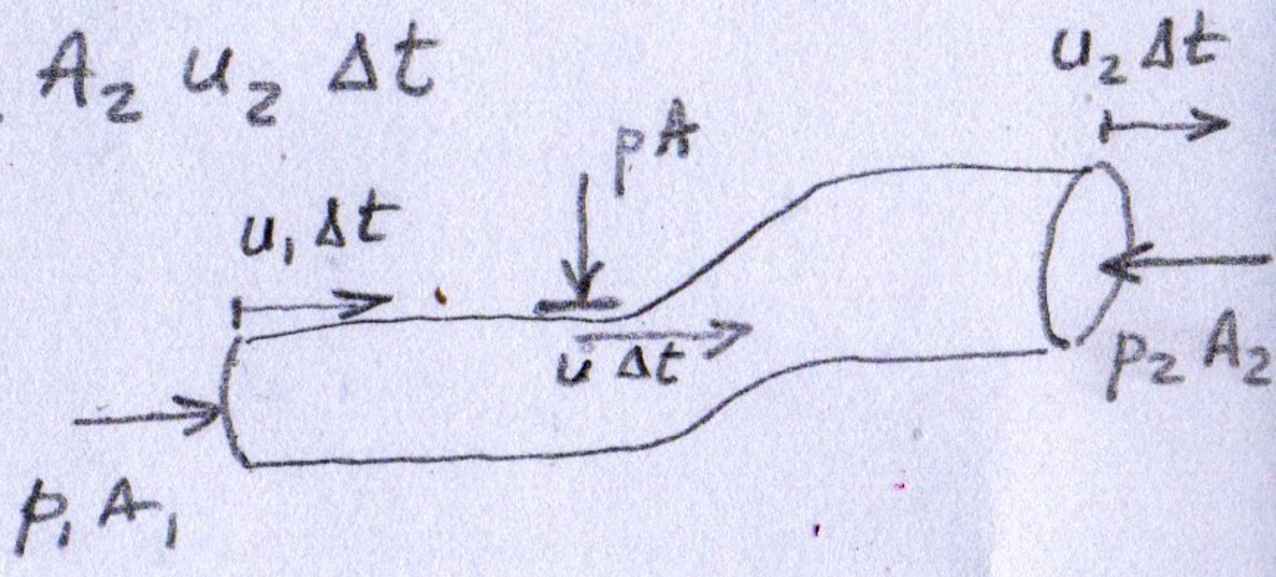
$$\Delta E_2 = \left(\frac{u_2^2}{2} + g h_2\right) \rho A_2 u_2 \Delta t$$

y pierde

$$\Delta E_1 = -\left(\frac{u_1^2}{2} + g h_1\right) \rho A_1 u_1 \Delta t$$

La variación de energía $\Delta E_1 + \Delta E_2$ entre t y $t+\Delta t$, debe igualarse al trabajo de fuerzas no conservativas. Consideremos (por las dudas) no conservativo el trabajo de la presión en la superficie:

$$W = p_1 A_1 u_1 \Delta t - p_2 A_2 u_2 \Delta t$$



ya que el trabajo es nulo en la superficie lateral.

$$W = \Delta(E_1 + E_2)$$

$$\therefore \left(\frac{u_2^2}{2} + g h_2 + \frac{p_2}{\rho}\right) \rho A_2 u_2 \Delta t = \left(\frac{u_1^2}{2} + g h_1 + \frac{p_1}{\rho}\right) \rho A_1 u_1 \Delta t$$

Como el flujo es incompresible: $A_2 u_2 \Delta t = A_1 u_1 \Delta t$

y los extremos "1" y "2" son arbitrarios:

$$\frac{u^2}{2} + g h + \frac{p}{\rho} = cte \text{ (línea)}$$

tubo de espesor infinitesimal

energía cinética

energía potencial

? (energía interna)

Flujos planos, irrotacionales e incompresibles

- Flujo plano: $\underline{u}(\underline{r}) = u_x(x,y)\,\hat{\imath} + u_y(x,y)\,\hat{\jmath}$

- Incompresible: $\dfrac{d\rho}{dt} = 0 = \underline{\nabla}\cdot\underline{u} \longrightarrow \underline{u} = \underline{\nabla}\times\left(\hat{z}\,\psi(x,y)\right)$

  $\psi(x,y)$: función corriente

- Irrotacional: $\underline{\nabla}\times\underline{u} = 0 \longrightarrow \underline{u} = \underline{\nabla}\phi$

  $\phi(x,y)$: función potencial

Entonces:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \partial_x\phi = \partial_y\psi \\ u_y &= \partial_y\phi = -\partial_x\psi \end{aligned}\right\} \text{Condiciones de Cauchy - Riemann}$$

Son condiciones de diferenciabilidad de las partes real e imaginaria de funciones complejas de variable compleja.

Definimos:

$$\mathbb{W}(z): \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \mathbb{W}(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

$$z = x + iy$$

de manera que:

$$\frac{d\mathbb{W}}{dz} = \partial_x\phi + i\,\partial_x\psi = u_x - iu_y = \mathbb{U}^* \qquad \mathbb{U} = u_x + iu_y$$

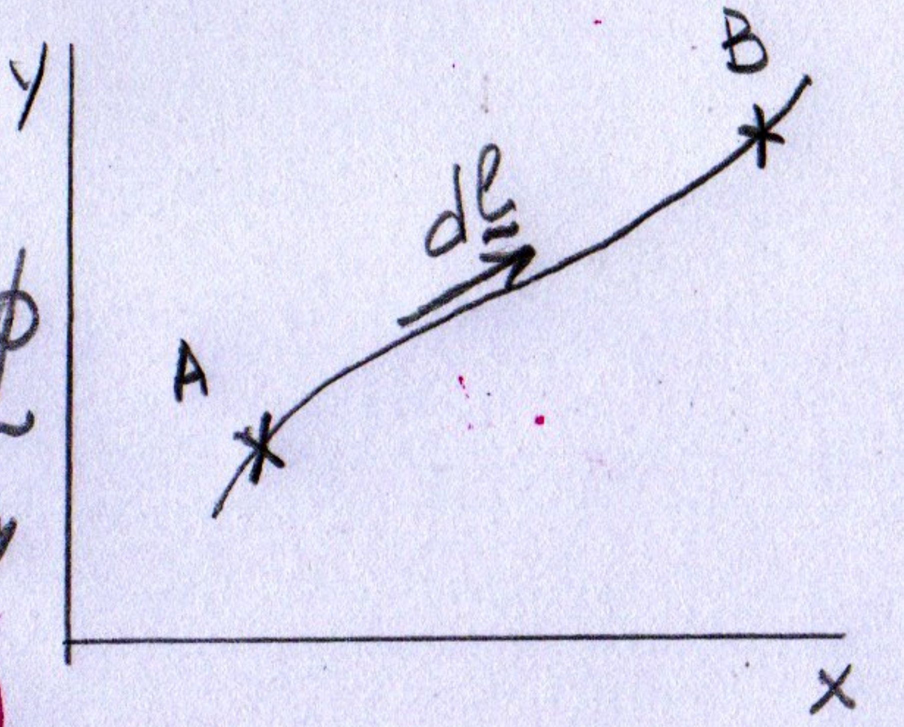
La energía cinética (por unidad de masa) se obtiene como:

$$\frac{u^2}{2} = \frac{u_x^2 + u_y^2}{2} = \frac{1}{2}\left|\frac{dW}{dz}\right|^2$$

NOTA: Tanto $\psi(x,y)$ como $\phi(x,y)$ son funciones armónicas, es decir: $\nabla^2\phi = 0 = \nabla^2\psi$

Función potencial

Que significado tiene la diferencia de potencial $\phi(x,y)$ entre dos puntos?



$$\phi_B - \phi_A = \int_A^B d\phi = \int_A^B dx\,\underbrace{\partial_x\phi}_{u_x} + dy\,\underbrace{\partial_y\phi}_{u_y}$$

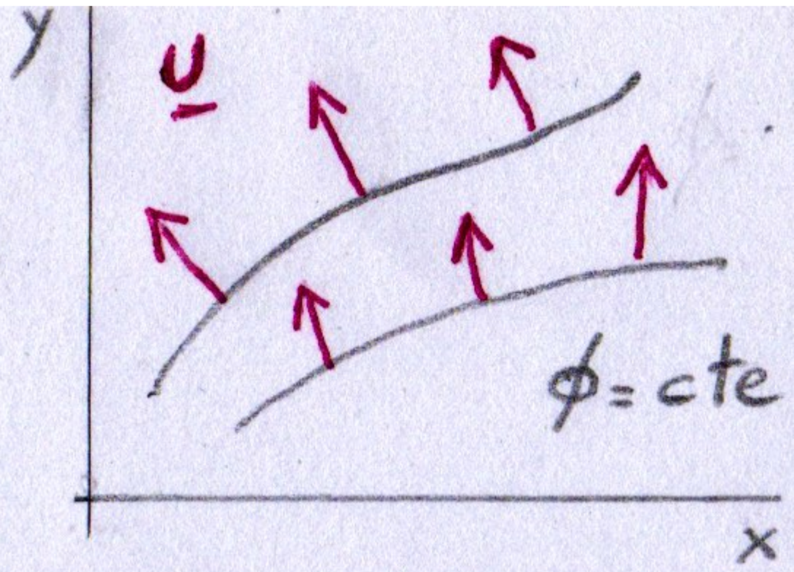
$$\underline{d\ell} = (dx, dy) \longrightarrow \phi_B - \phi_A = \int_A^B \underline{d\ell}\cdot\underline{u}$$

Si elijo A y B sobre una línea equipotencial ($\phi = cte$)

$$\phi_A = \phi_B \longrightarrow \underline{u}\cdot\underline{d\ell} = 0 \Longrightarrow \underline{u} \perp \underline{d\ell} \text{ en líneas } \phi = cte$$

Función potencial y función corriente

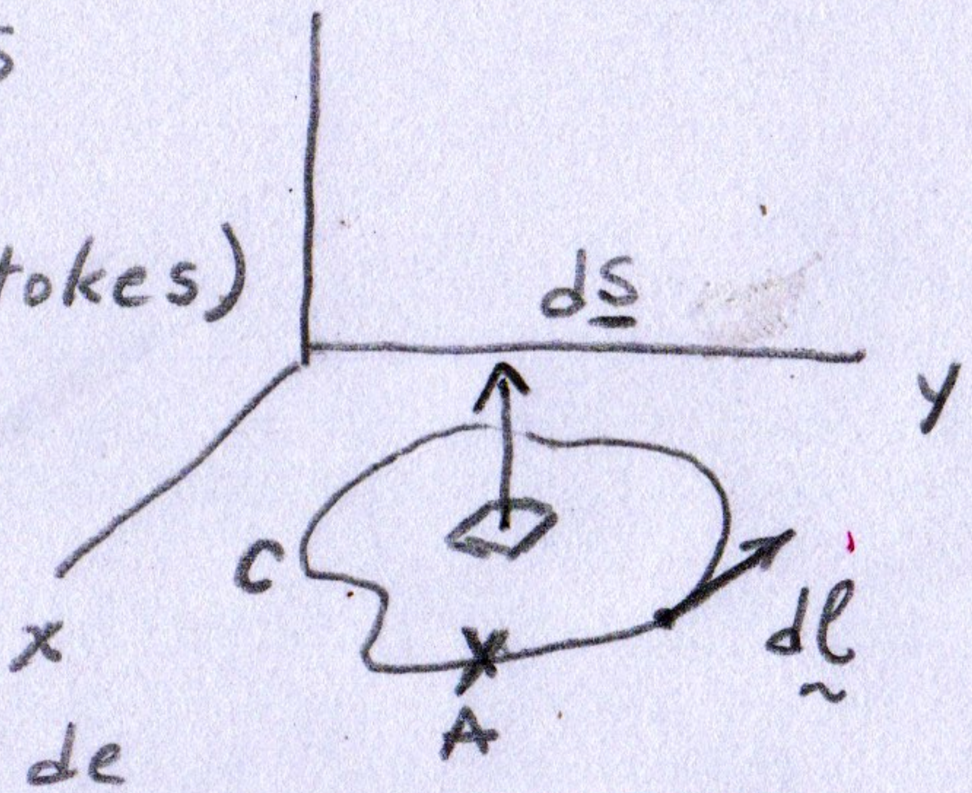
Es decir que $\underline{u}(r)$ es siempre perpendicular a las líneas $\phi = cte$.



Si ahora elegimos una curva C cerrada que pasa por A

$$\phi_A - \phi_A = \oint_C \underline{u}\cdot d\underline{l} = \iint_{S_C} \underline{\omega}\cdot d\underline{S}$$

(x Stokes)



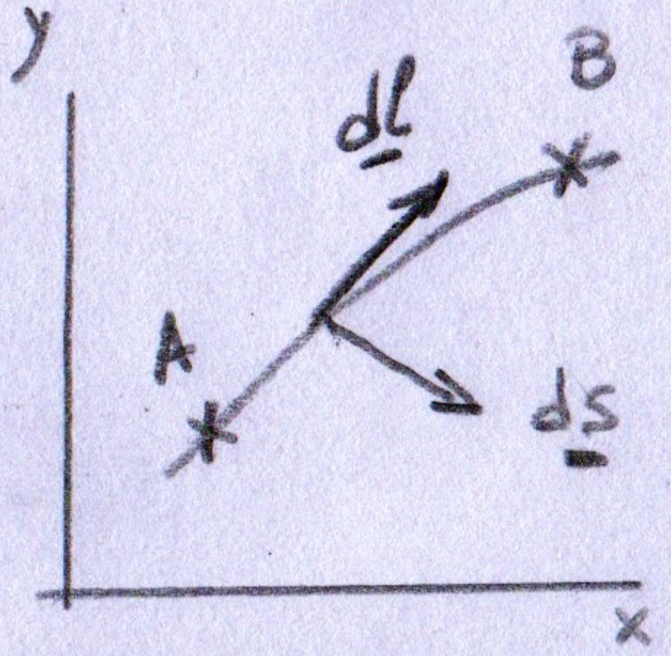
- Como $\underline{\omega} = 0 \longrightarrow \phi_A - \phi_A = 0$

$\phi(x,y)$ univaluada

- Si admitimos singularidades de $\underline{\omega}$ (vórtices!), entonces $\iint_{S_C} d\underline{S}\cdot\underline{\omega} \neq 0 \longleftrightarrow \phi(x,y)$ multivaluada

Función corriente

$$\psi_B - \psi_A = \int_A^B d\psi = \int_A^B dx\, \underbrace{\partial_x \psi}_{-u_y} + dy\, \underbrace{\partial_y \psi}_{u_x}$$

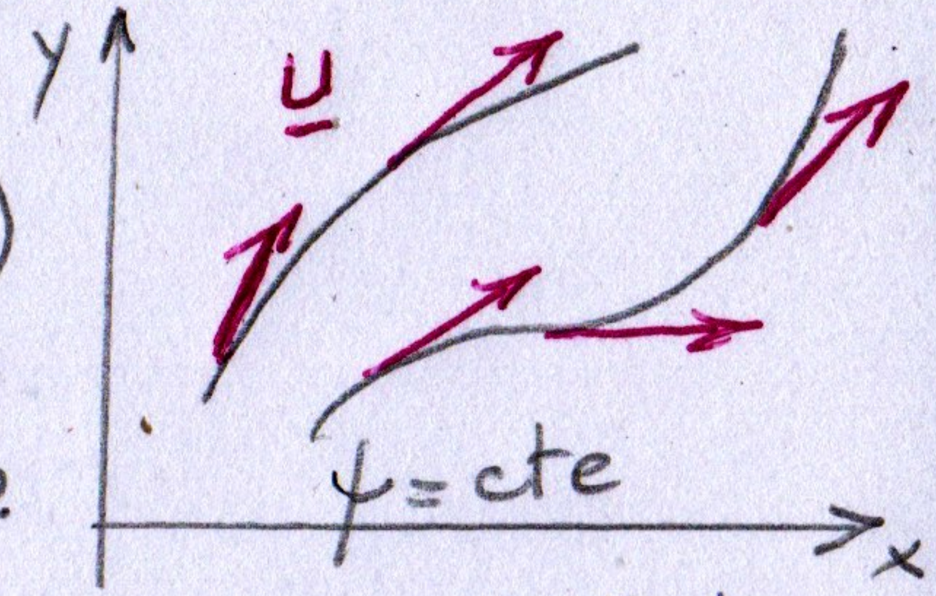


Entonces: $\psi_B - \psi_A = \int_A^B \underline{u}\cdot d\underline{s}$ donde $d\underline{s} = (dy, -dx) = d\underline{l}\times\hat{z}$

$\forall A,B$ de una línea $\psi = cte \longrightarrow \underline{u}\cdot d\underline{s} = 0 \rightarrow \underline{u} \perp d\underline{s}$

Es decir que $\underline{u} \parallel d\underline{l}$ en líneas $\psi = cte$ (líneas de corriente)

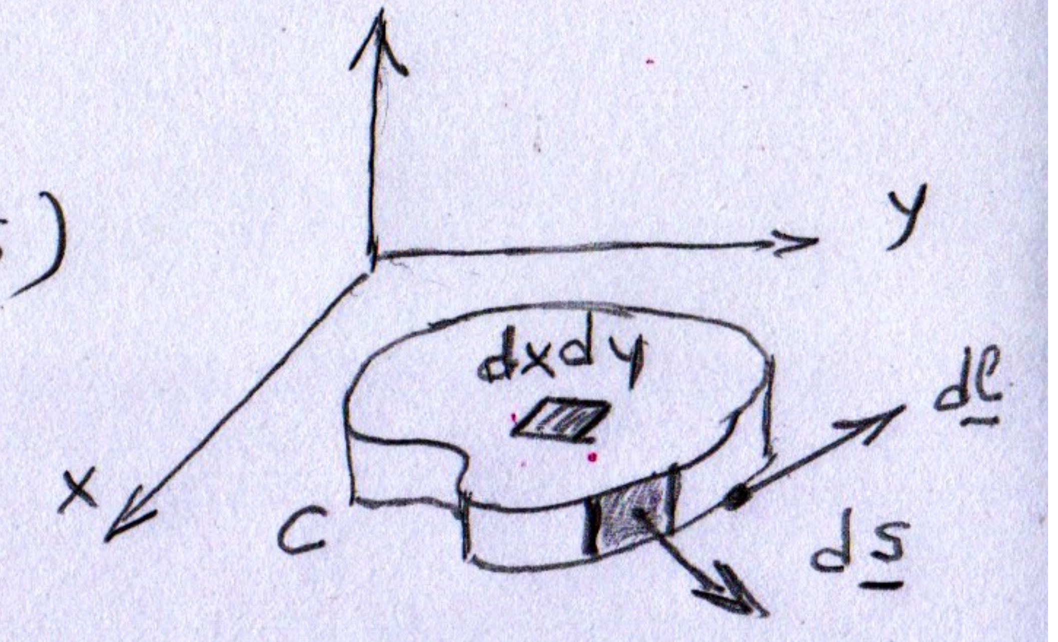
NOTA: Las líneas $\phi = cte$ y $\psi = cte$ son mutuamente $\perp$ en todo punto.



Sea una curva C cerrada que pase por A. Entonces

$$\psi_A - \psi_A = \oint_C \underline{u}\cdot d\underline{s} = \int_{S_C} \underline{\nabla}\cdot\underline{u}\, dx\, dy$$

(x Gauss)



- Como $\underline{\nabla}\cdot\underline{u} = 0 \longrightarrow \psi_A - \psi_A = 0$

$\psi(x,y)$ univaluada

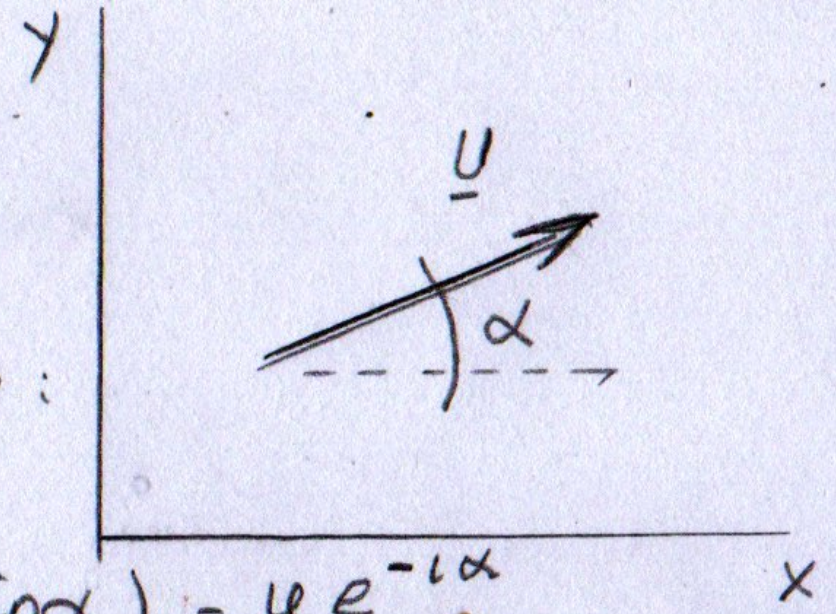
- Si admitimos singularidades de $\underline{\nabla}\cdot\underline{u}$ (fuente!) entonces $\int_{S_C} \underline{\nabla}\cdot\underline{u}\, dx\, dy \neq 0 \longleftrightarrow \psi(x,y)$ multivaluada

NOTA: A través de singularidades de $\underline{\nabla}\times\underline{u}$ y $\underline{\nabla}\cdot\underline{u}$ podemos entonces modelar flujos no triviales

Algunos flujos elementales

Flujo uniforme

Queremos obtener $W(z)$ para varios flujos simples. Para un flujo uniforme:



$$\left.\begin{aligned} u_x &= U\cos\alpha \\ u_y &= U\sin\alpha \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{dW}{dz} = U^* = U(\cos\alpha - i\sin\alpha) = U e^{-i\alpha}$$

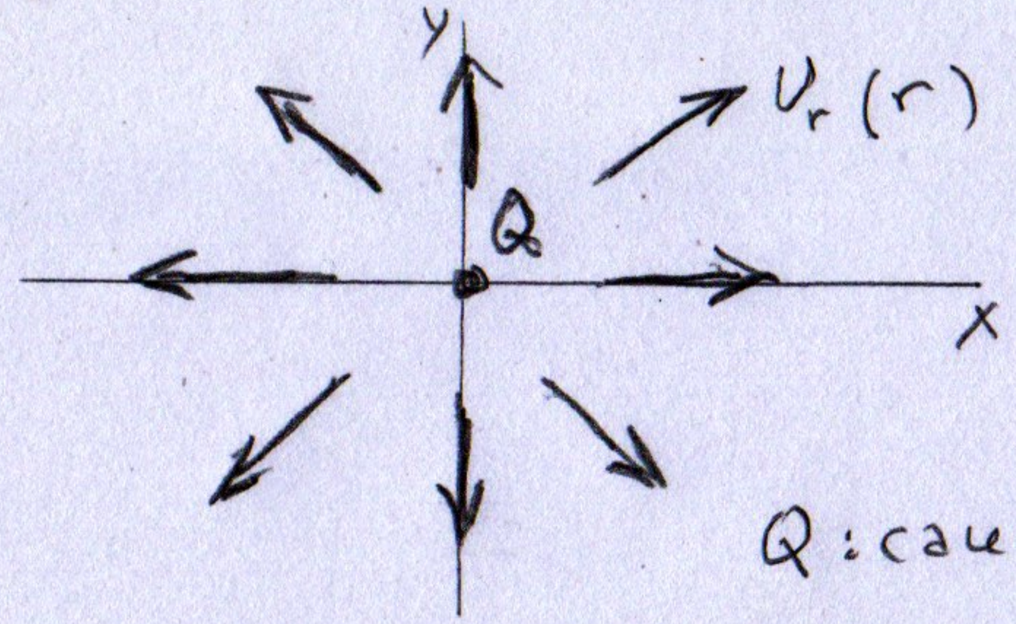
$$\therefore \boxed{W(z) = U e^{-i\alpha} z}$$

flujo uniforme

→ líneas de corriente $\psi = Im(W) = cte$

→ líneas de potencial $\phi = Re(W) = cte$

Fuente o sumidero



$$\underline{u} = u_r(r)\,\hat{r}$$

$$Q = u_r\, 2\pi r \longrightarrow u_r(r) = \frac{Q}{2\pi r}$$

Q: caudal

Para obtener $W(z)$:

$$\left\{\begin{aligned} u_x &= \frac{Q}{2\pi r}\cos\theta \\ u_y &= \frac{Q}{2\pi r}\sin\theta \end{aligned}\right.$$

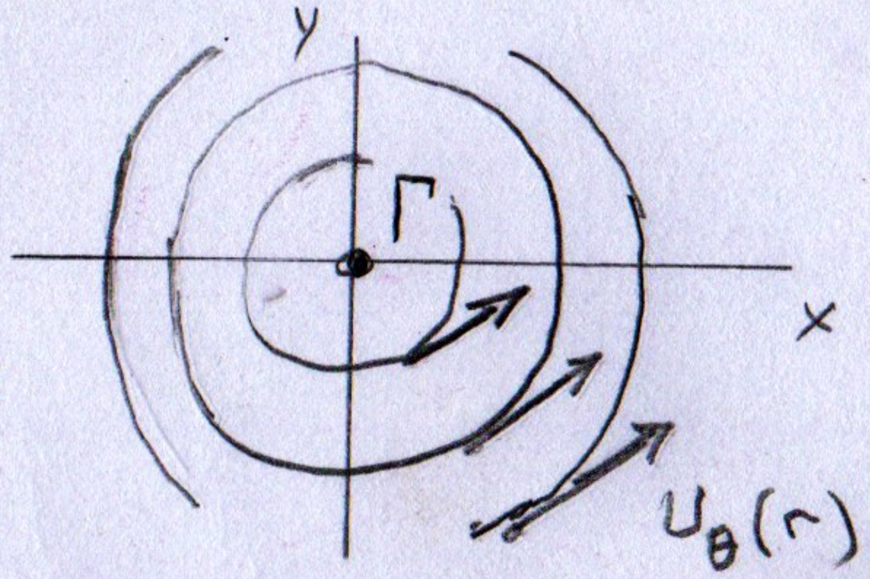
Por lo tanto:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{Q}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} = \partial_x\phi = \partial_y\psi \\ u_y &= \frac{Q}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = \partial_y\phi = -\partial_x\psi \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} \phi &= \frac{Q}{2\pi}\ln r \\ \psi &= \frac{Q}{2\pi}\theta \end{aligned}$$

$$\text{Como}\quad \left.\begin{aligned} z &= r e^{i\theta} \\ W &= \phi + i\psi \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{W(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln(z - z_0)}$$

fuente o sumidero en z_0
$(Q>0)$ $(Q<0)$

Vórtice



Un vórtice puntual en el origen

$$\underline{\omega} = \hat{z}\,\Gamma\,\delta(\underline{r})$$

corresponde a un campo $u_\theta(r)$ tal que $\Gamma = u_\theta(r)\, 2\pi r$

Entonces, con cálculos similares, obtenemos

$$\boxed{W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z - z_0)}$$

vórtice en z_0

Punto de estancamiento ($z = z_0$)

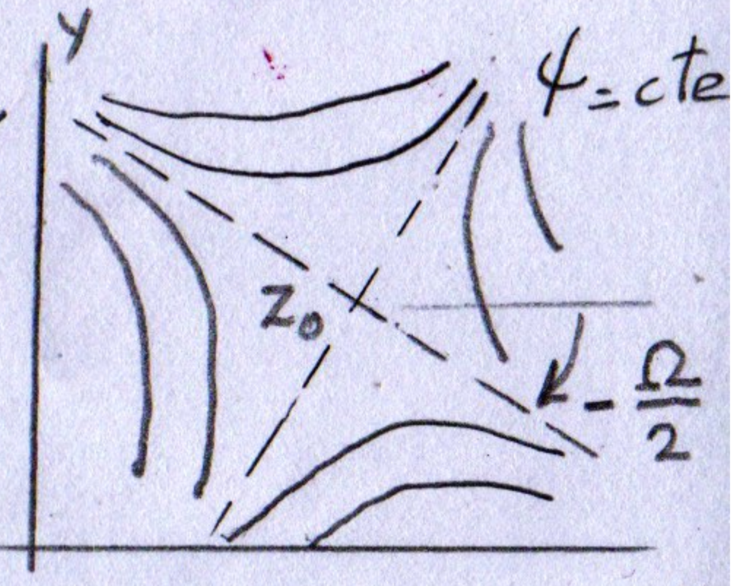
$$W(z) \simeq \underbrace{\cancel{W(z_0)}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\left.\frac{dW}{dz}\right|_{z_0}}}_{U^*(z_0)=0}(z - z_0) + \frac{1}{2}\underbrace{\left.\frac{d^2W}{dz^2}\right|_{z_0}}_{W_0''}(z - z_0)^2 + \ldots$$

(cero de potencial)

$$W_0'' = |W_0''|\, e^{i\Omega} \in \mathbb{C}$$

$$\boxed{W(z) = \frac{W_0''}{2}(z - z_0)^2}$$

pto. estancamiento



Método de imágenes

Al igual que en electrostática, el método de imágenes ayuda a satisfacer <u>condiciones de contorno</u> en problemas con suficiente simetría.

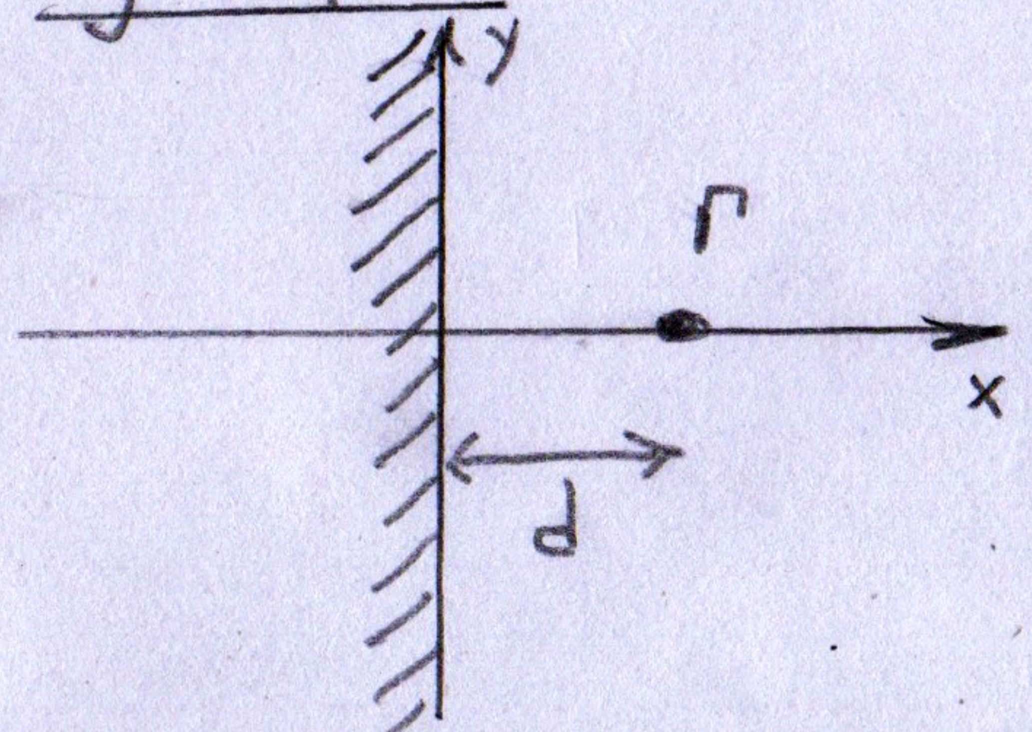
La cond. contorno de un flúido ideal en contacto con paredes rígidas es

$$\hat{n}\cdot\underline{u}\Big|_{pared}=0$$

Expresa la condición de rigidez de la pared.

NOTA: En flujos planos, la velocidad será tangente a la pared y por lo tanto coincidirá con una línea de corriente.

Ejemplo:



Sea un vórtice Γ a una distancia d de una pared. Para satisfacer la cond. contorno, agregamos un vórtice imagen $-\Gamma$ en $x=-d$.

$$\therefore\ W(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z-d)+\underbrace{\frac{-\Gamma}{2\pi i}\ln(z+d)}_{\text{vórtice imágen}}$$

Calculamos líneas de corriente:

$$\psi=\operatorname{Im}W=\operatorname{Im}\left[\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left(\frac{z-d}{z+d}\right)\right]=-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left|\frac{z-d}{z+d}\right|=cte$$

$$\therefore\ \left|\frac{z-d}{z+d}\right|=\varepsilon=cte\ \longrightarrow\ \frac{(x-d)^2+y^2}{(x+d)^2+y^2}=\varepsilon^2$$

Entonces:

$$\Big(x-\underbrace{d\,\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}}_{x_0(\varepsilon)}\Big)^2+y^2=\Big(\underbrace{\frac{2d\,\varepsilon}{1-\varepsilon^2}}_{R(\varepsilon)}\Big)^2$$

Las líneas de corriente son circunferencias no concéntricas, centradas en $x_0(\varepsilon)$ y con radio $R(\varepsilon)$ para $0<\varepsilon<1$.

- Para $\varepsilon\sim 0 \Longrightarrow x_0\sim d\ ,\ R\sim 0$
- $\varepsilon=1/2 \Longrightarrow x_0=\frac{5d}{3}\ ,\ R\sim\frac{4d}{3}$
- $\varepsilon\sim 1 \Longrightarrow x_0\simeq\infty\ ,\ R\sim\infty$

líneas de corriente